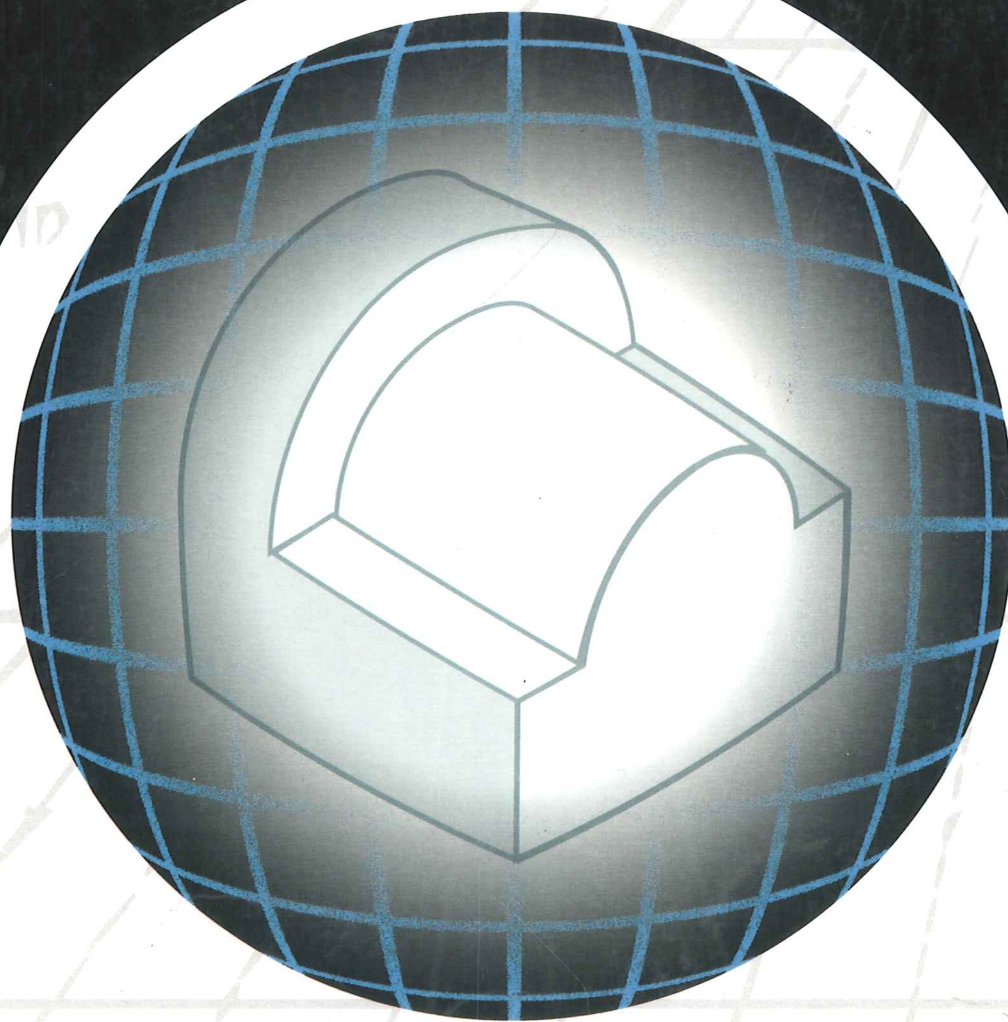
BACHILLERATO

dibujo técnico

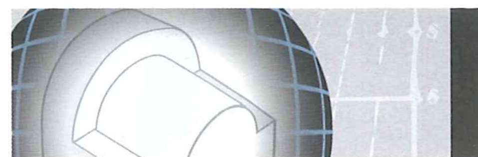
1



EUGENIO BARGUEÑO

Mc Graw Hill

www.mhe.es/bachillerato/plastica



Este libro es una clara plasmación de la importancia del tratamiento de la imagen y la estructuración del formato cuando se trata de transmitir conceptos espaciales. Y esto es esencial en un mundo tan apasionante y complejo como el del dibujo técnico, que en este primer curso de Bachillerato engloba aspectos relativos a las geometrías plana y descriptiva, materiales para el dibujo, normalización y croquización.

Una especial atención puesta en su diseño hace, por tanto, que podamos hablar de su excelente «ergonomía» por cuanto tiene de adecuación al objeto que se propone: una buena traslación de los contenidos propios del temario con una visualización muy conseguida, amable, espaciosa y clara.

Todo el esfuerzo está encaminado a su eficacia didáctica: secuenciación de los contenidos, explicación equilibrada y bien engarzada con la imagen, y una exquisita expresión gráfica. En este especto, entiendo que la formación artística del autor así como su trabajo en Enseñanzas Medias y en la Universidad le han permitido sintetizar con mucho acierto en esta obra la utilidad derivada del dibujo técnico a sus posteriores aplicaciones: diseño, arquitectura, ingenierías, bellas artes...

A mi entender es una demostración más de la eficacia del trabajo transdisciplinar y del enorme interés por buscar confluencias -geometría, arte, diseño...- donde aspectos tan objetivos como los sistemas de representación puedan ser explicados en clave de «adecuación disciplinar».

Resulta de especial utilidad la práctica comparada que se propone en algunos ejercicios del sistema diédrico tradicional o de Monge y del método directo, lo que permite analizar los diferentes niveles de conceptualización espacial que generan ambos.

En definitiva, se trata de una obra cuidada y moderna que, acompañada de los recursos complementarios que ofrece la editorial: cuaderno de trabajo para el alumno, guía didáctica para el profesor, CD de recursos y el Centro de Enseñanza on-line, configura una excelente aportación didáctica.

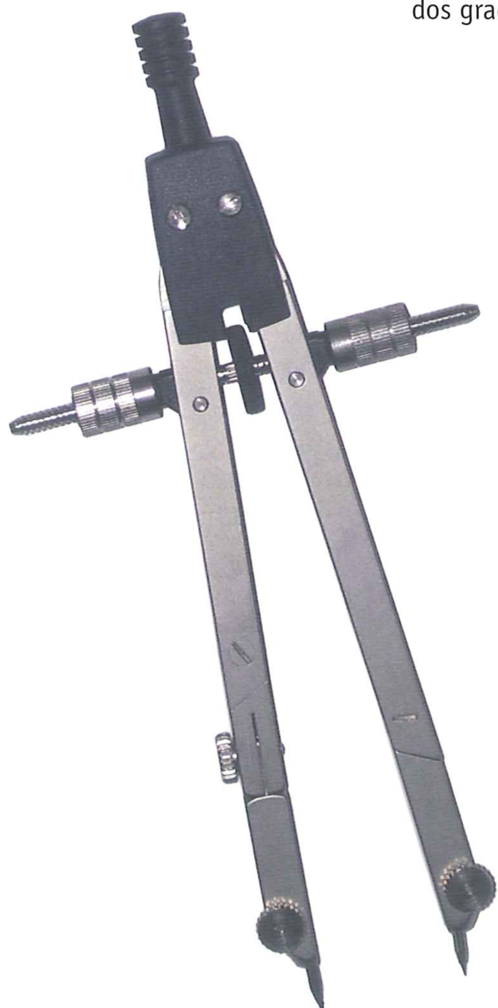
Jon Barredo Cahue
Catedrático de Dibujo y Sistemas de Representación
Universidad del País Vasco



El objetivo principal del dibujo técnico es servir de instrumento múltiple de expresión y comunicación esencial, no sólo en el desarrollo de procesos de indagación con base científica, sino también en la comprensión de esquemas y de diseños tecnológicos susceptibles de ser fabricados.

Por ello, es conveniente que los estudiantes de las modalidades de Bachillerato de Artes, Ciencias de la Naturaleza y la Salud y Tecnológico, a quienes va dirigido este libro, adquieran un amplio dominio de las capacidades y destrezas referentes a las funciones instrumentales de análisis, investigación, expresión y comunicación, que giran en torno a los aspectos visuales de las ideas y de las formas.

En efecto, este texto quiere ser, ante todo, un material didáctico de apoyo que contribuya a que el alumno o alumna de la asignatura de Dibujo técnico del Primer Curso de Bachillerato alcance y supere las intenciones educativas reguladas por la Ley vigente. Por tanto, se ha procurado que la obra sea de fácil lectura, exponiendo en todo momento ejemplos y ejercicios asequibles a los contenidos tratados y desarrollados gradualmente, de forma que dicha obra sea eminentemente práctica.





Al ubicarse esta materia en el Bachillerato, ha de cumplir con sus finalidades educativas, es decir, tener un carácter formativo, orientador y, a la vez, preparatorio para la realización de estudios posteriores. Por ello, teniendo en cuenta su diseño curricular, se ha organizado el texto en diez unidades didácticas que desarrollan los diferentes contenidos que componen la asignatura.

Pensando en el alumno y en la mejor forma de trabajar con el libro, se proponen las siguientes indicaciones:

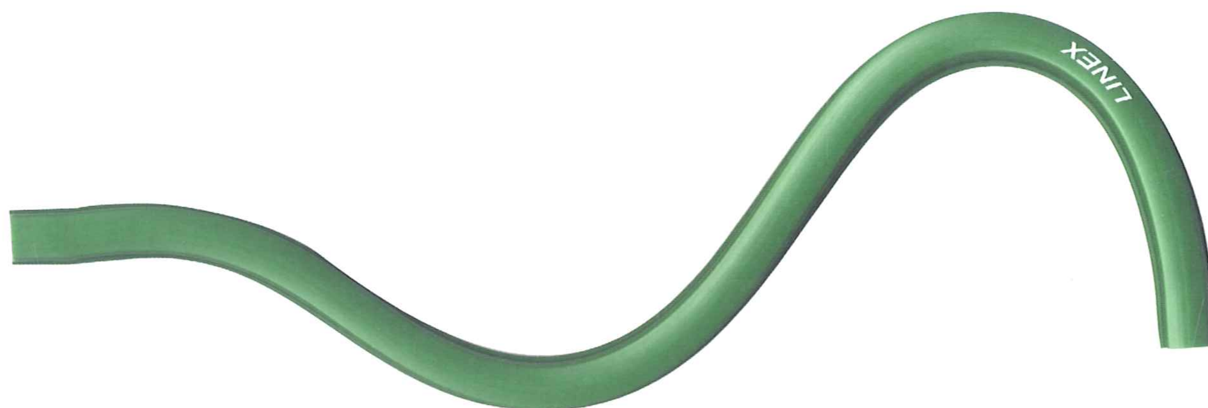
1. Analizar detalladamente la teoría de cada unidad en su conjunto.

2. Clarificar todas las dudas surgidas mediante la lectura del texto y el estudio de los ejercicios organizados en torno a él.

3. Resolver las cuestiones y ejercicios propuestos es una actividad muy importante para comprobar el nivel de conocimiento de los contenidos tratados que se posee.

4. Preguntar, contrastar conceptos, procedimientos de realización, etc., con el profesorado ha de ser una práctica habitual dado que, sin lugar a dudas, es el que mejor a solucionar los problemas que surjan en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Eugenio Bargueño Gómez

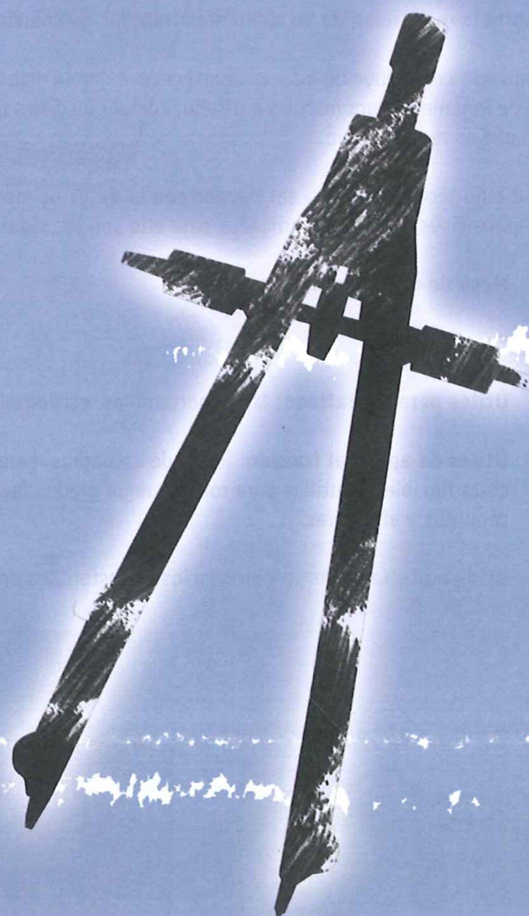




Índice

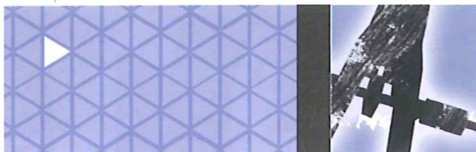
01

Útiles para el dibujo técnico



Un dibujo se puede realizar, normalmente, de dos maneras. La primera es a mano alzada, es decir, sin utilizar ningún instrumento que sirva de guía o apoyo para el trazado de las formas. En la segunda se emplean instrumentos de precisión para ejecutar los trazados: regla, escuadra, compás, ordenador, etc.; a esta segunda forma de dibujar se le denomina dibujo técnico.

En este capítulo vamos a conocer los instrumentos fundamentales para el dibujo técnico: cómo son, para que sirven, la manera de utilizarlos y cómo han de conservarse.



1.1. Introducción

El dibujo técnico se fundamenta en la geometría, y en una serie de normas que van ha tener como finalidad hacer comprensibles los proyectos técnicos.

Dentro de sus diferentes campos, la geometría aporta en sus diferentes vertientes los siguientes aspectos: por un lado, la geometría euclidiana expone el postulado del paralelismo; por otra parte, la geometría proyectiva aborda elementos del espacio tridimensional y sus relaciones con superficies bidimensionales, posibilitando la representación de objetos mediante sus relaciones.

Como se apuntó anteriormente, a todos estos conocimientos de geometría se suman unas pautas de ejecución, en cuanto a la representación y presentación de los dibujos. Estas pautas son descritas por medio de la **normalización.**

También, hay que tener en cuenta el desarrollo de destrezas que se van adquiriendo al poner en práctica las instrucciones de utilización del instrumental y material de dibujo, junto con la experiencia que aporta la realización de los diferentes trazados geométricos hasta conseguir el dibujo definitivo.

Todo ello contribuye de manera decisiva para que la elaboración del dibujo técnico, sea éste de proyecto de ingeniería, arquitectura o diseño, cumpla los fines de exactitud, rigor y comprensibilidad de aquello que es representado.

El dibujo técnico necesita ser trazado con la ayuda de medios e instrumentos específicos apropiados para estos fines. Los útiles indicados para ello son los siguientes:

- **Mesa de dibujo o tablero.**
- **Papel.**
- **Útiles para el grafiado**: lápiz, portaminas, estilógrafo, rotulador.
- **Útiles de apoyo al trazado**: juego de escuadras, paralex, tecnígrafo, compás, plantillas, de curvas, cinta flexible, plantillas para rotular, regla graduada, transportador de ángulos, goma de borrar, sacapuntas y afiladores.
- **Otros materiales complementarios**: transferibles de letras y números.

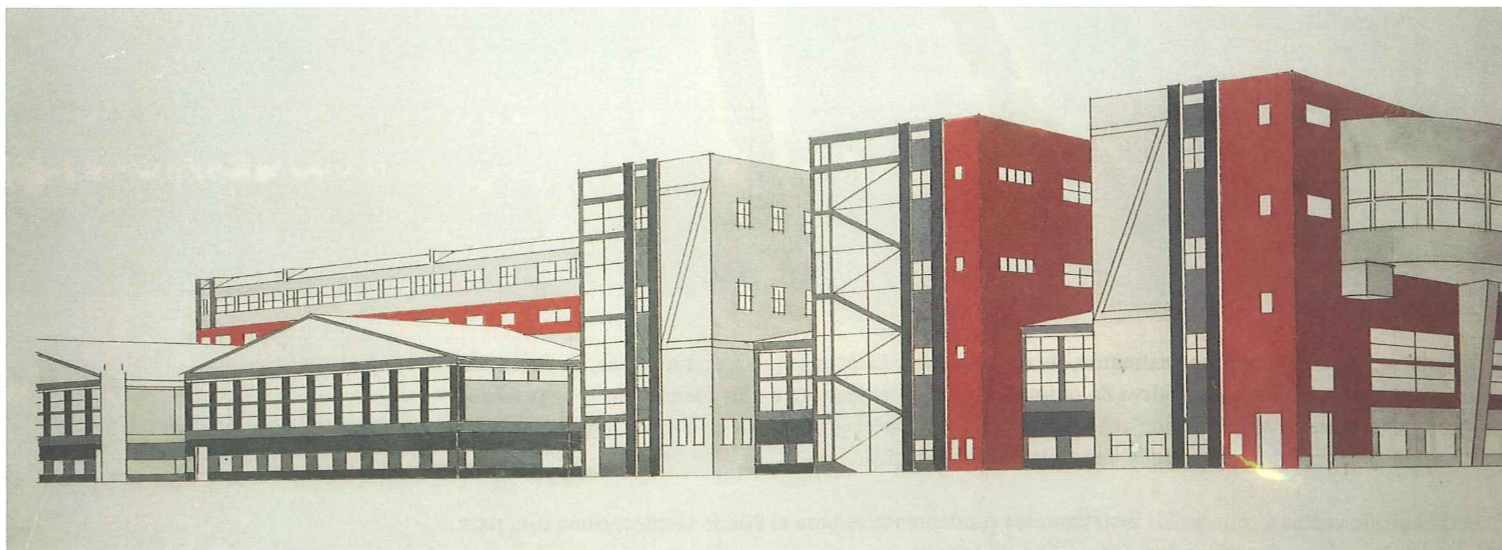
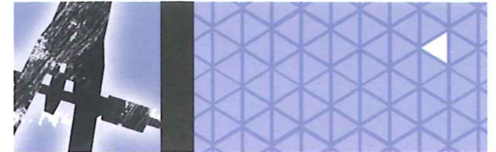


Fig. 1.1. *Esta lámina constituye un ejemplo de utilización de los métodos del dibujo técnico.*



1.2. Mesa de dibujo y tablero

La superficie donde se va ha colocar el papel debe de ser lisa, pero no dura, de tal manera que entre el papel y la superficie de la mesa, o del tablero, ha de colocarse un papel o un plástico especial para esta circunstancia.

Existe una amplia variedad de mesa de dibujo (Fig. 1.2), desde las más sencillas hasta las profesionales. Este tipo de mesa permite de manera rápida variar su inclinación y su altura en función de las necesidades que tenga en cada momento el dibujante.

Hay otros tipos de mesas en el mercado más sencillas, con diseño y mecanismo más austero, pero que posibilitan también de manera eficaz el desarrollo de los dibujos.



Fig. 1.2. *Mesa de dibujo.*

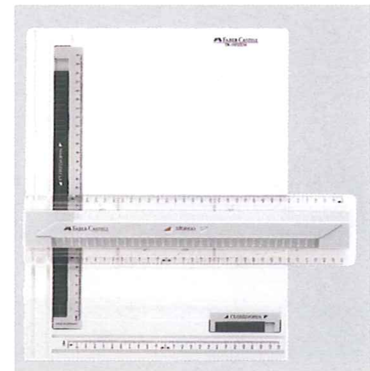


Fig. 1.3. *Tablero de dibujo de formato A4.*

El tablero es una superficie portátil que para iniciarse en el trazado del dibujo técnico es aconsejable y suficiente; las medidas más adecuadas para bachillerato son las que soporten una lámina de formato A3 (420 X 297 mm), como el que se recoge en la Figura 1.4.

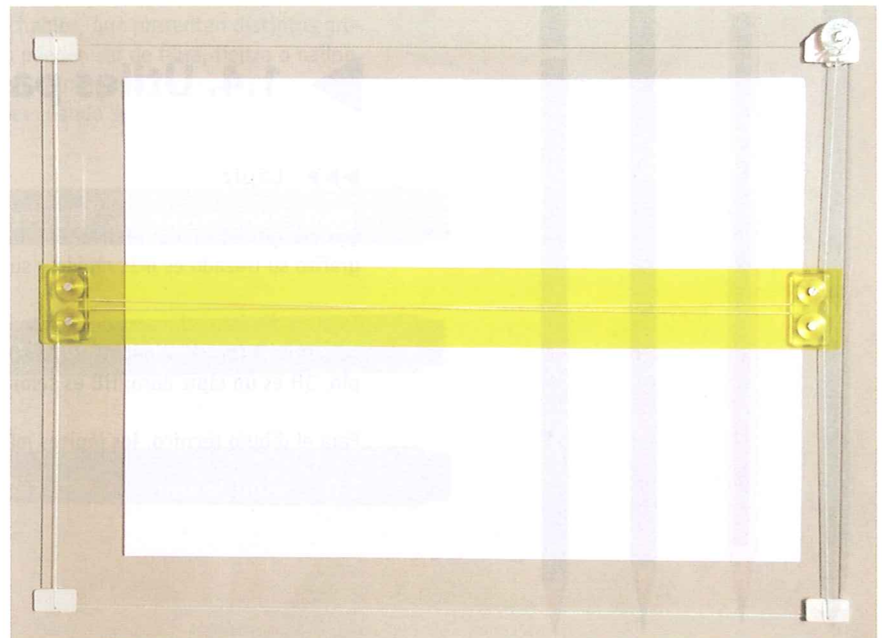
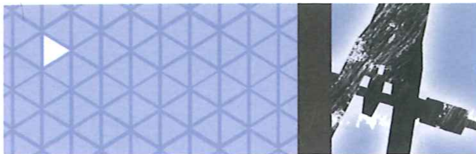


Fig. 1.4. *Tablero transparente para láminas de formato A3.*



1.3. Papel

El papel se hace de pasta de materiales muy diversos: madera, celulosa procedente de vegetales, etc. Estas materias se trituran y luego se blanquean con productos cáusticos. Por último, mediante procesos especiales, se secan y endurecen.

El papel para dibujo técnico debe tener cierta rigidez y una superficie uniforme, permitir un fácil trazado a lápiz y a tinta, y no dejar huella al borrar.

El papel de dibujo técnico se puede clasificar en las siguientes categorías (Fig. 1.5):

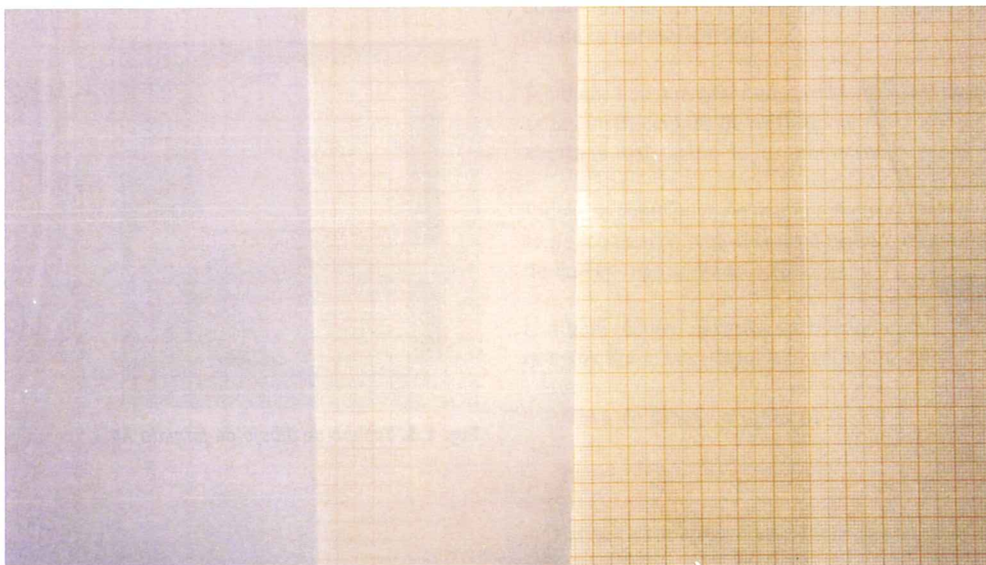


Fig. 1.5. *Ppel vegetal, papel poliéster y acetato sobre papel milimetrado.*

- **Papel opaco:** es el tipo de papel más utilizado para dibujar a lápiz o a tinta; lo habitual es que sea de color blanco, de gramaje alto y consistente.

- **Papel traslúcido:** dentro de este tipo de papel se pueden incluir todos aquellos papeles que permitan una visión superpuesta de un dibujo. Por ello, son papeles muy utilizados en dibujo técnico dado que permiten comparar de manera directa un dibujo con otro.

  Existen tres grandes bloques con la característica citada anteriormente, el denominado papel de poliéster, el compuesto por acetato, y el más común, conocido como papel vegetal.

- **Papel milimetrado:** puede ser opaco o transparente. Se denomina así porque lleva impresa una cuadrícula expresada en milímetros, que suele ser de 1 mm. Se suele utilizar para representar gráficas, croquis y, en ocasiones muy puntuales, planos de taller.

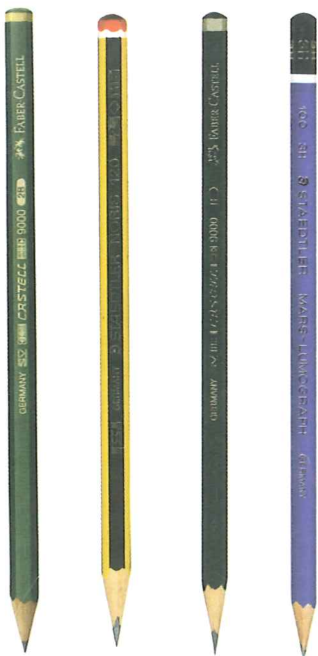


Fig. 1.6. *Cuatro lápices de dureza creciente.*

1.4. Útiles para el trazado

Lápiz

Los dibujos se suelen realizar con lápiz de grafito y no es necesario pasarlos a tinta, dado que con el grafito su trazado es más rápido y su precisión y claridad, suficientes.

Existen distintas durezas de grafito (Fig. 1.6); la dureza del lápiz se indica mediante distintas letras y números: B (*black*) = negro; H (*hard*) = duro. Los números informan del grado de dureza; así, por ejemplo, 3H es un lápiz duro; HB es semiduro, y 2B es blando.

Para el dibujo técnico, los lápices más adecuados son los denominados duros, como el 2H o 3H.



▶▶▶ Portaminas

Es un útil, generalmente de plástico o metal, que consta de un tubo interior en el que se aloja la mina de grafito. Dispone de un mecanismo que impide que la mina se deslice hacia dentro, a pesar de la fuerza que se ejerza sobre ella al dibujar o escribir. Presenta la ventaja, respecto a los lápices de madera, de que no necesita afilado. Se puede recoger y esconder la mina en su interior cuando no se utiliza.

Las minas de grafito de los portaminas tienen diferentes grosores, comprendidos entre 0,3 mm y 2 mm de diámetro (Fig. 1.7).



Fig. 1.7. *Portaminas del 0,5 y portaminas del 2.*

▶▶▶ Estilógrafo

Es un instrumento con el que se dibuja a tinta. Hay dos clases de estilógrafos: los recargables, cuyo depósito de tinta se puede recargar o cambiar; y los desechables, que no permiten la carga o cambio. Sus puntas tienen diferentes grosores; el más grueso traza líneas de 2 mm, y el más fino tiene un ancho de línea de 0,18 mm (Fig. 1.8).

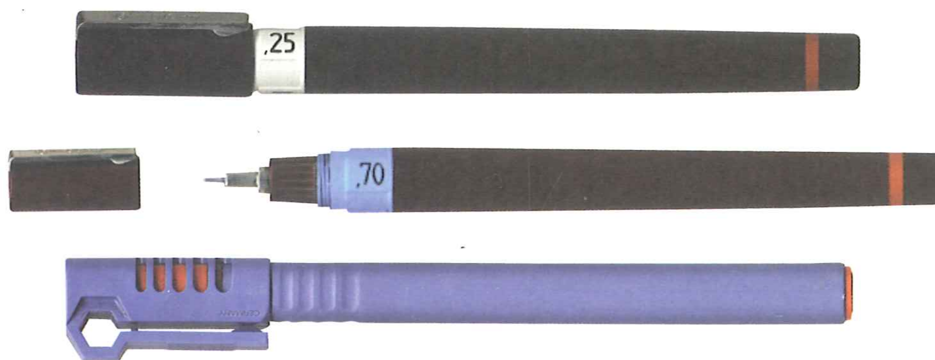


Fig. 1.8. *Estilógrafos.*

▶▶▶ Rotulador

En el aula resultan más cómodos y adecuados los rotuladores desechables, que presentan distintos grosores y funcionan como rotuladores normales (Fig. 1.9). Sus puntas pueden ser de fibra, fieltro o nailon. Tienen un inconveniente, y es que con el tiempo sus puntas suelen deformarse. Para evitarlo, es recomendable no apretar en exceso la punta del rotulador sobre el papel cuando se dibuja.



Fig. 1.9. *Rotuladores desechables.*

1.5. Útiles de apoyo al trazado

Juego de escuadras

El juego de escuadras está compuesto por dos piezas: la escuadra y el cartabón, que se suelen fabricar en plástico.

La escuadra

La escuadra tiene forma de triángulo rectángulo isósceles; por tanto, los catetos forman entre sí un ángulo de 90° y la hipotenusa forma 45° con los catetos.

El cartabón

El cartabón tiene forma de triángulo rectángulo escaleno. Su cateto menor es igual a la mitad de la hipotenusa, de modo que los dos catetos forman entre sí un ángulo de 90°; la hipotenusa de uno de los catetos es de 60°; y la del otro, 30°.

La escuadra y el cartabón forman juego cuando la longitud del cateto mayor del cartabón es la misma que la que tiene la hipotenusa de la escuadra (Fig. 1.10).

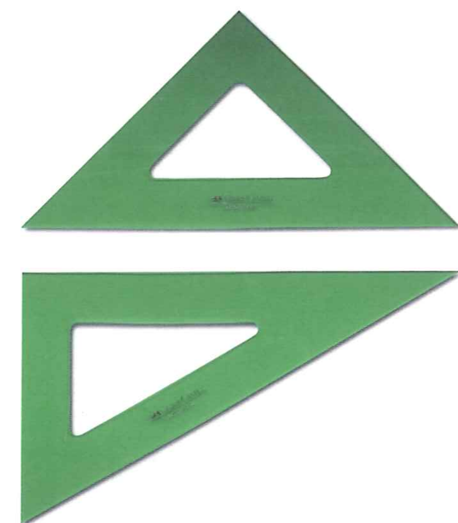
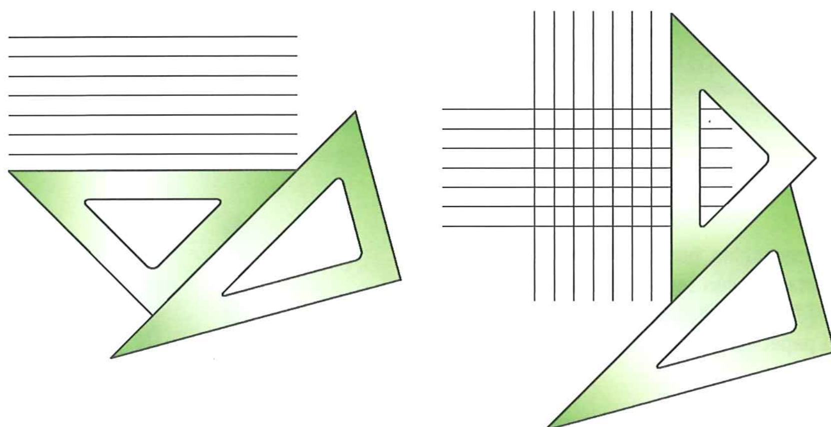


Fig. 1.10. *Escuadra y cartabón.*

Algunos modelos de escuadra y cartabón llevan inscritos la graduación en centímetros y milímetros. Otros presentan los bordes biselados o con un escalón para facilitar el trazado a tinta. Sin embargo, los más aconsejables son los que tienen los bordes rectos y sin graduación.



Empleo de la escuadra y el cartabón

La escuadra y el cartabón deben manejarse con suavidad, sin ejercer demasiada presión, sólo la justa para evitar movimientos no deseados.

En la Figura 1.11 se muestra la manera en que se colocan la escuadra y el cartabón para trazar rectas paralelas horizontales. Si se quiere dibujar rectas perpendiculares a otras que ya están trazadas basta con dejar el cartabón fijo y cambiar el cateto de la escuadra.

Fig. 1.11. *Modo de trazar paralelas y perpendiculares con escuadra y cartabón.*

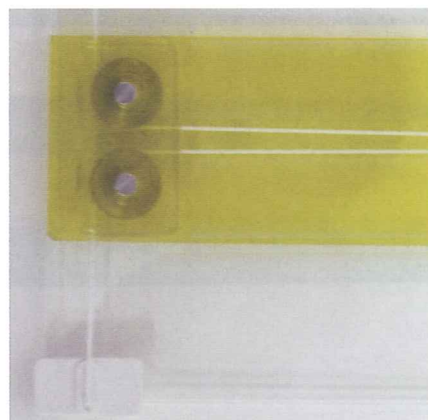


Fig. 1.12. *Detalle del mecanismo de un paralex.*

Paralex

El paralex es una regla de plástico que se desplaza de forma paralela a sí misma. Esta acción la puede realizar por medio de unos hilos que se deslizan por unas poleas situadas en los extremos de la regla, y a su vez, sujetos a la mesa o tablero (Fig. 1.12).



▶▶▶ Tecnígrafo

El tecnígrafo es un instrumento similar al paralex pero mucho más sofisticado. Es utilizado normalmente por profesionales dado su alto precio, y además va montado sobre una mesa de dibujo, que lógicamente sea de calidad. Si se observa la Figura 1.13, se ve que en el cabezal del tecnígrafo, donde convergen las dos reglas, tiene un goniómetro que posibilita realizar diferentes trazados de ángulos, y además, el trazado de paralelas a distancias constantes.



Fig. 1.13. *Tecnígrafo.*

▶▶▶ Compás

Este instrumento de dibujo se utiliza para trazar arcos y circunferencias. Está compuesto por dos brazos articulados por un extremo. En la unión de los brazos hay una pieza en forma de horquilla sobre la que se sitúa el mango del compás.

Los compases más comunes son los que se emplean para medir, que tienen dos puntas metálicas; y los que sirven para dibujar, con una punta metálica en uno de los extremos, que permite apoyar el compás sobre el papel, y un portaminas en el otro, para dibujar.

Este segundo tipo de compás también ofrece la posibilidad de colocar un adaptador para el estilógrafo o el rotulador cuando se quiere dibujar con tinta.



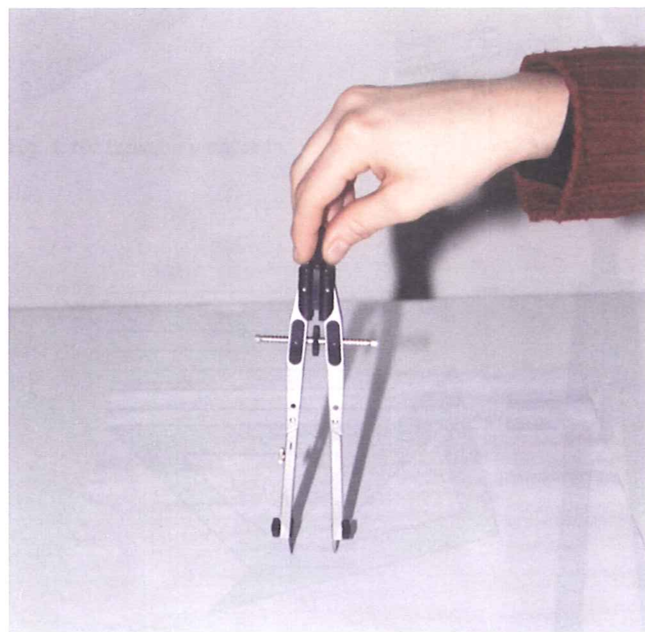
Fig. 1.14. *Dos tipos de compás.*

Accesorios del compás

Para utilizar correctamente el compás serán necesarios diversos accesorios. A continuación se exponen los más importantes (Fig. 1.15):

- **Alargadera:** se utiliza para el trazado de arcos o circunferencias de gran tamaño.
- **Adaptador,** para estilógrafos o rotuladores.
- **Portaminas.**
- **Porta agujas.**

Fig. 1.15. *Diversos accesorios del compás: alargadera, adaptadores para estilógrafos y rotuladores, portaminas y portaagujas.*



Uso del compás

La aguja del compás ha de ser ligeramente más larga que la mina de grafito.

La mina se coloca en el portaminas del compás, sin afilar, de manera que sobresalga unos 8 o 10 mm. Una vez fijada, se afina frotándola sobre un raspador en forma de bisel, que se coloca hacia el exterior del compás. Al afilar la mina de grafito hay que procurar que el polvillo no manche el papel de trabajo.

Tanto la **mina de grafito** como el **rotulador**, como la **aguja** del compás, han de estar perpendiculares al papel mientras se realiza el trazado de arcos o circunferencias.

Cuando se va a dibujar se sujeta el mango del compás con los dedos pulgar e índice, y se le hace girar suavemente en sentido de las agujas del reloj. El compás se debe inclinar entre 10° y 15° en la dirección del giro (Fig. 1.16).

Fig. 1.16. *Uso correcto del compás.*

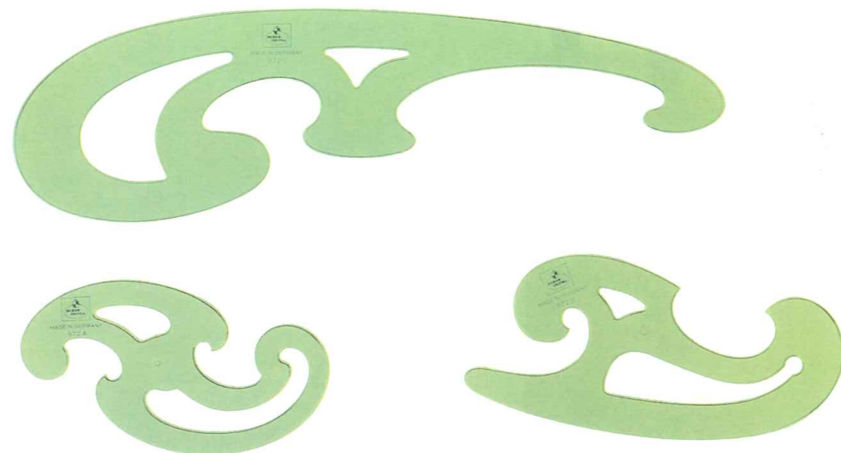


Fig. 1.17. *Plantillas Burmester.*

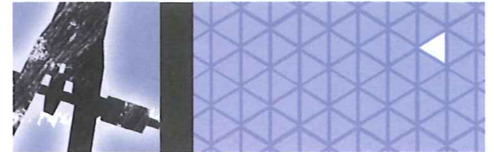
▶▶▶ Plantillas de curvas

Las plantillas de curvas son útiles de dibujo técnico, normalmente de plástico, que se emplean cuando resulta complicado trazar una curva con el compás, o si se desea agilizar el trazado de otras más sencillas.

Las plantillas de curvas que se suelen utilizar son las siguientes:

- **Juego de plantillas Burmester** (Fig. 1.17): se emplean para trazar curvas cónicas o especiales, difíciles de realizar con compás. Para ello, hay que buscar un fragmento de la plantilla que coincida con los puntos por los que tiene que pasar la curva.

  A continuación, con el lápiz se dibuja el tramo de curva elegido y así se obtiene la curva deseada.



- **Plantillas de círculos y elipses** (Fig. 1.18): estos útiles proporcionan al dibujante una extraordinaria rapidez en su trazado, debido a la cantidad y variedad de tamaños que estas curvas tienen.

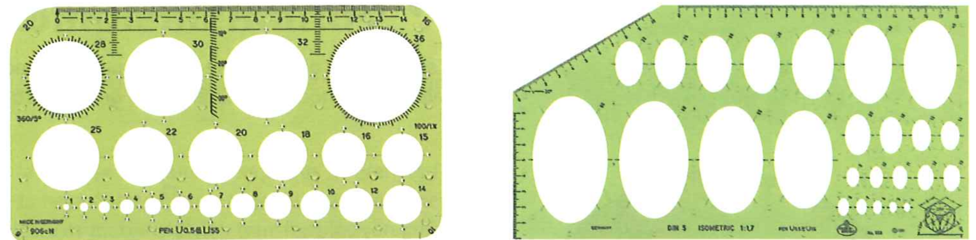


Fig. 1.18. *Plantillas de círculos y elipses.*

- **Cinta flexible** (Fig. 1.19): este instrumento se acomoda a la curva trazada gracias a un alambre metálico recubierto de goma de vinilo.

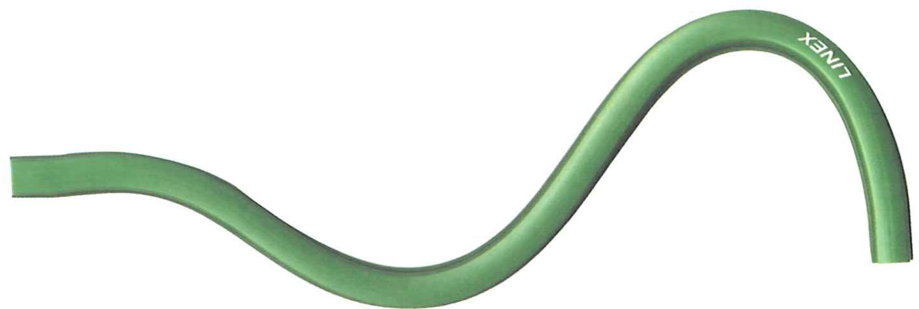


Fig. 1.19. *Cinta flexible.*

▶▶▶ Plantillas para rotular

Son unas pequeñas reglas de plástico en cuya superficie se han troquelado letras y números con grosores y altura de letras conforme a las normas del dibujo técnico (Fig. 1.20).



Fig. 1.20. *Plantilla para rotular.*

▶▶▶ Regla graduada

Es un instrumento, normalmente de plástico, con un bisel en el que lleva grabada la longitud expresada en milímetros, con el fin de conseguir mayor precisión al tomar o determinar distancias (Fig. 1.21).

La longitud de una regla oscila entre 20 y los 100 cm. Se debe emplear sólo para obtener y transportar medidas; para el trazado de líneas rectas hay que recurrir a la escuadra o al cartabón.

No conviene utilizar el compás para tomar medidas directamente sobre la regla para evitar su deterioro.

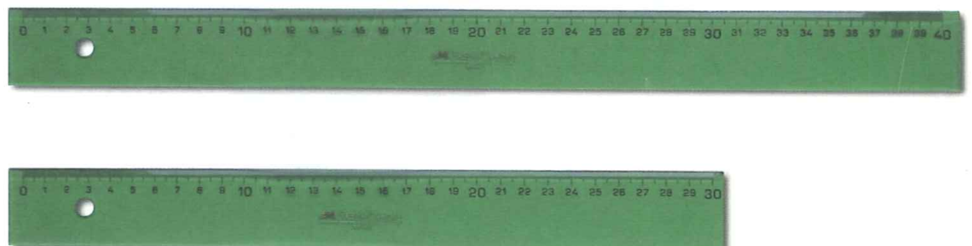
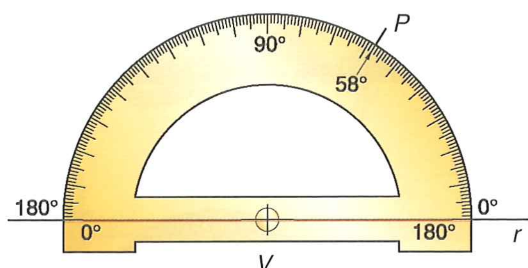


Fig. 1.21. *Reglas graduadas.*



▶▶▶ Semicírculo graduado o transportador de ángulos

El semicírculo graduado se emplea para transportar y medir ángulos. Está dividido en grados sexagesimales y es conocido también como goniómetro o semicírculo de 180°.



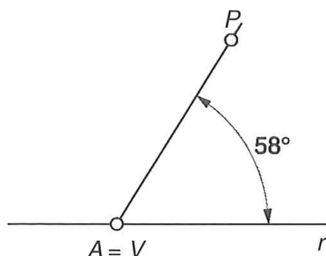


Fig. 1.22. *Uso del semicírculo graduado.*

Uso del semicírculo graduado

En primer lugar, se hace coincidir la recta 0° - 180° del semicírculo con la recta *r*, sobre la que se quiere dibujar el ángulo dado, y el punto *V* sobre el vértice elegido *A* (Fig. 1.22).

Después, se hace una señal *P* en el borde graduado, justo con la graduación que se desea; por ejemplo, 63°. Se retira el semicírculo y, uniendo *A* con *P*, se obtiene el ángulo.

▶▶▶ La goma de borrar



Fig. 1.23. *Gomas de borrar.*

La finalidad de la goma de borrar es eliminar los trazos incorrectos o sobrantes (Fig. 1.23). Existen gomas adecuadas a la dureza del lápiz, es decir, que son más duras cuanto más lo es el lápiz que se ha empleado.

Para borrar tinta se ha de utilizar una goma dura que contenga abrasivo (arena de grano fino). También se pueden emplear raspadores u hojas de afeitar muy afiladas, pero se desaconseja su uso, dado que requiere una gran destreza para no romper el papel.

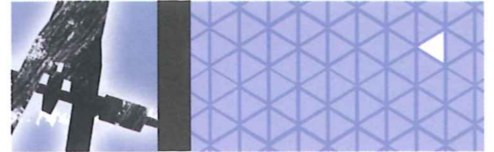
▶▶▶ Sacapuntas y afiladores

Los sacapuntas y afiladores son instrumentos que se utilizan para sacar la mina al lápiz y afilarla. Existe una gran variedad de modelos fabricados en metal y plástico (Fig. 1.24), siendo los mejores los primeros.

Conviene afilar un lápiz de grafito por el extremo que no lleva grabada la dureza, con el fin de no perder su identificación. Para ello se debe utilizar un sacapuntas y la longitud de la mina ha de ser de unos 5 mm.



Fig. 1.24. *Diversos tipos de afiladores.*



1.6. Otros materiales complementarios

Dentro de los objetivos que nos ocupan en esta Unidad, sólo presentaremos un tipo de material complementario, los denominados **transferibles**.

Este material lo constituyen unas hojas translúcidas en las que se encuentran impresos diferentes temas. Frotando estas impresiones por la cara adecuada de la hoja se transfieren al papel, que previamente se ha situado bajo la hoja que contiene los transferibles. Los motivos de los transferibles son múltiples, por ejemplo:

Letras y números

Tanto unas como otros, pueden ser de diferentes estilos y alfabetos (griego, árabe, etc.); las letras también pueden ser mayúsculas, minúsculas y de diversos tamaños y grosores, al igual que los números.

Tramas

También existe una gran variedad de motivos en ellas, por ejemplo éstas pueden contener punteados, rayados, etc., de manera uniforme o de diferentes densidades.

Series dedicadas a profesionales

Por ejemplo, para arquitectura hay hojas con personas en diferentes posiciones, coches, árboles, variados tipos de enladrillados, etc. Todas estas representaciones pueden encontrarse a diversas escalas en papelerías especializadas.

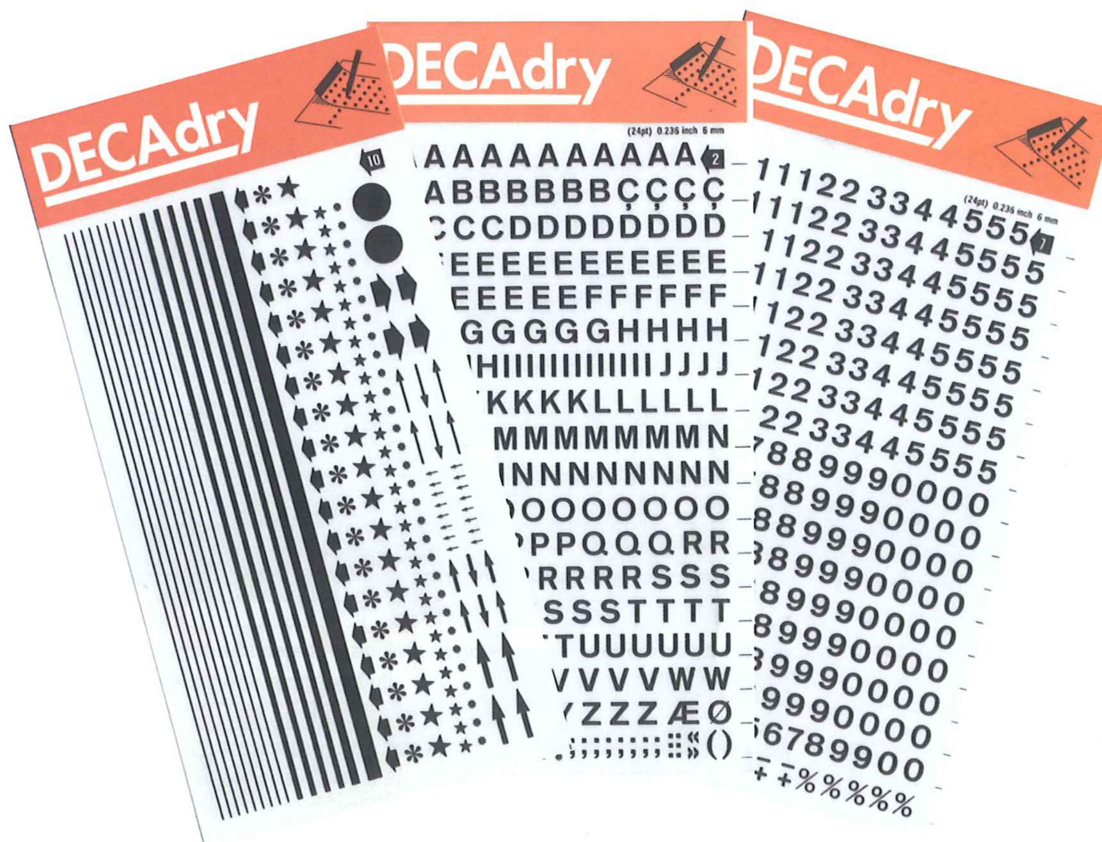


Fig. 1.25. *Hojas de trasferibles.*

1. Útiles para el dibujo técnico

Actividades sobre útiles para el trazado de dibujo técnico

Cuestiones

1. ¿Qué características tiene el papel dedicado a dibujo técnico?
2. ¿Cuántos tipos de papel hay para dibujo técnico?
3. ¿Qué dureza de mina de grafito se utiliza en dibujo técnico?
4. ¿Qué ventajas tiene el portaminas respecto al clásico lápiz de madera?
5. ¿Qué ventajas tienen los rotuladores respecto a los estilógrafos?
6. ¿Qué propiedad tiene que tener un juego de escuadra y cartabón?
7. ¿Qué es un paralex?
8. Describe cómo trazar un arco de circunferencia adecuadamente con un compás.
9. Describe cómo se traslada un ángulo de 36° con un semicírculo graduado a un punto *P* cualquiera de una recta *r*.
10. ¿Qué es un goniómetro?

Ejercicios

1. Observa los pasos que se han dado para realizar estas composiciones (Figs. 1.26 y 1.27). Siguiendo el mismo procedimiento, realiza varias composiciones con las plantillas de círculos o de elipses. Puedes ayudarte del color para dar más fuerza y belleza a tus dibujos.

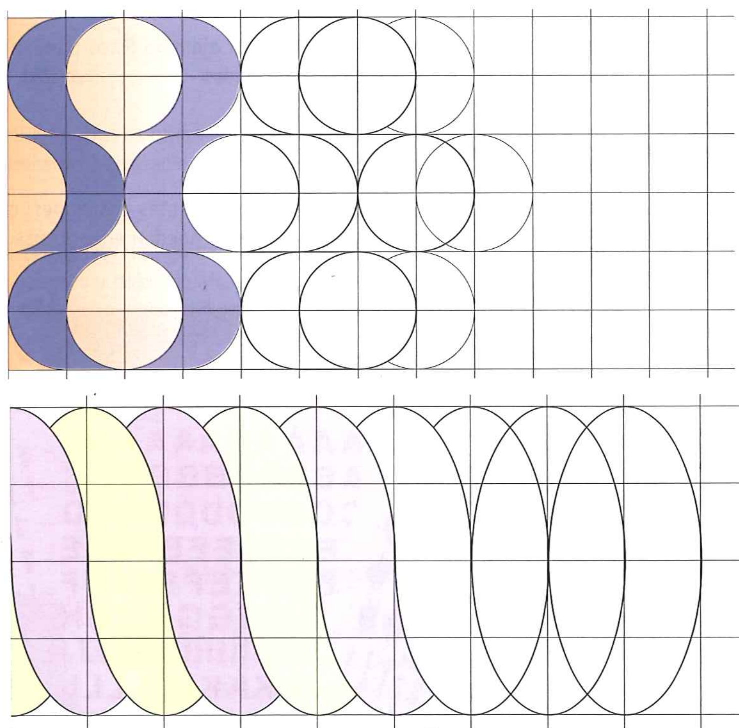


Fig. 1.26. *Ejercicio 1, composiciones de ejemplo.*

2. Realiza dos diseños empleando líneas rectas y curvas a partir de dos cuadrados de 12 cm de lado. En el primero utiliza la línea recta, y en el segundo la línea curva. Observa los que se presentan a modo de ejemplo en las figuras.

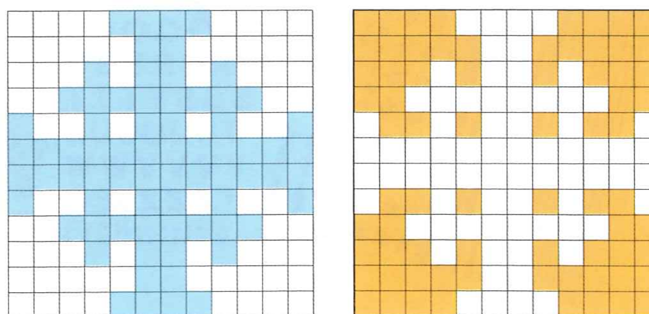
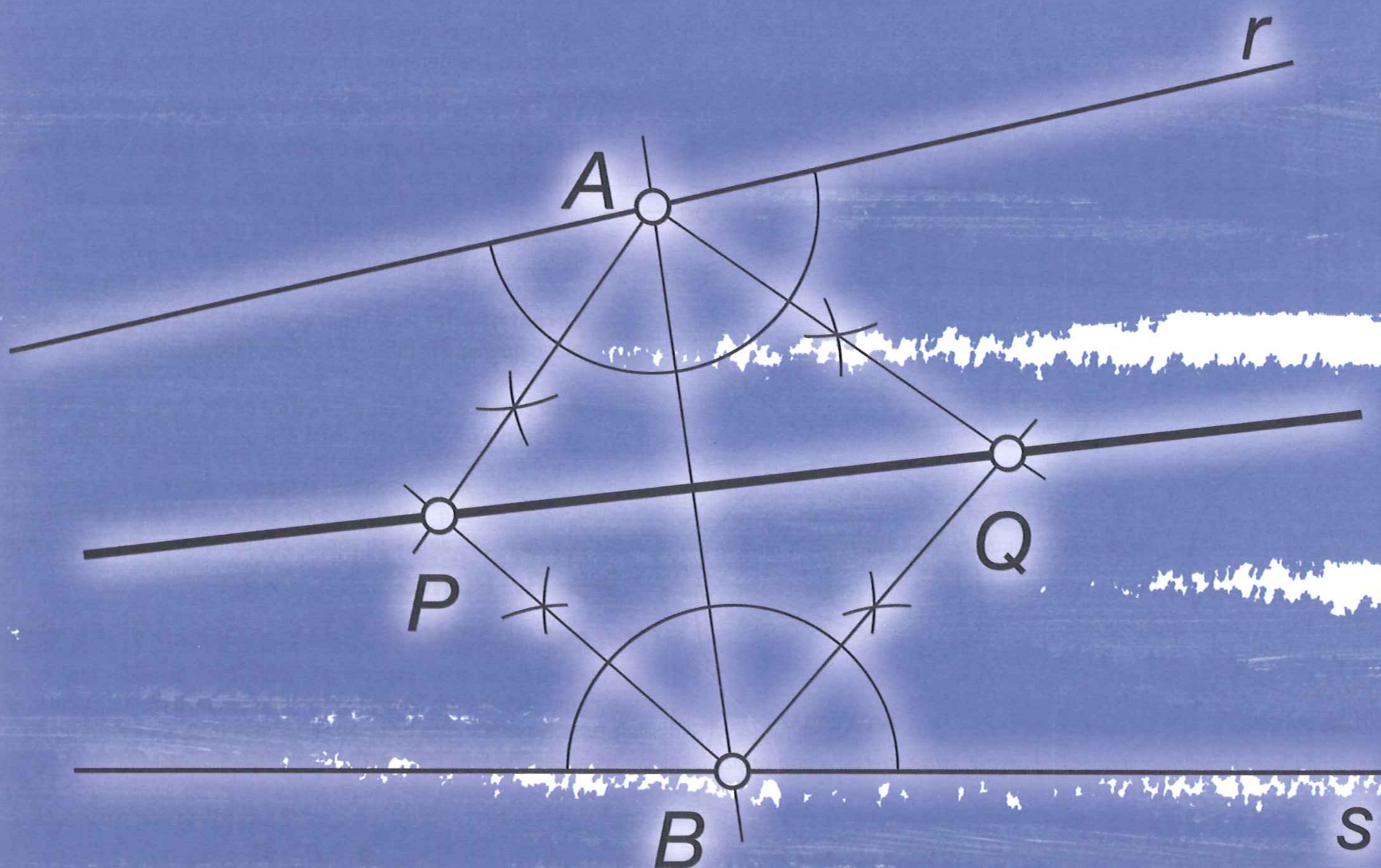


Fig. 1.27. *Ejercicio 2, diseños de ejemplo.*

02

Trazados fundamentales en el plano



En dibujo técnico, es fundamental conocer los trazados geométricos básicos para construir posteriormente formas o figuras de mayor complejidad.

En este capítulo se va estudiar diferentes procedimientos para el trazado de rectas paralelas y perpendiculares, utilizando como herramientas principales de dibujo técnico el compás, la regla, la escuadra y el cartabón.

Posteriormente se desarrollan contenidos sobre operaciones con segmentos, y el estudio de proporcionalidad entre ellos; y por último, se desarrollan conceptos y construcciones de ángulos, circunferencia y rectificaciones.

$\overset{\frown}{AB}$ *arco AB*	**t** *recta*
$\overset{\frown}{AOB}$ *ángulo AOB*	**r** *radio*
∟ *ángulo recto*	|| *paralela*
> *mayor que*	**l** *longitud*
< *menor que*	**AB** *segmento*
⊥ *perpendicular*	∅ *diámetro*

Tabla. 2.1. *Signos convencionales.*

2.1. Convencionalismos

Para poder representar de manera exacta los objetos que nos rodean, o que diseñamos, es obligado que su representación sea objetiva y esté desarrollada mediante trazados que estén basado en conceptos y operaciones geométricas, es decir, lo que se conoce como un dibujo técnico o científico.

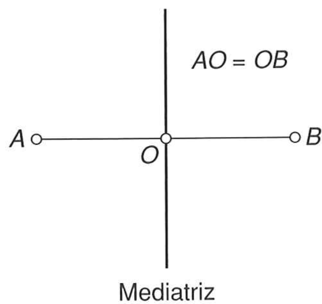
Para poder normalizar y comprender en todo momento estas operaciones, se utilizan una serie de signos y símbolos geométricos que identifican los diversos conceptos geométricos tratados. En la Tabla 2.1 se exponen aquellos con los que se va a trabajar a partir de ahora.

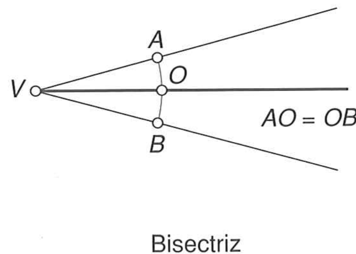
2.2. Elementos geométricos

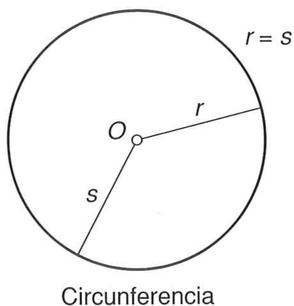
A. Lugar geométrico

Se denomina **lugar geométrico** al conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad. Veamos algunos ejemplos de este concepto (Fig. 2.1):

- **Mediatriz:** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento.
- **Bisectriz:** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo.
- **Circunferencia:** es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro denominado centro.
- **Arco capaz:** es el lugar geométrico de los puntos sobre los que se observa un segmento dado con un ángulo determinado.







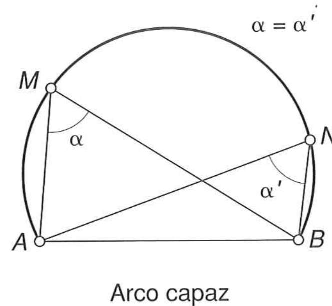


Fig. 2.1. *Ejemplos de lugar geométrico: mediatriz, bisectriz, circunferencia y arco capaz.*

B. Punto

Es el lugar geométrico donde se cortan dos líneas. Es identificado como un lugar en el espacio que indica una posición, no posee ninguna dimensión. Se designa mediante una letra mayúscula: *A, B, C* ... Se representa a través de un círculo pequeño, un punto o una pequeña aspa (Fig. 2.2).



Fig. 2.2. *Representaciones del punto.*

Podemos distinguir dos tipos de puntos:

- **Punto propio:** es aquel que se puede situar en el espacio y ser representado; por ejemplo, el vértice de un polígono, o el centro de una circunferencia.
- **Punto impropio:** es un punto situado en el infinito, por ejemplo, el punto donde se cortan dos rectas paralelas. No obstante, pueden ser representados; un ejemplo de ello es el punto de fuga de un haz de rectas paralelas en el sistema cónico de representación.



C. Línea

Es una sucesión de puntos ininterrumpida. Necesita para su trazado la aplicación de un útil de precisión, es decir, una regla, un compás o una plantilla. Dentro de las líneas se pueden diferenciar las siguientes:

- **Línea recta:** es una sucesión de puntos en una misma dirección infinita e ilimitada. Por tanto, tiene dos puntos impropios en sus extremos Se denomina con letras minúsculas: *a*, *r*, *s*, etc. Esta clase de líneas puede ser **vertical, horizontal** o **inclinada** (Fig. 2.3).

- **Línea curva:** Es una sucesión de puntos que no están situados bajo una misma dirección. También se nombra mediante una letra minúscula: *b*, *t*, *m*, etc. (Fig. 2.4) Puede ser **abierta, cerrada** u **ondulada.**

- **Semirrecta:** es la parte de la recta limitada en un extremo por un punto propio, y en la otra por un punto impropio. Se denomina de la siguiente manera: *A* – *s* (Fig. 2.4).

- **Segmento:** Es una sucesión de puntos finita y limitada. Determinan sus extremos dos puntos propios *A* y *B*; también es posible hacer referencia al segmento con una letra minúscula: *t*, *r*, *s*, etc. (Fig. 2.4).

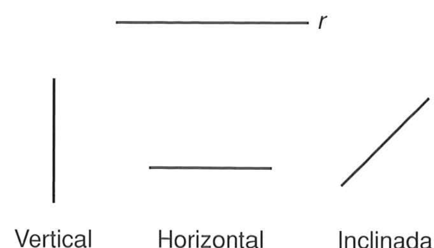


Fig. 2.3. *Clases de líneas rectas.*

Al combinar fragmentos de líneas, segmentos o arcos de circunferencia entre sí, pueden resultar los siguientes tipos de líneas:

- **Línea quebrada:** Se obtiene al combinar varios segmentos en forma de zigzag. En ocasiones también se la denomina como línea poligonal (Fig. 2.4).

- **Línea mixta:** Se obtiene al mezclar segmentos con arcos de curvas (Fig. 2.4).

Todas los tipos de líneas se consideran **líneas propias,** dado que pueden situarse en el plano y representarse. Las **rectas impropias,** por contra, son aquellas que están situadas en el infinito, por ejemplo la intersección de dos planos paralelos.

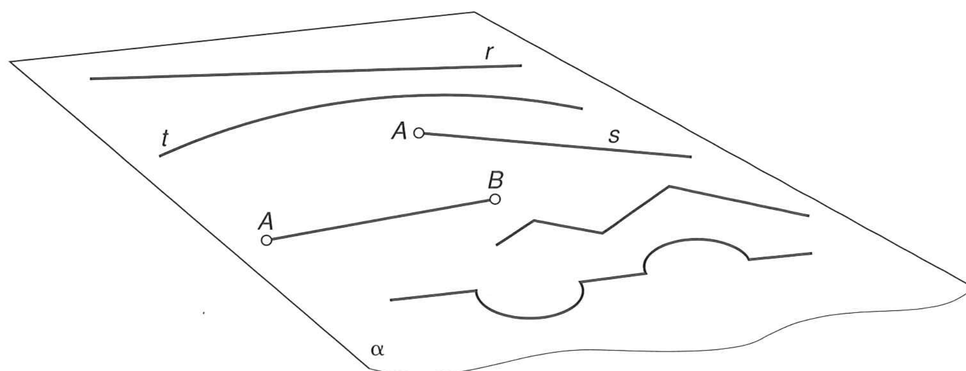


Fig. 2.4. *Recta, curva, semirrecta, segmento, línea quebrada y línea mixta.*

D. Posiciones del punto con respecto a la recta

Un punto respecto de una recta sólo tiene dos posiciones: estar formando parte de la recta, o estar situado fuera de la recta. En este último caso, la distancia de un punto a una recta es la perpendicular trazada desde el punto a la recta (Fig. 2.5).

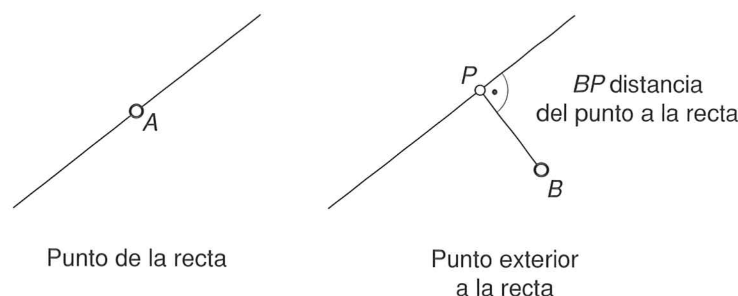


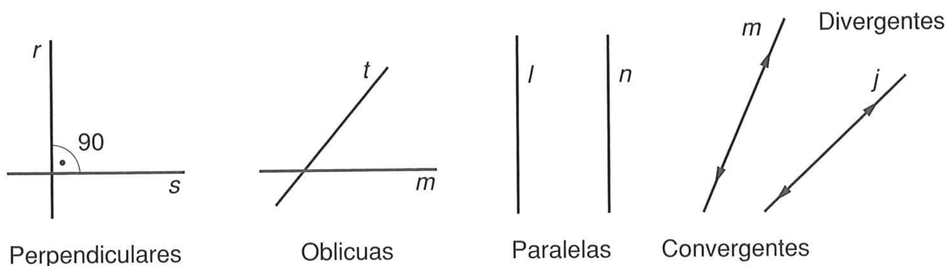
Fig. 2.5. *Posiciones del punto con respecto a la recta.*

E. Posiciones de las rectas del mismo plano entre sí

Dos rectas de un mismo plano pueden estar situadas entre sí de la forma siguiente:

- **Rectas perpendiculares:** son las que, al cortarse, forman entre sí ángulos rectos, es decir, de 90° (Fig. 2.6).

- **Rectas oblicuas:** son aquellas que, cuando se cortan, los ángulos que forman entre sí no son de 90°, pero son iguales dos a dos (Fig. 2.6).



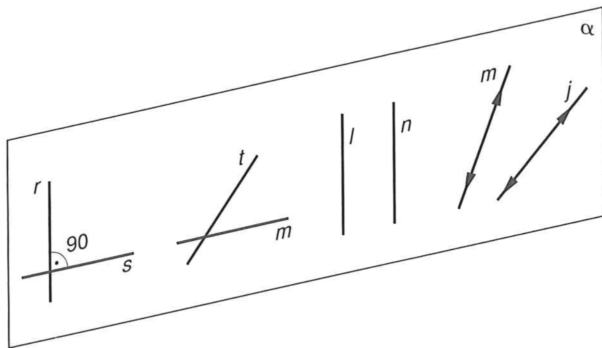


Fig. 2.6. *Posiciones de las rectas del mismo plano entre sí.*

- **Rectas paralelas:** Son rectas que no se cortan. Por tanto, son aquellas que por mucho que se prolonguen nunca se encuentran (Fig. 2.6).

Se dice que dos rectas son **convergentes** cuando al prolongarlas se cortan; y **divergentes** cuando al prolongarlas se observa que se separan (Fig. 2.6).

Dos **rectas que se cruzan** son aquellas que no tienen ningún punto en común y no son paralelas. Esto sucede cuando cada recta está contenida en un plano diferente (Fig. 2.7).

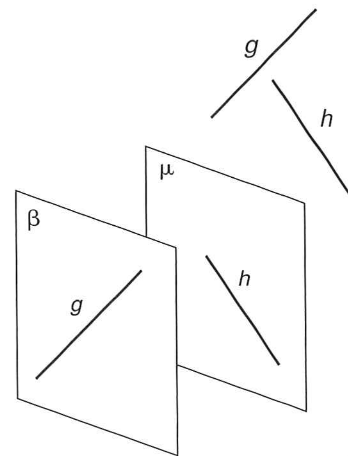


Fig. 2.7. *Dos rectas que se cruzan.*

F. Plano

Es un elemento geométrico bidimensional, es decir, tiene dos magnitudes, longitud y anchura. Conceptualmente es una superficie infinita e ilimitada; por tanto, contiene infinitos puntos e infinitas rectas. Un plano α puede ser definido a partir de los siguientes elementos geométricos:

a) Tres puntos no alineados en el espacio (Fig. 2.8a).

b) Dos rectas que se cortan (Fig. 2.8b).

c) Dos rectas paralelas (Fig. 2.8c).

d) Una recta y un punto exterior a ella (Fig. 2.8d).

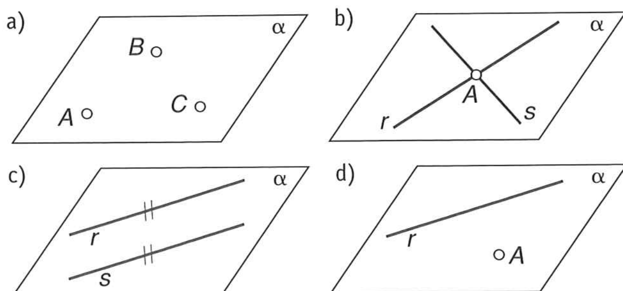
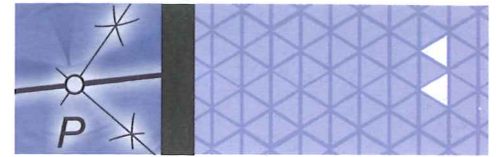


Fig. 2.8. *Cuatro formas de definir un plano.*

Además de las formas vistas para definir un único plano, también se puede limitar mediante cualquier figura plana.

Se suele designar con letras griegas α, β, λ, etc. Una recta de un plano divide a éste en dos parte denominadas **semiplanos.**

- **Plano propio:** es aquel que contiene rectas y puntos propios.
- **Plano impropio:** es lugar geométrico donde se encuentra las rectas y los puntos impropios.



2.3. Trazados geométricos fundamentales

A. Perpendicularidad

Como se expuso anteriormente, dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman entre sí ángulos rectos, es decir, de 90°.

Trazados de perpendiculares con regla y compás

Mediatriz de un segmento

Como es sabido, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento; por tanto, es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio y lo divide en dos partes iguales.

1. Se traza el segmento *AB*. Con centro en el extremo *A*, y con una abertura de compás superior a la mitad de *AB*, se trazan dos arcos. Con la misma abertura, y haciendo centro en *B*, se trazan otros dos arcos, que cortan a los anteriores en los puntos *M* y *N*.

2. Al unir estos puntos queda determinada la mediatriz del segmento (Fig. 2.9).

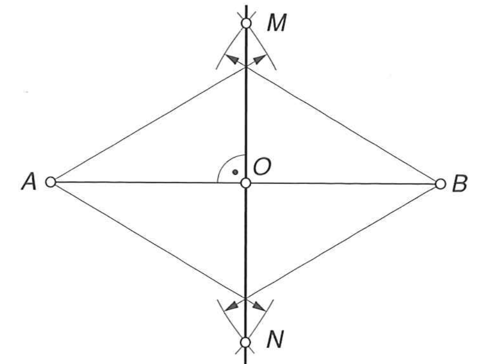


Fig. 2.9. *Mediatriz de un segmento.*

Perpendicular a una recta que pase por un punto exterior

1. Se traza la recta *r* y el punto exterior *P*. Se hace centro en el punto *P* y, con una abertura de compás cualquiera, pero que corte a la recta *r*, se traza un arco, con lo que resultan los puntos *A* y *B*.

2. Se traza la mediatriz del segmento *AB*, pero ahora basta con determinar uno, el punto *N*. Uniendo los puntos *P* y *N* trazamos la perpendicular pedida (Fig. 2.10).

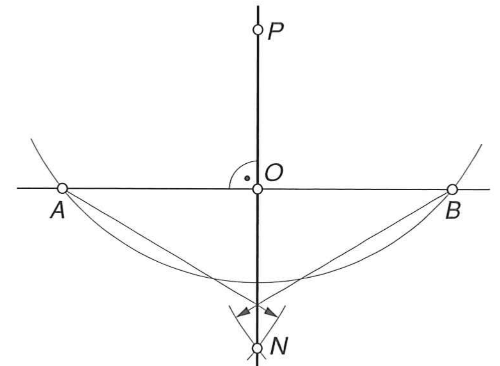


Fig. 2.10. *Perpendicular a una recta por un punto exterior.*

Perpendicular a una recta que pase por un punto de la misma

1. Se traza la recta *r* y el punto *P* de la misma. Se hace centro en el punto *P* y se traza un arco con un radio cualquiera que corte a la recta *r* en el punto *A*.

2. Con el mismo radio utilizado anteriormente, y ahora haciendo centro en *A*, se traza el arco *AM*, y desde *M*, el *MN*.

3. Finalmente, se halla la mediatriz del segmento curvilíneo *MN*, obteniendo el punto *G*, que unido con *P* nos define la perpendicular.

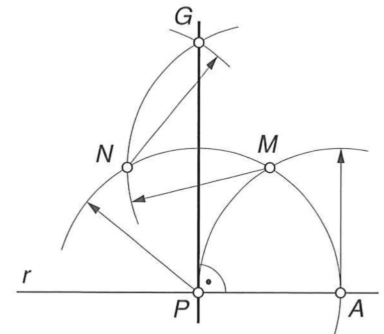


Fig. 2.11. *Perpendicular a una recta por un punto de la misma.*

Trazado de perpendiculares con escuadra y cartabón

Para trazar por el punto *P* una recta perpendicular a la recta *r*, se apoya la escuadra sobre el cartabón de manera que la hipotenusa de la escuadra coincida con la recta *r*. Seguidamente, se gira la escuadra y se apoya de nuevo por un cateto en el cartabón, de forma que pase por el punto *P*, de este modo, se podrá trazar la perpendicular deseada. En la Figura 2.12; se puede observar el proceso explicado, además de cómo deben situar la escuadra y el cartabón tanto las personas que son diestras como aquellas que son zurdas.

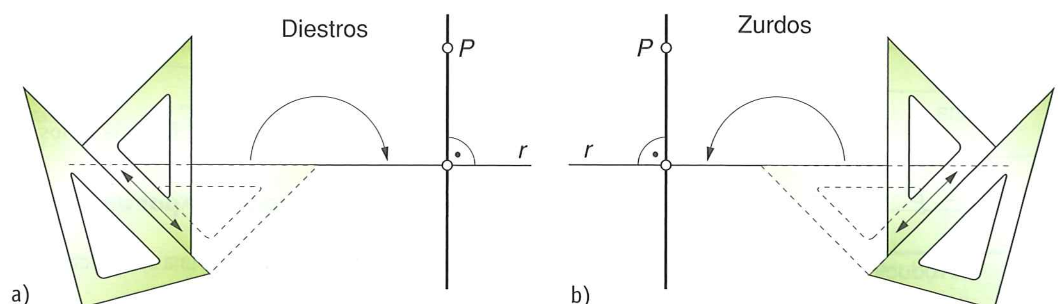
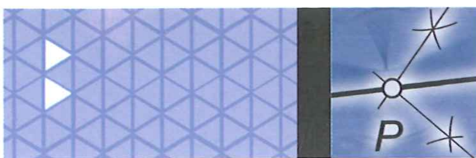


Fig. 2.12. *Trazado de perpendiculares con escuadra y cartabón a) para personas diestras y b) para personas zurdas.*



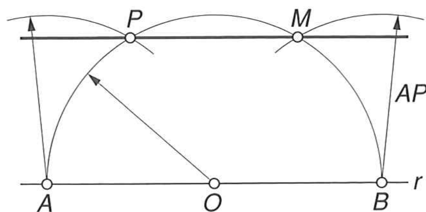


Fig. 2.13. *Paralela a una recta por un punto, primer procedimiento.*

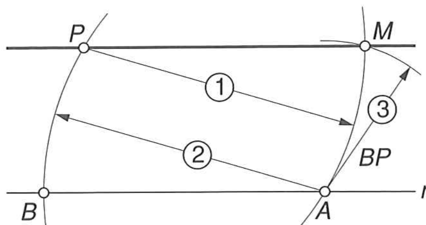


Fig. 2.14. *Paralela a una recta por un punto, segundo procedimiento.*

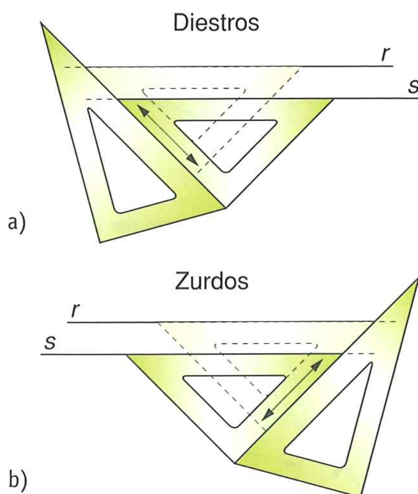


Fig. 2.15. *Trazado de paralelas con escuadra y cartabón a) para personas diestras y b) para personas zurdas.*

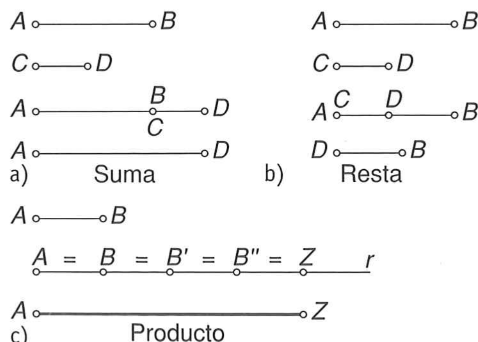


Fig. 2.16. *Operaciones con segmentos: a) suma, b) resta y c) producto por un número real.*

B. Paralelismo

A modo de recuerdo: dos rectas son paralelas cuando por mucho que se prolonguen nunca se encuentran.

Trazado de paralelas con regla y compás

Paralela a una recta por un punto (primer procedimiento)

1. Se traza la recta *r* y el punto exterior a ella *P*. Se hace centro en un punto *O* cualquiera de la recta, y se traza una semicircunferencia que pase por *P*, obteniendo los puntos *A* y *B*.

2. Haciendo centro en *A*, se toma una abertura *AP* que se lleva desde *B* para obtener el punto *M*. Uniendo los puntos *P* y *M*, se traza la paralela pedida (Fig. 2.13).

Paralela a una recta por un punto (segundo procedimiento)

Dada su sencillez y similitud con el ejercicio anterior, no se aporta ningún texto explicativo del dibujo. Sólo hay que guiarse por los números para comprender cómo se realizan los trazados para hallar la solución que se pide (Fig. 2.14).

Trazado de paralelas con escuadra y cartabón

Según si se es diestro o zurdo, se colocarán la escuadra y el cartabón según aparece en la Figuras 2.15a o 2.15b. Lo que sí es común para ambos casos es hacer coincidir la hipotenusa de la escuadra con la recta a la que se quiere trazar la paralela, y uno de los catetos de la escuadra estar apoyado en la hipotenusa del cartabón.

B. Operaciones con segmentos (suma, resta y producto por un número real)

Los trazados que se van a explicar con segmentos son muy sencillos: **suma, resta** y **producto;** pero no por ello dejan de tener importancia, ya que son la base de construcciones geométricas más complejas, como triángulos, cuadriláteros, etcétera.

Suma de segmentos

1. Se sitúan los segmentos *AB* y *CD*, uno a continuación del otro. Para ello, sus longitudes se transportan con compás.

2. El segmento resultante, *AD*, es la suma de los dos segmentos dados (Fig. 2.16a).

Resta de segmentos

1. Se transporta con el compás el segmento *CD* sobre el segmento *AB* a partir de uno de sus extremos, por ejemplo, *A*.

2. El segmento que resulta, *DB*, es la diferencia de los segmentos dados (Fig. 2.16b).

Producto de un segmento por un número real

1. Se transporta el segmento *AB* sobre una semirrecta tantas veces como indique el número multiplicador.

2. Por tanto, el segmento resultante, *AZ*, es el producto pedido (Fig. 2.16c).



Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. Describe qué se entiende por convencionalismos en dibujo técnico.
2. ¿Qué se entiende por lugar geométrico? Define mediatriz, bisectriz y circunferencia como lugares geométricos.
3. ¿Qué se entiende en geometría como línea? Enuncia y define diferentes tipos de líneas.
4. ¿En qué se diferencian una recta y una semirrecta?
5. ¿Qué es un plano en geometría? ¿Qué elementos definen un solo plano?
6. ¿Cuándo se dice que dos rectas son perpendiculares?¿Y paralelas?
7. ¿Cuántas rectas paralelas se pueden trazar a una recta por un punto exterior dado?
8. ¿Cuántas rectas perpendiculares se pueden trazar a una recta por un punto exterior dado?

Ejercicios

1. Represente el segmento que se obtiene al sumar los siguientes:

   a =35 mm; b = 42 mm; c = 37 mm y d = 41 mm.

2. Representa el segmento que se obtiene al restar el segmento b del a; a = 83 mm y b = 47 mm.
3. Representa el segmento que se obtiene al multiplicar por cinco un segmento cuya longitud es de 26 mm.
4. Traza la mediatriz de un segmento cuya longitud es de 65 mm.
5. Traza con regla y compás una perpendicular a una recta que pase por un punto de ella.
6. Traza con regla y compás una perpendicular a una recta desde un punto exterior a ella que diste 32 mm.
7. Traza con regla y compás una recta paralela a otra dada que diste 41 mm.
8. Dibuja cuatro cuadrados de 80 mm de lado y traza rectas paralelas a una distancia de 4 mm en las siguientes direcciones:

   En el primer cuadrado, verticales; en el segundo, horizontales; en el tercero, oblicuas a 45° de izquierda a derecha; y en el cuarto, oblicuas a 60° de derecha a izquierda.

9. Dibuja las siguientes figuras sabiendo que sus cotas están en milímetros. Comienza los dibujos trazando las cuadrículas de apoyo: así será más fácil su construcción (Fig. 2.17).

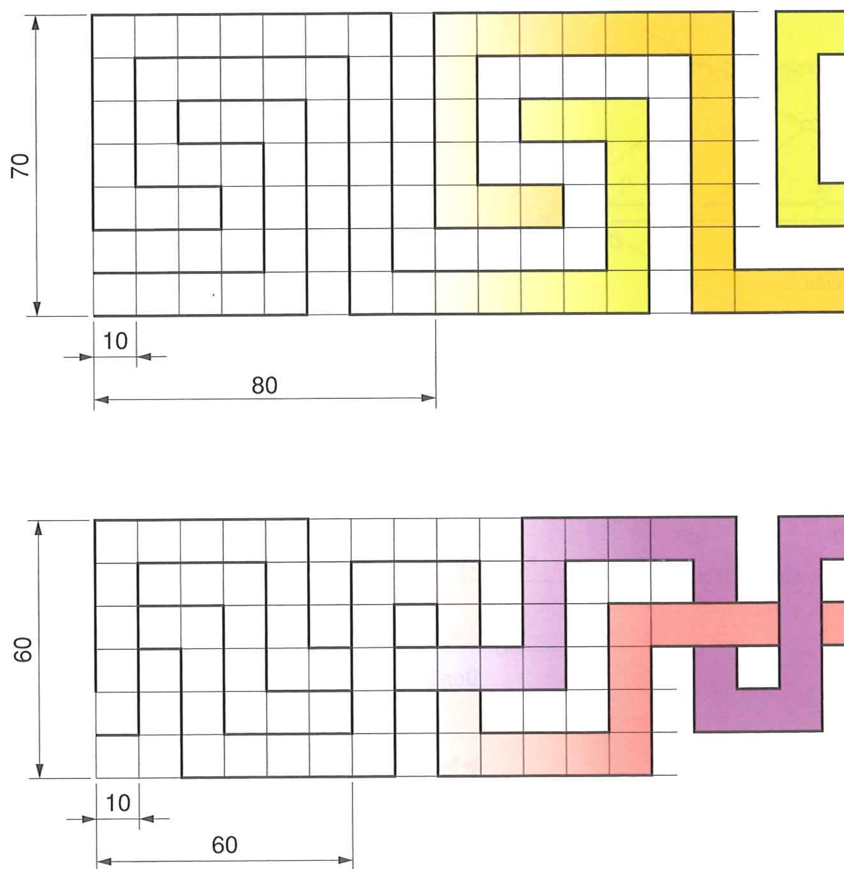


Fig. 2.17. *Ejercicio 9, enunciado.*

2.4. Proporcionalidad entre segmentos

A. Conceptos

Proporcionalidad

Es la relación que existe entre las partes de una figura con respecto al todo y a los demás objetos. También se dice que la proporcionalidad es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma, pero diferente tamaño.

Razón

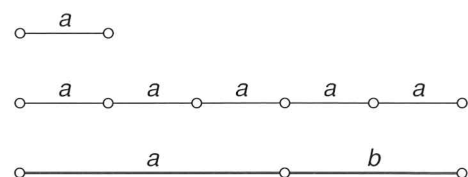


Fig. 2.18. *Razón.*

Razón entre dos segmentos, *a* y *b*, es el valor de la relación entre las longitudes de ambos segmentos; los segmentos *a* y *b*, son los términos de la razón. Por tanto, este concepto posibilita comparar dos segmentos y saber cuántas veces uno es contenido en el otro. La razón se denomina mediante la letra *K*. Es decir:

$$\text{Razón} = a/b = K$$

Proporción

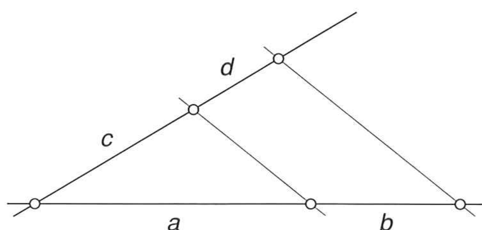


Fig. 2.19. *Proporción.*

Es la igualdad entre dos razones. Es decir, si se toman cuatro segmentos, *a*, *b*, *c* y *d*, se dice que son proporcionales cuando, tomados dos a dos, su razón es la misma (Fig. 2.19).

$$a/b = c/d$$

- **Medios** se llaman a los términos *b* y *c*.
- **Extremos** se llaman a los términos *a* y *d*.

Proporcionalidad directa

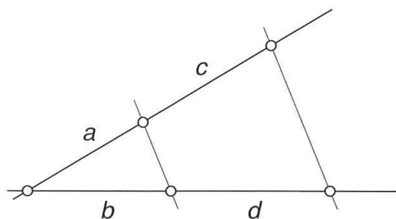


Fig. 2.20. *Proporcionalidad directa.*

Se dice que son magnitudes **directamente proporcionales** aquellas que varían de tal forma que su razón permanece constante.

$$a/b = a''/\,b' = a''/b'' = \ldots$$

Por tanto, se denominan segmentos directamente proporcionales a los segmentos que cumplen:

$$a/b = c/d = K$$

Donde *K* es la constante de proporcionalidad directa (Fig. 2.20).

Proporcionalidad inversa

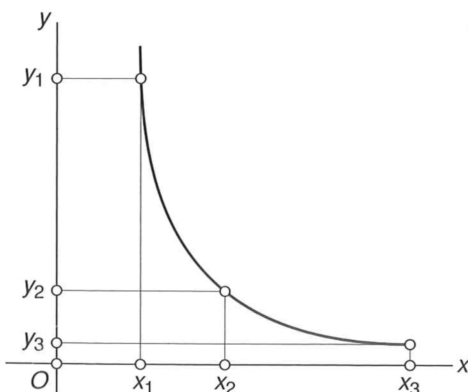


Fig. 2.21. *Proporcionalidad inversa.*

Se dice que son magnitudes **inversamente proporcionales** aquellas que varían de tal forma que su producto permanece constante. Es decir, cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye en la misma proporción.

Dos magnitudes *x* e *y* son inversamente proporcionales cuando se verifica que:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \ldots = K.$$

Donde *K* es la constante de proporcionalidad inversa (Fig. 2.21).



B. Teorema de Tales

Si se cortan dos rectas concurrentes, *r* y *s*, por un haz de rectas paralelas, los segmentos resultantes sobre la recta *r* son proporcionales a los determinados sobre la recta *s*. Es decir, son directamente proporcionales.

$$AB/A'B' = BC/B'C' = CD/C'D'$$

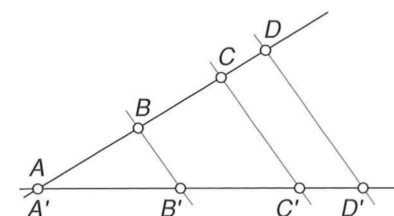


Fig. 2.22. *Teorema de Tales.*

C. Aplicaciones del teorema de Tales

Aplicando el teorema de Tales se puede dividir un segmento en partes iguales o proporcionales.

División de un segmento en partes iguales

1. A partir del extremo *A* del segmento *AB* dado, se traza la semirrecta *r*. Sobre ella se marcan tantas divisiones como partes en las que se quiera dividir el segmento *AB*, por ejemplo cinco. La medida de estas divisiones es arbitraria, pero siempre la misma.

2. Se une el último punto, en este caso 5, con *B* y se trazan paralelas a *B*5 por los puntos 4, 3, 2, y 1, quedando dividido *AB* en las partes que se pretendía (Fig. 2.23).

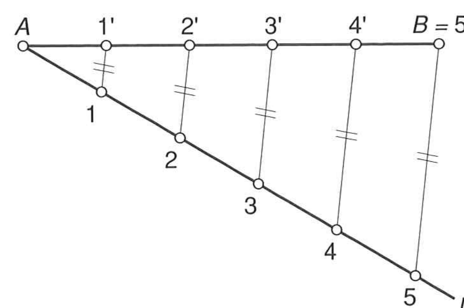


Fig. 2.23. *División de un segmento en partes iguales.*

División de un segmento en partes proporcionales

1. Se trata de dividir el segmento *AB* en partes proporcionales a los segmentos *l*, *m* y *n*. Se dibuja el segmento *AB* dado y una recta *r* que pase por uno de los extremos del segmento; por ejemplo, *A*.

2. Se sitúan las longitudes de los segmentos *l*, *m* y *n* sobre la recta *r*, obteniendo los puntos 1, 2 y 3.

3. Se une el punto 3 con el extremo *B* del segmento *AB* y se trazan paralelas al segmento 3*B* por los puntos 1 y 2, determinando sobre AB los segmentos proporcionales buscados: *l'*, *m'* y *n'* (Fig. 2.24).

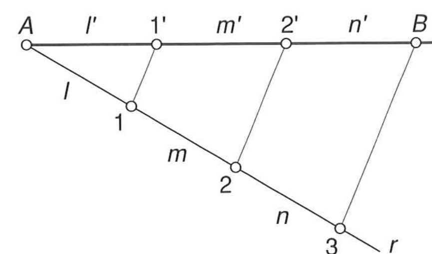


Fig. 2.24. *División de un segmento en partes proporcionales.*

Cuarta proporcional de tres segmentos

Dados tres segmentos *a*, *b* y *c*, se denomina cuarta proporcional al segmento *d*, si éste cumple que: $a/b = c/d$; $a \cdot d = b \cdot c$. Por tanto, $d = b \cdot c/a$.

1. Para realizar su construcción se trazan dos rectas concurrentes *r* y *s* que se cortan en el punto *O* con un ángulo cualquiera. Se lleva sobre ellas los segmentos de la manera siguiente: *a* y *b* sobre una recta a partir de *O*; y el segmento c sobre la otra, también a continuación de *O*.

2. Se traza una recta desde el extremo de *a* al extremo de *c*, y se dibuja una paralela desde el extremo de *b* a la anterior recta trazada, obteniendo así el extremo del segmento *d* buscado (Fig.2.25).

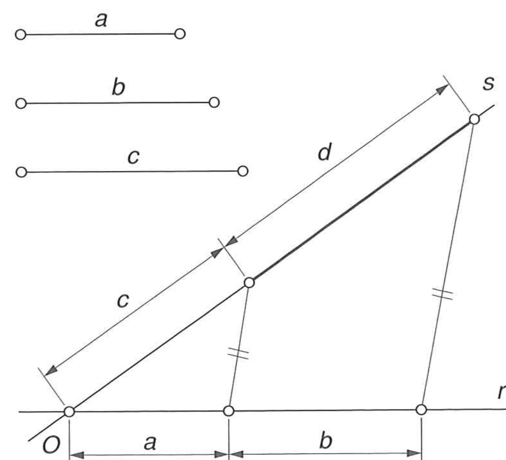


Fig. 2.25. *Cuarta proporcional de tres segmentos.*

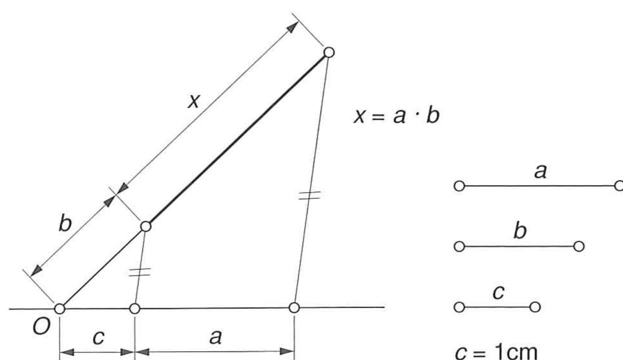


Fig. 2.26. *Producto de dos segmentos.*

Producto de dos segmentos: a · b = x

Si se toma un segmento como unidad, por ejemplo un centímetro, *c*; y dados los segmentos *a* y *b*, se observa que:
$a \cdot b = x$; $a \cdot b = x \cdot c$; $a/c = x/b$; $c/a = b/x$. Por tanto, el segmento *x* es la **cuarta proporcional** de los segmentos *c*, *a* y *b* (Fig. 2.26).

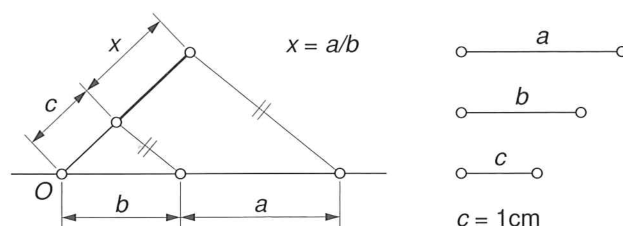


Fig. 2.27. *Cociente de dos segmentos.*

Cociente de dos segmentos: a/b = x

Si se toma también un segmento que tenga una longitud de un centímetro, *c*, como unidad, y dados los segmentos *a* y *b*, se observa que:

$a/b = x$; $a/b = x/c$; $b/a = c/x$. Sucede de nuevo que el segmento *x* es la **cuarta proporcional** de *b*, *a* y *c* (Fig. 2.27).

▶▶▶ Tercera proporcional de dos segmentos

Dados dos segmentos, *a* y *b*, se denomina **tercera proporcional** al segmento *c*, si éste cumple que: $a/b = b/c$; $a \cdot c = b2$. Por tanto, $c = b2/a$. Su proceso de trazado es el siguiente:

1. Partiendo de dos rectas *r* y *s* que se cortan, sobre una de ellas, por ejemplo *r*, se lleva los segmentos *a* y *b*, y sobre la otra, *s*, el segmento *b*.

2. Por el extremo del segmento *b* de la recta *r* se traza una paralela a la recta que une el extremo del segmento *a* con el extremo del segmento *b*, determinando así el segmento *c* buscado (Fig. 2.28).

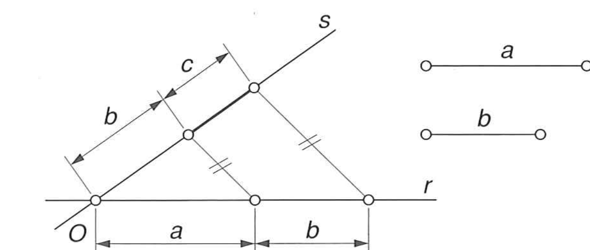


Fig. 2.28. *Tercera proporcional de dos segmentos.*

Cuadrado de un segmento: $a^2 = x$

Se toma aquí también un segmento *c* de un centímetro como unidad, y dado el segmento *a*, se observa que:

$a \cdot a = x$; $a \cdot a = x \cdot c$; $a/c = x/a$; $c/a = a/x$. De lo que se deduce que el segmento *x* es la **tercera proporcional** entre *c* y *a*. (Fig. 2.29).

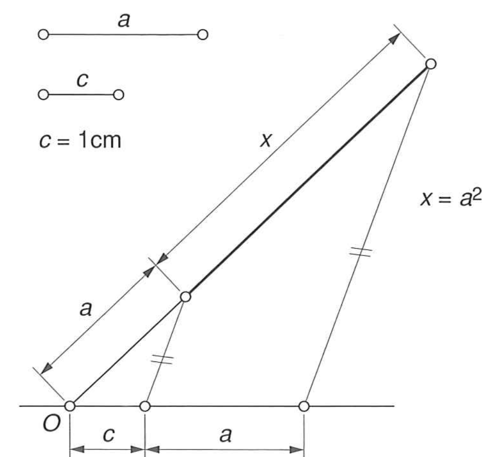


Fig. 2.29. *Cuadrado de un segmento.*

▶▶▶ Media proporcional

Dados los segmentos *a* y *b*, se denomina media proporcional al segmento *c*, si cumple que: $a/c = c/b$; $a \cdot b = c^2$. Por tanto, $c = \sqrt{ab}$.

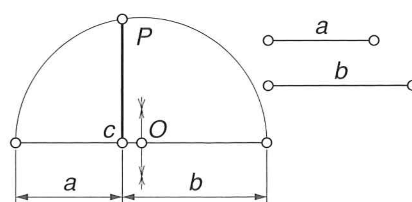
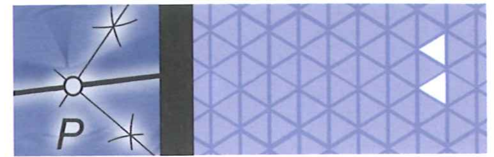


Fig. 2.30. *Media proporcional de dos segmentos.*

1. Se sitúan los segmentos *a* y *b* uno a continuación del otro. Se traza una semicircunferencia con centro en *O*, punto medio de la suma de *a* y *b*, y radio *O* y uno de los extremos del segmento *a* + *b*.

2. Por el punto *C* de contacto de los segmentos *a* y *b*, se traza una perpendicular a éstos que corta a la semicircunferencia en el punto *P*. El valor de *CP* es la magnitud de la media proporcional buscada (Fig. 2.30).



***Raíz cuadrada de un segmento:* $\sqrt{a} = x$**

Se vuelve a tomar un segmento *c* de un centímetro de longitud como unidad, y el segmento *a* dado; se observa que:

$\sqrt{a} = x$; $a = x \cdot x$; $c/x = x/a$. El segmento *x* es la **media proporcional** de los segmentos *a* y *c* (Fig. 2.31).

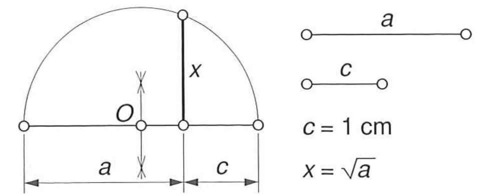


Fig. 2.31. *Raíz cuadrada de un segmento.*

2.5. Ángulos

Un ángulo es la porción de plano determinada por dos semirrectas llamadas lados del ángulo, *a* y *b*, que parten del mismo punto, denominado vértice, *V* (Fig. 2.32).

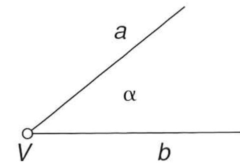


Fig. 2.32. *Elementos de un ángulo.*

Los ángulos suelen designarse con letras griegas (α, β, λ ...) y pueden tener un sentido positivo, *AVB*, o negativo, *BVA*, como puede observarse en la Figura 2.33.

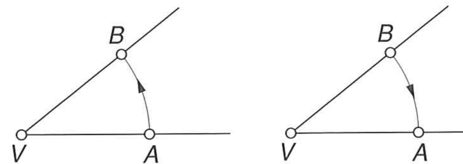


Fig. 2.33. *Sentidos del ángulo.*

Los ángulos se miden en unidades del sistema sexagesimal, es decir, grados (°), minutos (') y segundos ("), como muestra la Figura 2.34. Un grado equivale a sesenta minutos, y un minuto a sesenta segundos. En la figura se puede observar un ejemplo de un ángulo de 46°, 15' y 17". El ángulo más grande es el de 360°, que es aquel que abarca todo el plano.

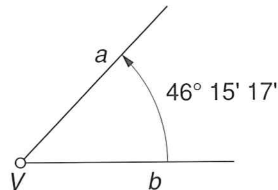


Fig. 2.34. *Expresión del ángulo.*

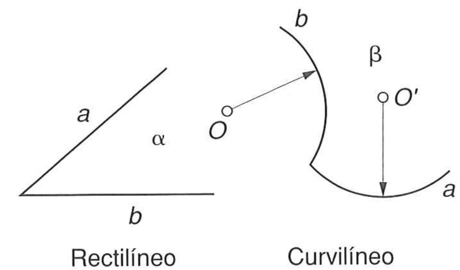


Fig. 2.35. *Ángulo rectilíneo, curvilíneo y mixtilíneo.*

Los ángulos expuestos hasta el momento son denominados **rectilíneos,** es decir, sus lados están formados por rectas. Existen otros dos tipos de ángulos: los **curvilíneos,** formados por arcos de circunferencia, y los **mixtilíneos,** que tienen un lado curvo y el otro recto (Fig. 2.35).

Clasificación de los ángulos

Vamos a establecer una clasificación de los ángulos atendiendo a sus **grados** y **respecto a otros ángulos:**

- **Según los grados,** los ángulos pueden ser (Fig. 2.36):
  - **Agudo:** cuando es menor de 90°.
  - **Recto:** cuando vale 90°.
  - **Obtuso:** cuando es mayor de 90°.
  - **Llano:** cuando vale 180°.

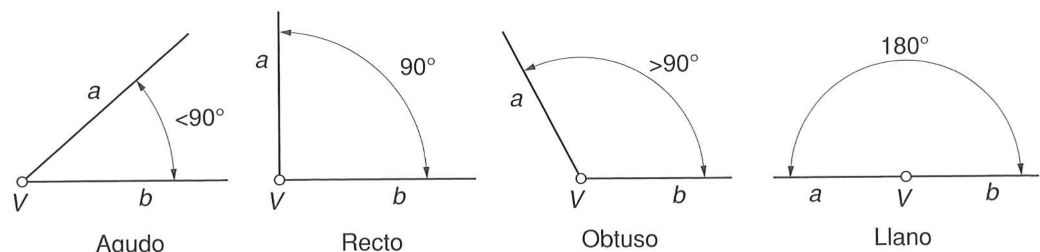


Fig. 2.36. *Clasificación de los ángulos según sus grados.*

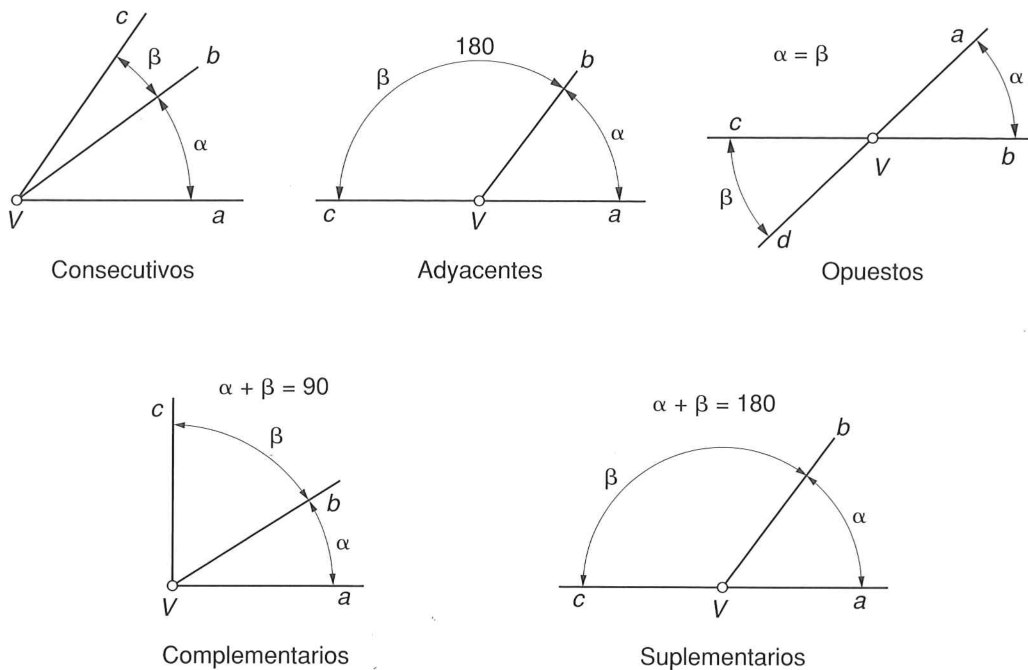


Fig. 2.37. *Clasificación de los ángulos respecto de otros ángulos.*

- **Respecto de otros ángulos**, pueden ser:
  - **Consecutivos:** ángulos que tienen un lado y un vértice comunes.
  - **Adyacentes:** dos ángulos consecutivos cuyos lados exteriores forman un ángulo de 180°.
  - **Opuestos:** ángulos que tienen el vértice común; los lados de uno de los ángulos son la prolongación de los lados del ángulo opuesto, y los ángulos opuestos son siempre iguales.
  - **Complementarios:** dos ángulos cuya suma es de 90°.
  - **Suplementarios:** dos ángulos cuya suma es de 180°.

▶▶▶ Operaciones con ángulos

Además de transportar y medir ángulos, se pueden realizar otras operaciones con ángulos, como son: el trazado de su bisectriz, la suma, la resta y la división de ángulos, entre otros.

Bisectriz de un ángulo

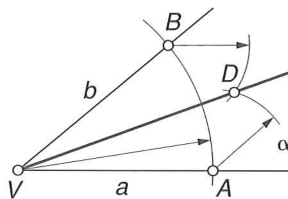


Fig. 2.38. *Bisectriz de un ángulo.*

1. Se parte del ángulo α. Con centro en *V* y una abertura de compás cualquiera, se traza el arco *AB*.
2. Haciendo centro en *A* y en *B* de manera sucesiva y, con una abertura mayor a la mitad de *AB*, se trazan dos arcos que determinan el punto *D*.
3. Uniendo *V* con *D* se dibuja la bisectriz pedida (Fig. 2.38).

Bisectriz de dos rectas que se cortan fuera de los límites del papel

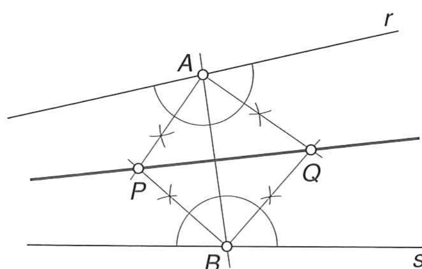
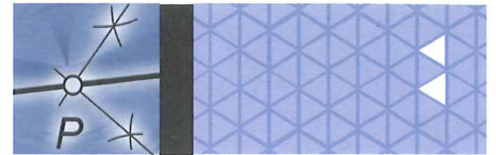


Fig. 2.39. *Bisectriz de dos rectas que se cortan fuera de los límites del papel.*

1. Dadas las rectas *r* y *s*, se toma un punto cualquiera de cada recta (*A* y *B*), y se unen mediante un segmento.
2. Se trazan las bisectrices de los ángulos determinados por el segmento *AB* con las rectas *r* y *s*, obteniendo los puntos *P* y *Q*, que son las intersecciones de las bisectrices.
3. Para obtener la bisectriz pedida se unen los puntos *P* y *Q* (Fig. 2.39).



Bisectriz de un ángulo mixtilíneo

1. Dado el ángulo mixtilíneo α, se traza una recta perpendicular *l* al lado recto del ángulo (α), y se lleva una misma medida varias veces sobre ella, por ejemplo cuatro, obteniendo los puntos 1, 2, 3 y 4. Por dichos puntos se trazan paralelas al lado *a* del ángulo.

2. Se traza un radio *r* cualquiera desde *O* y se prolonga; sobre él, y a partir de *P*, se lleva la misma medida y el mismo número de veces que se llevó sobre la recta *l*, obteniendo así los puntos 1', 2', 3' y 4'.

3. Por dichos puntos se trazan arcos concéntricos desde *O*, que determinan los puntos 1'', 2'', 3'' y 4'' al cortar dichos arcos a las rectas trazadas desde 1, 2, 3 y 4.

4. Uniendo entre sí a mano alzada, o con plantilla, los puntos 1'', 2'', 3'' y 4'', se obtiene la bisectriz del ángulo mixtilíneo (Fig. 2.40).

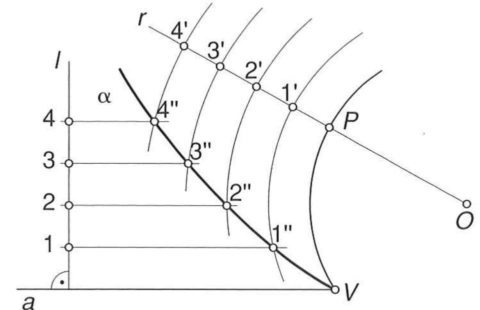


Fig. 2.40. *Bisectriz de un ángulo mixilíneo.*

Bisectriz de un ángulo curvilíneo

El trazado de la bisectriz de este tipo de ángulo se realiza por el mismo procedimiento que para hallar la bisectriz de un ángulo mixtilíneo. Obsérvese en la Figura 2.41 los pasos que se han dado en su construcción.

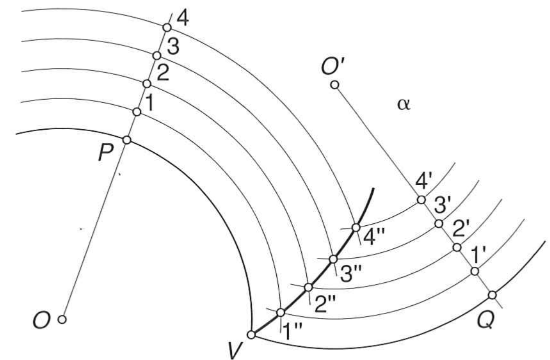


Fig. 2.41. *Bisectriz de un ángulo curvilíneo.*

Construcción de un ángulo igual a otro

1. Se trata de dibujar un ángulo α dado sobre una semirrecta *r* a partir de un punto *A*. Se traza la semirrecta *r* y se hace centro en *A*; con una abertura de compás, por ejemplo *VB*, igual a la del ángulo dado, se traza un arco obteniendo el punto *B'* sobre la semirrecta.

2. Con centro en *B'*, y una abertura de compás *BC*, se traza otro arco que al cortar al anterior determina el punto *C'*.

3. Uniendo *A* y *C'* se obtiene el ángulo deseado (Fig. 2.42).

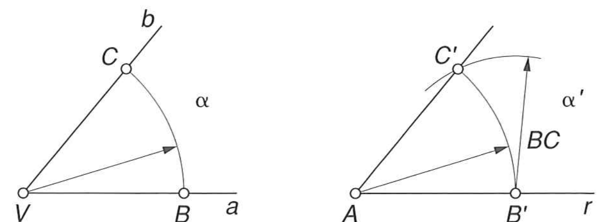


Fig. 2.42. *Construcción de un ángulo igual a otro.*

Suma de ángulos

1. Se trata de sumar el ángulo α al ángulo β sobre una recta *r* a partir de un punto *A* de la misma. Se traza a partir de los vértices de los ángulos α y β un arco de igual radio.

2. Haciendo centro en *A* y con el mismo radio con que se han trazado los arcos anteriormente sobre los ángulos α y β, se realiza otro sobre la semirrecta obteniendo el punto 1 sobre ella.

3. A partir de 1, se toma la abertura del ángulo α (1-2), y se sitúa sobre el arco del ángulo que estamos construyendo, y a continuación la de β, es decir, (3*B*).

4. Se une el vértice *A* con el último punto obtenido *B*; el ángulo *A*1*B* es la suma de los dos ángulos dados (Fig. 2.43).

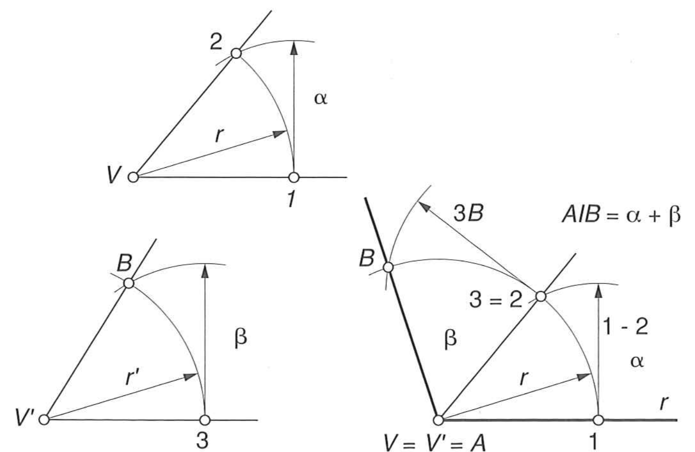


Fig. 2.43. *Suma de ángulos.*



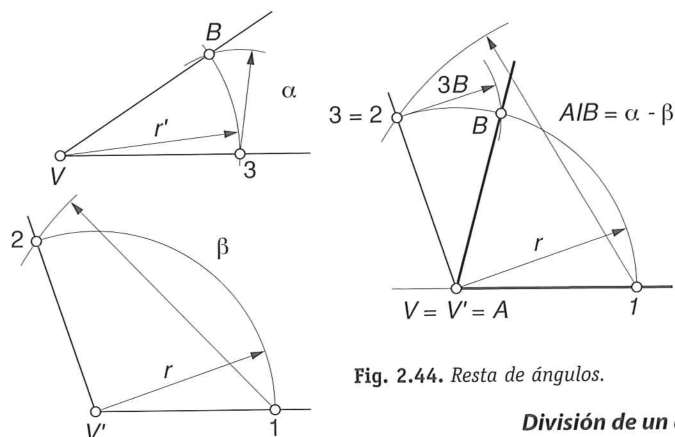


Fig. 2.44. *Resta de ángulos.*

Resta de ángulos

1. Se trata de restar el ángulo α al ángulo β sobre una recta *r* a partir de un punto *A* de la misma. Al igual que en el ejercicio anterior, se traza a partir de los vértices de los ángulos α y β un arco de igual radio.

2. Se dibuja primero el ángulo mayor, β, transportándolo sobre la recta *r* y a partir del punto *A*. Haciendo centro en 2 y con radio 3*B* realizamos un arco que corta al formado por los puntos 1 y 2 en *B*.

3. Se une *A* con *B*, y el ángulo *A*1*B* es la diferencia entre los ángulos α y β (Fig. 2.44).

División de un ángulo en 2, 4, 8 ... partes iguales

Ya se ha visto cómo la bisectriz de un ángulo divide a éste en dos partes iguales. Las bisectrices de cada una de las partes obtenidas divide el ángulo primitivo en cuatro partes iguales; para obtener ocho partes iguales del ángulo, habría que hallar las bisectrices de las cuatro partes anteriores, y así sucesivamente (Fig. 2.45).

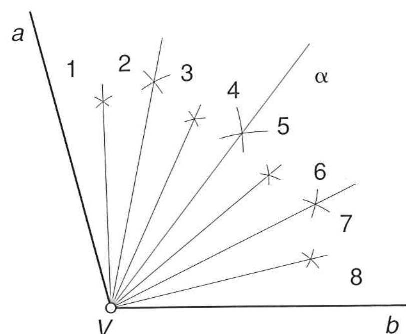


Fig. 2.45. *División de un ángulo en ocho partes.*

División de un ángulo recto en tres partes iguales o trisección

1. Se traza un ángulo recto con la escuadra y el cartabón. Se toma un radio cualquiera y con centro en el vértice *V* se traza un arco que corta a los lados del ángulo en los puntos *A* y *B*.

2. Manteniendo el mismo radio y con centro en *A* y en *B* se trazan dos arcos que al cortar al anterior nos dará los puntos 1 y 2.

3. Uniendo el vértice *V* con 1 y 2 se obtiene la división del ángulo en tres partes iguales (Fig. 2.46).

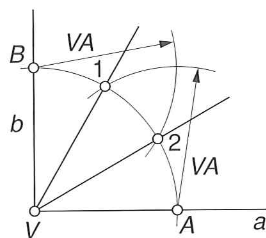


Fig. 2.46. *Trisección de un ángulo.*

▶▶▶ Construcción de ángulos con regla y compás

Obsérvese en la Figura 2.47 cómo se han construido con regla y compás los ángulos de 90°, 45° y 135°; los de 60° y 120; los de 30 y 150; los de 15° y 165°; los de 75° y 105.

El ángulo de 90° se halla trazando una recta *r* perpendicular a otra *s*, desde un punto P de la misma. Para hallar los demás ángulos se procede a determinar siempre el más pequeño; considerando sus suplementarios se obtienen los ángulos de valor mayor.

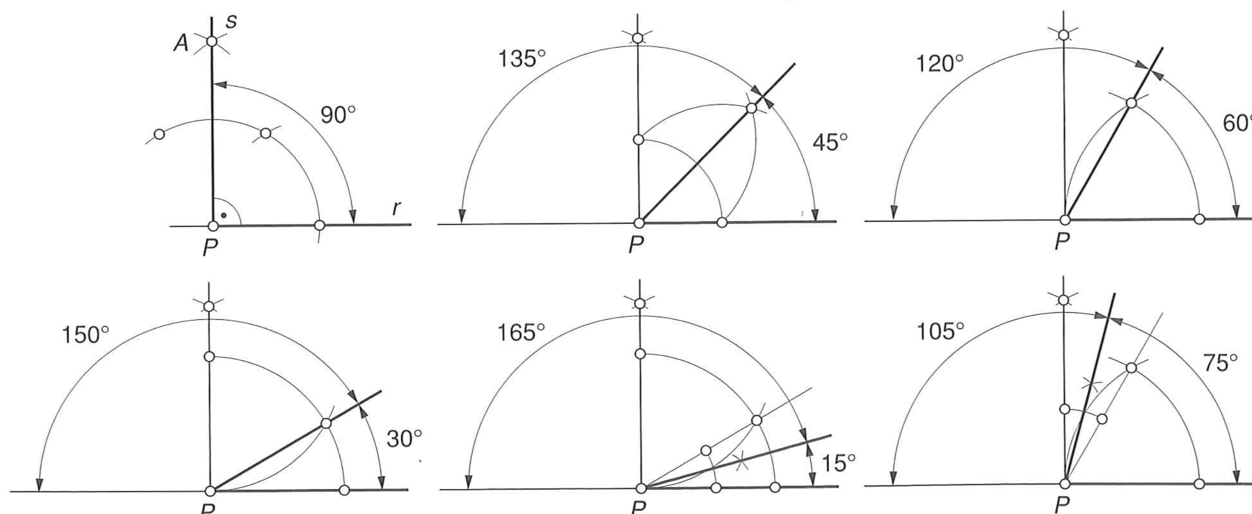
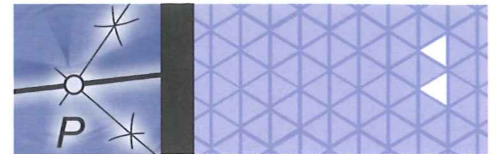


Fig. 2.47. *Construcción de ángulos con regla y compás.*



▶▶▶ Construcción de ángulos con escuadra y cartabón

Conocidas las características de la escuadra y el cartabón se observa que los ángulos que con ellos se pueden construir son los siguientes (Fig. 2.48):

- Con la **escuadra,** los ángulos que pueden determinarse directamente son los de 45°, 90° y 135°.
- Con el **cartabón,** los ángulos que se pueden trazar directamente son los de 30°, 60°, 90°, 120° y 150°.
- Combinando la **escuadra y el cartabón,** los ángulos que se pueden obtener son los de 15°, 75°, 105° y 165°.

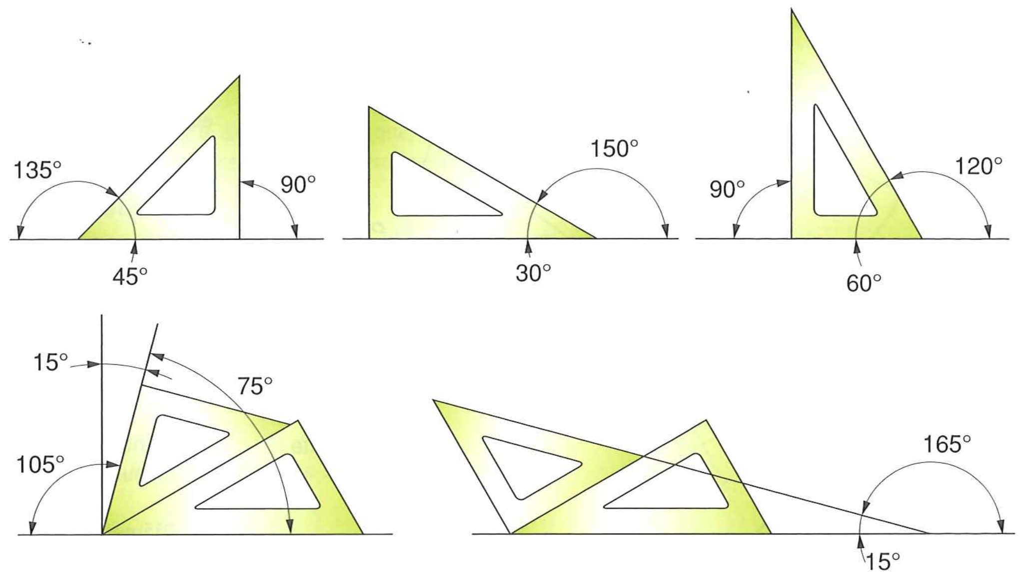


Fig. 2.48. *Construcción de ángulos con escuadra y cartabón.*

▶▶▶ Construcción de un ángulo con el transportador

El transportador se emplea para transportar y medir ángulos. Está dividido en grados sexagesimales y es conocido también como goniómetro o semicírculo de 180°. Para trazar sobre una recta un ángulo determinado se procede de la manera siguiente:

1. En primer lugar, se hace coincidir la recta 0°-180° del transportador con la recta *r*, sobre la que se quiere dibujar el ángulo dado, y el punto *V* sobre el vértice elegido *A*.
2. Después, se hace una señal *P* en el borde graduado, justo con la graduación que se desea; por ejemplo, 58°. Se retira el transportador y, uniendo *A* con *P*, se obtiene el ángulo (Fig. 2.49).

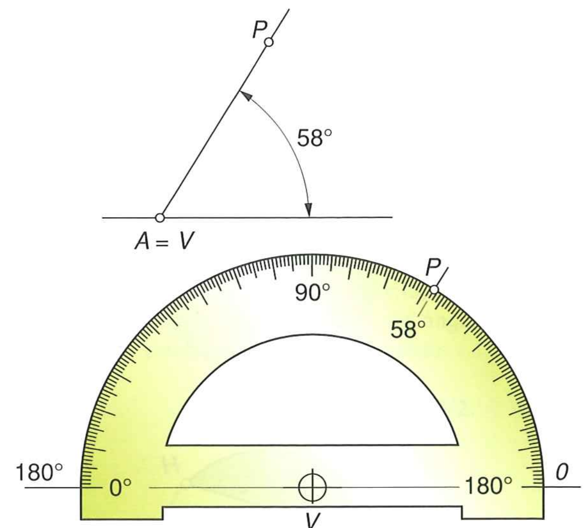


Fig. 2.49. *Construcción de un ángulo con el transportador.*

▶▶▶ Construcción del arco capaz de un segmento

Como es sabido, arco capaz es el lugar geométrico de los puntos sobre los que se observa un segmento dado con un ángulo determinado.

Se parte del presupuesto que se quiere hallar el arco capaz de un ángulo de 60° de un segmento *AB* dado. Su construcción se desarrolla de la manera siguiente:

1. Se traza el segmento *AB* y se dibuja su mediatriz. *A* partir de *A*, y sobre el segmento *AB*, se transporta el ángulo dado, en este caso con el valor de 60°.
2. Se traza una perpendicular al lado hallado del ángulo. El punto, *O*, donde la perpendicular corta a la mediatriz, es el centro del arco capaz buscado.
3. Con centro en *O* y radio *OA*, o *OB*, se traza el arco capaz buscado. Al unir cualquier punto del arco con *A* y con *B* se determina siempre el mismo ángulo, en este caso, de 60° (Fig. 2.50).

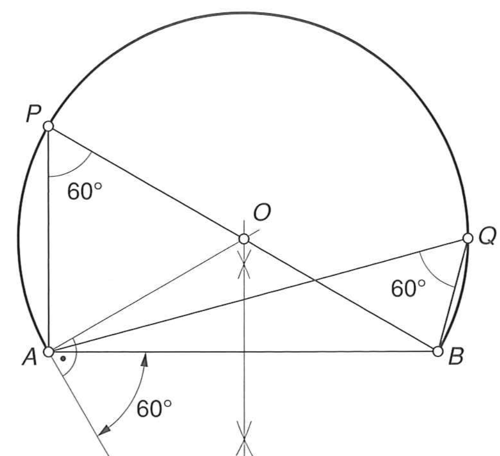


Fig. 2.50. *Construcción de un arco capaz.*

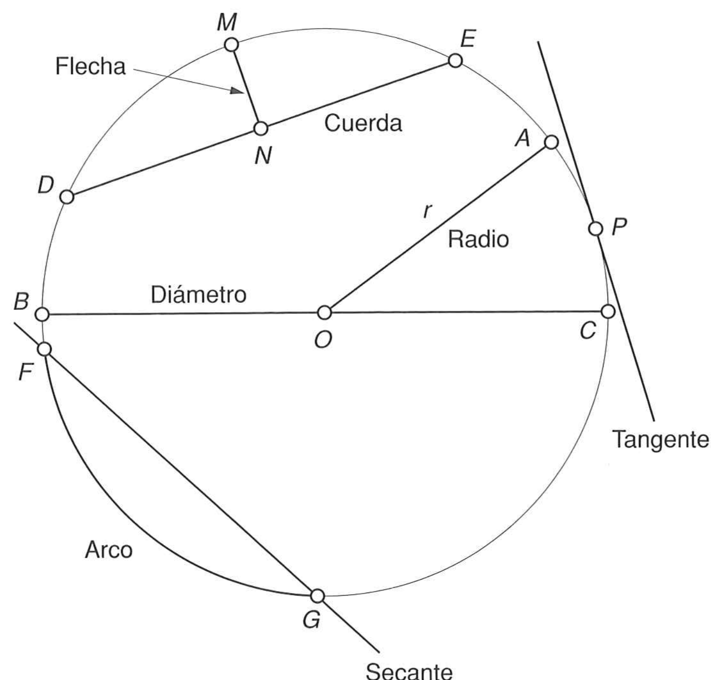


Fig. 2.51. *Elementos de la circunferencia y del círculo.*

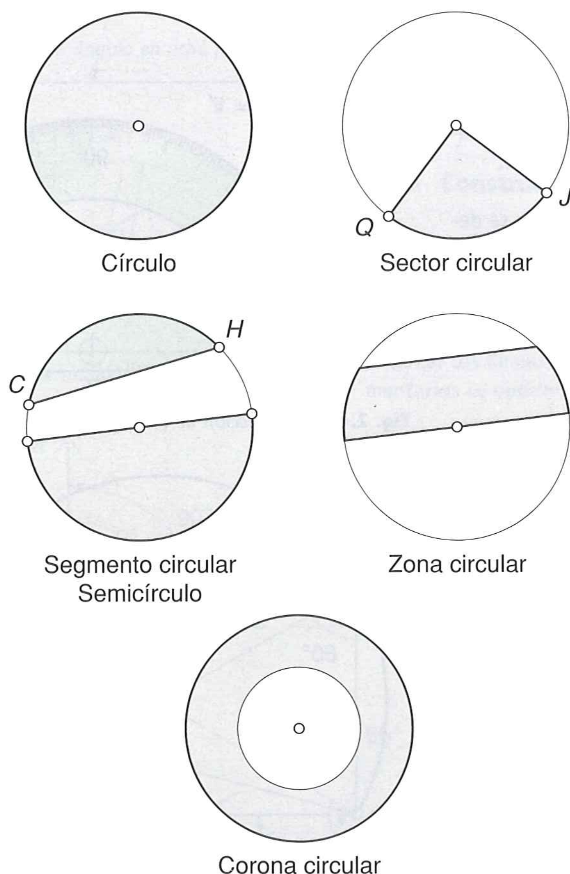


Fig. 2.52.

2.6. La circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro denominado centro.

Elementos de la circunferencia y del círculo

Los elementos de la circunferencia más significativos son los siguientes (Fig. 2.51):

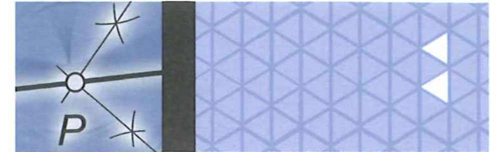
- **Centro (*O*):** Es el punto del que equidistan los puntos que forman la circunferencia.
- **Radio (*r*):** es el segmento que une el centro (*O*) de la circunferencia y un punto cualquiera de ella (*OA*).
- **Diámetro (d):** son todas las rectas que pasan por el centro de la circunferencia y la cortan en dos puntos (*BC*). Por ello, el diámetro tiene doble longitud que el radio.
- **Cuerda (*c*):** es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia (*D* y *E*).
- **Arco (*A*):** es el fragmento de circunferencia comprendido entre dos puntos de ella; por ejemplo, la distancia *FG*.
- **Flecha (*F*):** es el segmento de la mediatriz de una cuerda que queda entre la circunferencia y la cuerda (*MN*).
- **Secante (*S*):** es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos (*F* y *G*).
- **Tangente (*T*):** es la recta que toca a la circunferencia en un solo punto (*P*), llamado punto de tangencia.

El círculo

Es la superficie plana limitada por una circunferencia (Fig. 2.52).

Elementos del círculo (Fig. 2.52)

- **Segmento circular:** es la superficie comprendida entre un arco y su cuerda, *CH*. Si en vez de una cuerda es un diámetro a la superficie, se la denomina **semicírculo.**
- **Sector circular:** es la superficie comprendida entre dos radios y el arco que pasa por sus extremos, *Q* y *J*.
- **Zona circular:** es la parte de círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas y los arcos comprendidos entre ellas.
- **Corona circular:** es la superficie limitada entre la circunferencia y otra concéntrica.



▶▶▶ Construcción de la circunferencia

Circunferencia de radio conocido que pasa por dos puntos

1. Se toma con el compás el radio *r* dado. Con centro en los puntos *A* y *B*, se trazan arcos que, al cortarse, determinarán el punto *O*, que es el centro de la circunferencia que se pretende determinar (Fig. 2.53).

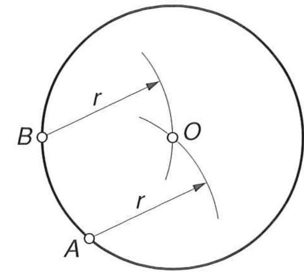


Fig. 2.53. *Circunferencia que pasa por dos puntos.*

Circunferencia que pasa por tres puntos no alineados

1. Se parte de los puntos *A*, *B* y *C*. Se unen los puntos *A* con *B* y *B* con *C*, y se trazan mediatrices a los segmentos *AB* y *BC*, que se cortan en *O*.

2. Con centro en *O*, y radio *OA*, *OB* u *OC* se traza la circunferencia que contiene a los puntos dados (Fig. 2.54).

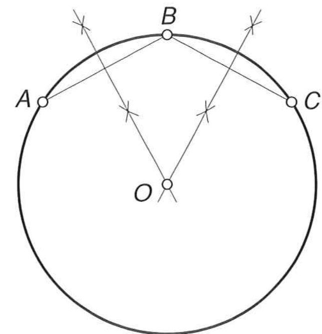


Fig. 2.54. *Circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.*

▶▶ A. Ángulos en la circunferencia

Hay distintos tipos de ángulos relacionados con la circunferencia; según la posición del vértice y los lados, se consideran los siguientes:

- **Ángulo central:** se denomina con este nombre al ángulo que tiene situado su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios de la misma (Fig. 2.55).

  Para conocer el valor del ángulo se efectúa la siguiente operación:

  $\alpha/AB = 360°/2\pi r$; $\alpha = \boldsymbol{AB \cdot 360°/2\pi r}$

- **Ángulo inscrito:** es el ángulo que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y sus lados son interiores a ésta (Fig. 2.56). Su valor es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco: $\alpha = 1/2\ \beta$. Para verificar esta igualdad se efectúan las siguientes operaciones:

  $\Omega = 180° - 2\alpha$; $\Omega = 180° - \beta$; $180° - 2\alpha = 180° - \beta$; $2\alpha = \beta$; $\alpha = \beta/2$; $\boldsymbol{\alpha = AOB/2}$.

- **Ángulo semiinscrito:** es el ángulo en que uno de sus lados es tangente a la circunferencia (Fig. 2.57). Si se observa, es el caso límite de un ángulo inscrito; por tanto, su valor es igual a la mitad del ángulo central correspondiente al mismo arco:

  $2\alpha = \beta$; $\alpha = \beta/2$. $\boldsymbol{\alpha = AOB/2}$.

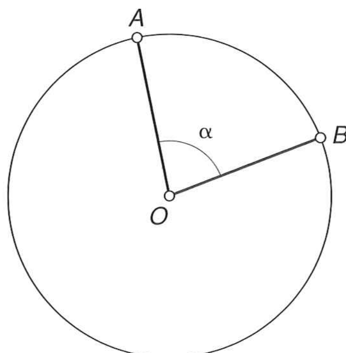


Fig. 2.55. *Ángulo central.*

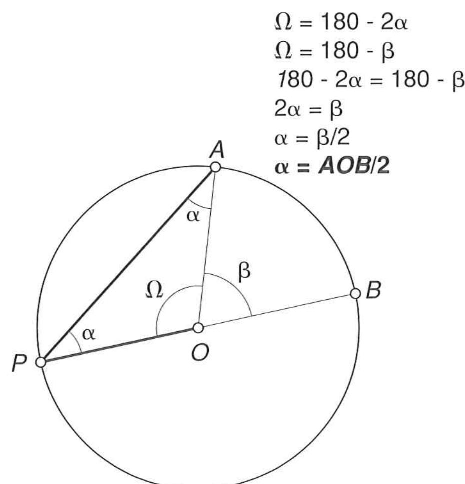


Fig. 2.56. *Ángulo inscrito.*

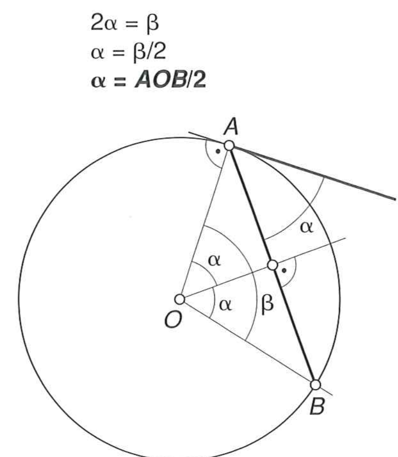
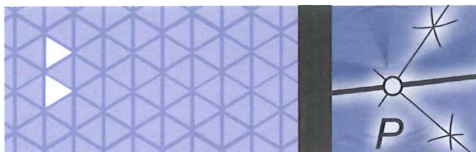


Fig. 2.57. *Ángulo semiinscrito.*



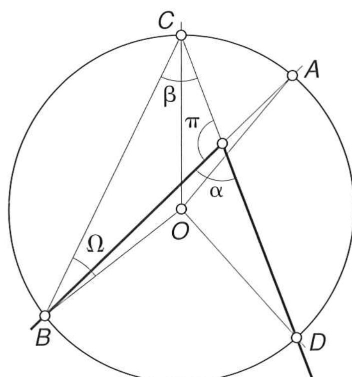


Fig. 2.58. *Ángulo interior.*

- **Ángulo interior:** es el ángulo cuyo vértice está situado en el interior de la circunferencia; lógicamente, exceptuando el centro de la misma (Fig. 2.58). El valor de este ángulo es igual a la semisuma de los arcos centrales interceptados por él, y al de su opuesto por el vértice. Es decir:

$\beta + \pi + \Omega = 180$; $\alpha + \pi = 180°$; el valor de α se obtiene de estas dos ecuaciones:
$\beta + \pi + \Omega = \alpha + \pi$; $\alpha = \beta + \Omega$

El valor del ángulo β es la mitad de su ángulo central *BOD,* por ser un ángulo inscrito; lo mismo sucede con el ángulo Ω, cuyo ángulo central es *COA*. Por tanto: α **= *(BOD)* + *(COA)*/2**

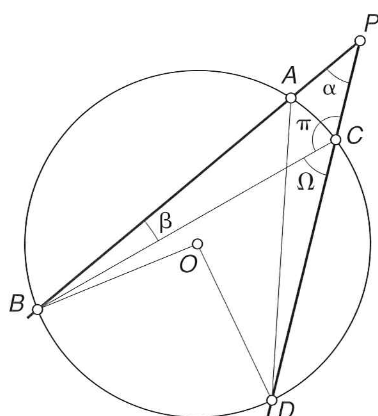


Fig. 2.59. *Ángulo exterior.*

- **Ángulo exterior:** es el ángulo cuyo vértice es exterior a la circunferencia y los lados del ángulo son secantes a la misma (Fig. 2.59). El valor de este ángulo es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados. Es decir:

$\beta + \pi + \alpha = 180°$; $\Omega + \pi = 180°$; al igualar las dos ecuaciones se determina
el valor del ángulo exterior, $\beta + \pi + \alpha = \Omega + \pi$; $\beta + \alpha = \Omega$; $\alpha = \Omega - \beta$

Por tanto, los ángulos Ω y β son ángulos inscritos en la circunferencia y tiene relación con sus ángulos centrales por medio de la ecuación:

α **= *(BOD)* – *(AOC)*/2**

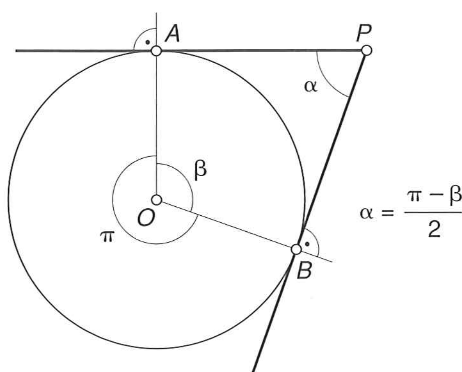


Fig. 2.60. *Ángulo circunscrito.*

- **Ángulo circunscrito:** Es un caso límite del ángulo exterior, los lados del ángulo circunscrito son tangentes a la circunferencia en vez de secantes (Fig. 2.60). Su valor sigue siendo igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados. Es decir:

$$\alpha = \pi - \beta/2$$

B. Rectificación de la circunferencia

Se denomina rectificación a determinar sobre una recta, mediante un procedimiento gráfico, la longitud de una curva, arco, o circunferencia.

Como es sabido la longitud de una circunferencia es $2\pi r$; su representación gráfica es aproximada, dado que la función π (3, 14 16 ...) es infinita y, por tanto, constituye una imposibilidad para poder operar con regla y compás.



▶▶▶ Rectificación de la circunferencia (método de Specht)

1. Se dibuja la circunferencia de centro *O* y radio *r*, y se traza un diámetro *AB*. En el extremo *B*, por ejemplo, se traza una recta *s* perpendicular al mismo. Se divide el radio *OA* en cinco partes iguales.

2. Sobre *r* se lleva, a partir del punto *B*, el diámetro de la circunferencia, determinando el punto *C*. Se toman tres partes del radio dividido y se sitúan a continuación de *C*, obteniendo de este modo el punto 3, que se une con *O* centro de la circunferencia.

3. Sobre el diámetro y a partir del punto *A* se lleva una parte del radio dividido, determinando el punto *E*.

4. Se traza por *E* una recta paralela al segmento *O3* que, al cortar la recta *s*, determina el punto *P*. La rectificación de la circunferencia es, aproximadamente, el segmento *BP* (Fig. 2.61).

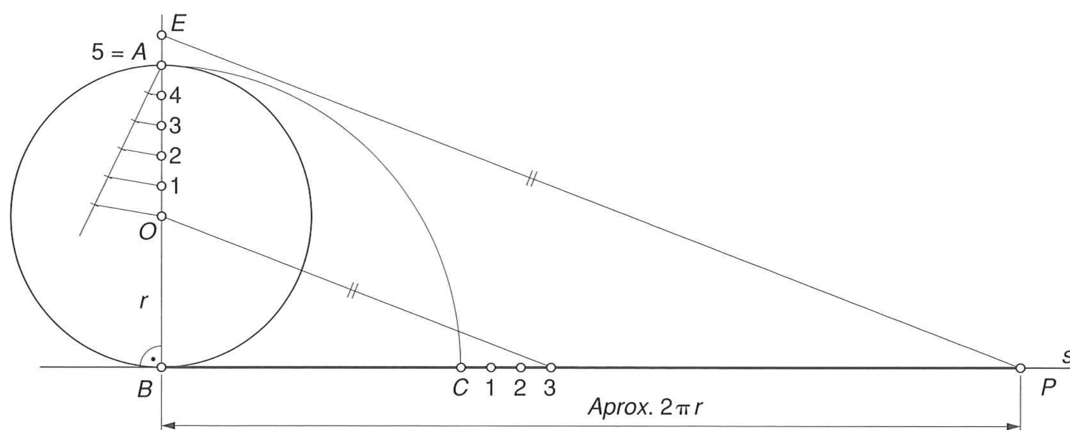


Fig. 2.61. *Rectificación por el método Specht.*

▶▶▶ Rectificación de la circunferencia (método de Arquímedes)

1. Sobre una recta cualquiera *r* se lleva, de manera consecutiva, a partir de un punto *A*, tres diámetros de la circunferencia que se desea rectificar.

2. Se divide el diámetro de la circunferencia en siete partes iguales, se toma una y se suma al segmento que contiene los tres diámetros. La longitud de los tres diámetros más 1/7 es la rectificación de la circunferencia dada (Fig. 2.62).

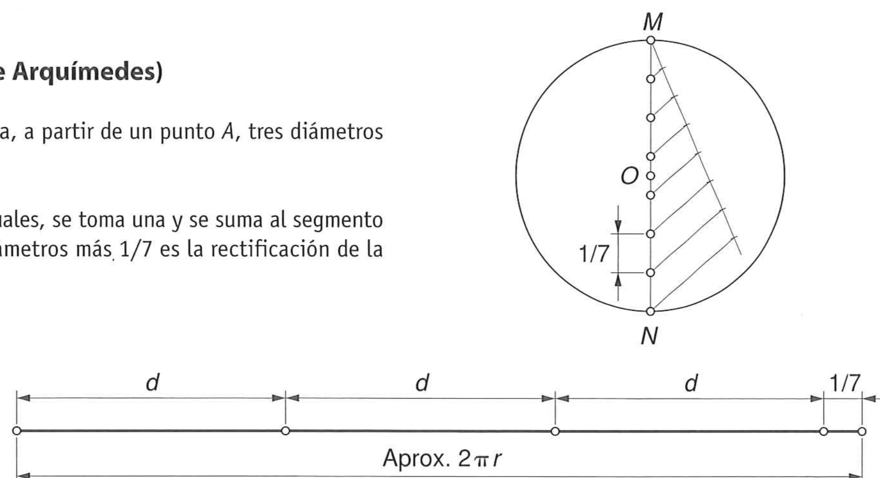


Fig. 2.62. *Rectificación por el método de Arquímedes.*

▶▶▶ Rectificación de la semicircunferencia (método Kochansky)

1. Se dibuja la circunferencia de centro *O* y radio *r*, y se traza un diámetro *AB*. En el extremo *B* se traza una recta *r* tangente al mismo.

2. A partir de *O* y sobre el radio *OB*, se dibuja un ángulo de 30° y, desde el punto *M* de intersección del lado del ángulo con la tangente trazada anteriormente, se lleva sobre ella, de manera consecutiva, tres veces el radio, obteniendo el punto *N*.

3. Uniendo *A* con *N* se obtiene la rectificación de la semicircunferencia trazada.

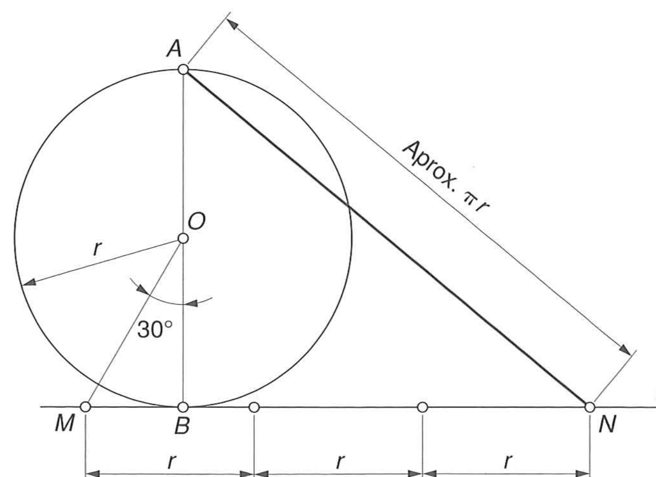


Fig. 2.63. *Rectificación de la semicircunferencia.*



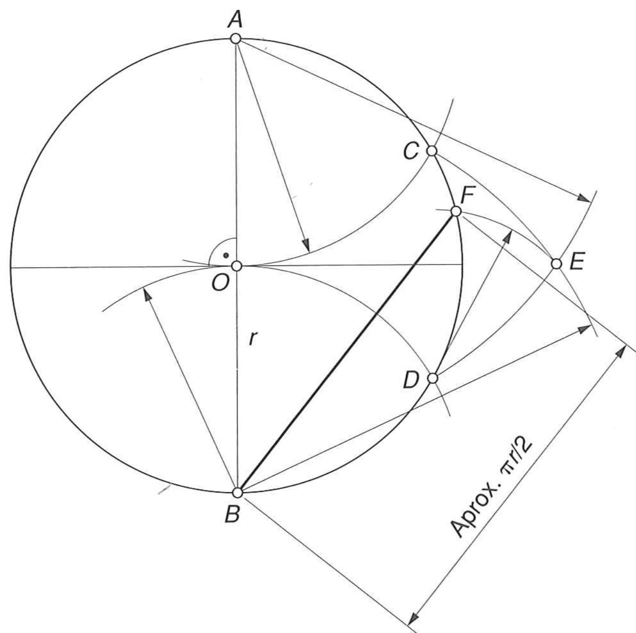


Fig. 2.64. *Rectificación de un cuadrante.*

▶▶▶ Rectificación de un cuadrante. Arco de 90° (método Macheroni)

1. Se dibuja la circunferencia de centro *O* y radio *r*, y se traza un diámetro *AB*. Con centro en *A* y *B*, sucesivamente, y radio *OA*, se trazan arcos que determinan los puntos *C* y *D* sobre la circunferencia.

2. Se hace centro de nuevo en *A* y *B*, y radio *AD*, sucesivamente, se trazan los arcos que determinan el punto *E*. Con centro en *D* y radio *DE*, se traza un arco que corta a la circunferencia en el punto *F*.

3. Se une *F* con *B*, y se obtiene el segmento *BF* que es la magnitud de la rectificación del arco de 90° (Fig. 2.64).

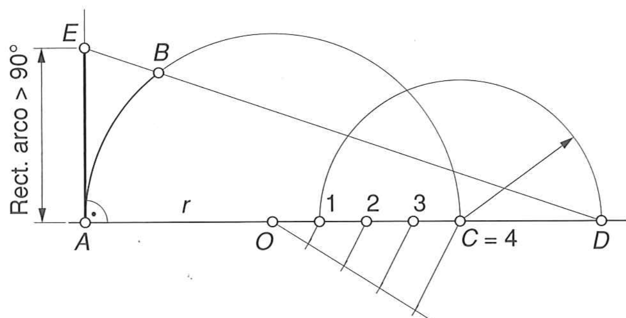


Fig. 2.65. *Rectificación de un arco menor de 90°.*

▶▶▶ Rectificación de un arco menor de 90°

1. Se parte del arco *AB* de la circunferencia de centro *O* y radio *r*. Se dibuja un diámetro *AC*, y se divide el radio *OC* en cuatro partes iguales prolongándolo a partir de *C*.

2. A partir de *C* se llevan 3/4 del radio sobre su prolongación, obteniéndose el punto *D*. Se traza en el punto *A* una perpendicular.

3. Se une *D* con *B* hasta cortar a la perpendicular en el punto *E*. El segmento *AE* es la rectificación del arco *AB* (Fig. 2.65).

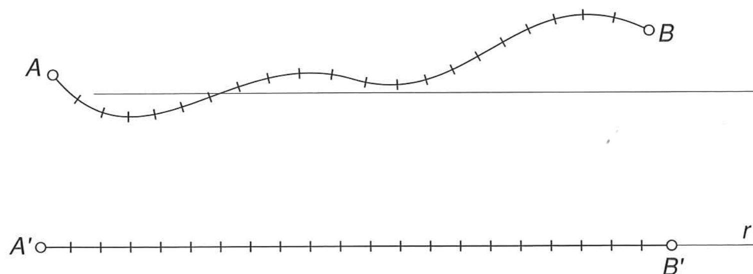


Fig. 2.66. *Rectificación aproximada de una línea curva.*

▶▶▶ Rectificación aproximada de una línea curva

1. Dada la curva *AB*, ésta se gradúa; es decir, se marcan sobre ella pequeñas distancias iguales entre sí con el compás.

2. A continuación, se traza una semirrecta sobre la que se transportan las distancias, de manera consecutiva. Una vez terminado este proceso el segmento *A'B'* obtenido es la rectificación de la curva *AB* (Fig. 2.66).

Es conveniente precisar que este procedimiento siempre tiene error, dado que las magnitudes que se toman son las cuerdas de los arcos y no la longitud de éstos.



Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se entiende por razón entre dos segmentos? ¿Y proporción?
2. Comenta qué es proporción directa y qué proporción inversa.
3. Explica por escrito y gráficamente el teorema de Tales.
4. Dados tres segmentos a, b y c, si se cumple que $a/b = c/d$, el segmento d ¿qué es, respecto de los otros tres?
5. El producto de dos segmentos $a \cdot b = x$; el segmento x ¿qué es, respecto de a y de b?
6. Explica por escrito y gráficamente qué es la tercera proporcional de dos segmentos.
7. Dados los segmentos a y b, se denomina media proporcional al segmento c, si cumple que $a/c = c/b$. Explica gráficamente esta igualdad.
8. ¿Qué es un ángulo? ¿Qué es una recta bisectriz?
9. ¿Cómo se denomina al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro?
10. Comenta los siguientes ángulos en la circunferencia:
    - Ángulo central.
    - Ángulo inscrito.
    - Ángulo exterior.
11. ¿Qué se entiende en geometría por rectificación?

Ejercicios

1. Divide un segmento de 130 mm en siete partes iguales.
2. Divide un segmento de 117 mm en partes proporcionales a los siguientes: a = 32 mm; b = 17 mm; c = 41 mm; d = 9 mm.
3. Dado el segmento AB, traza una perpendicular en su extremo B, aplicando el concepto de arco capaz.
4. Halla el producto $a \cdot b = x$, sabiendo que los segmentos tienen los valores siguientes: a = 30 mm y b = 42 mm.
5. Halla el segmento c tercero proporcional a otros dos, a = 34 mm y b = 40 mm.
6. Traza la bisectriz de dos rectas concurrentes que no se cortan en los límites del papel.
7. Sin utilizar el trasportador de ángulos, suma a un ángulo de 120° otro de 30°, y al resultado réstale un ángulo de 75°. Desarrolla el ejercicio aplicando la construcción de un ángulo igual a otro.
8. Divide un ángulo recto en tres partes iguales.
9. Construye el arco capaz de 135° para el segmento a = 73 mm.
10. Dibuja un triángulo isósceles sabiendo que su lado mayor mide 66 mm, y el ángulo opuesto a dicho lado tiene un valor de 75°.
11. Rectifica las siguientes curvas:
    - Circunferencia de 35 mm de radio, por el método de Specht.
    - Semicircunferencia de 30 mm de radio.
    - Arco de 90° de 32 mm de radio.
12. Dada la circunferencia de centro O y una cuerda r, traza otra s que forme con la primera un ángulo inscrito de 30° (Fig. 2.67).

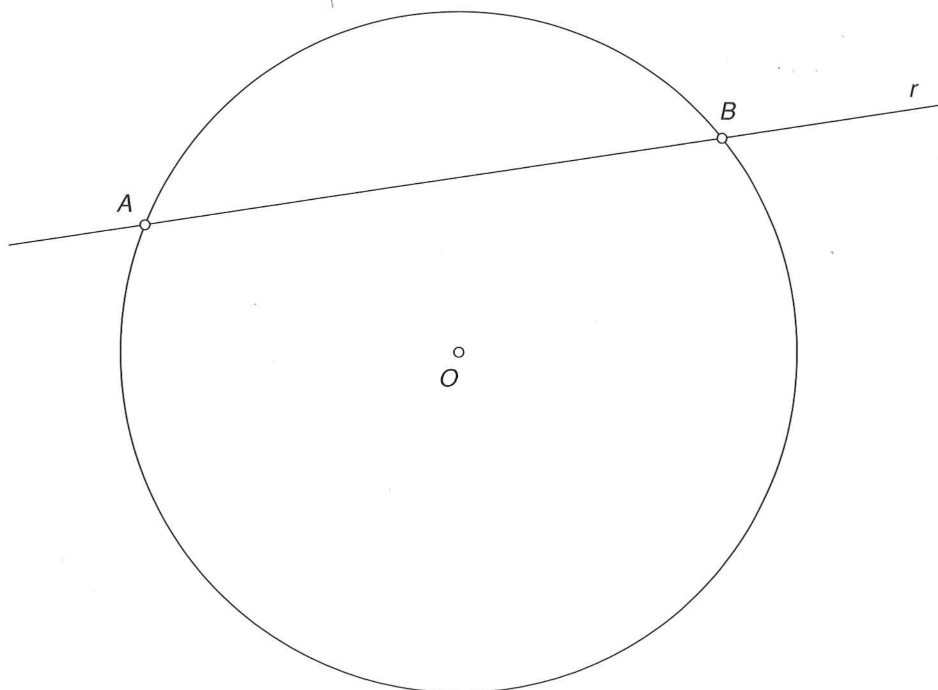
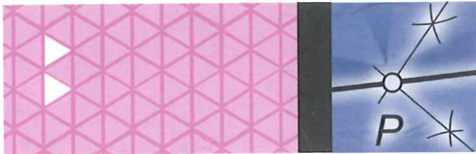


Fig. 2.67. *Ejercicio 12, enunciado.*



13. Dado el punto *P* de una *r* a la circunferencia dada, traza una recta *s* que forme con ella un ángulo exterior de 30° (Fig. 2.68).

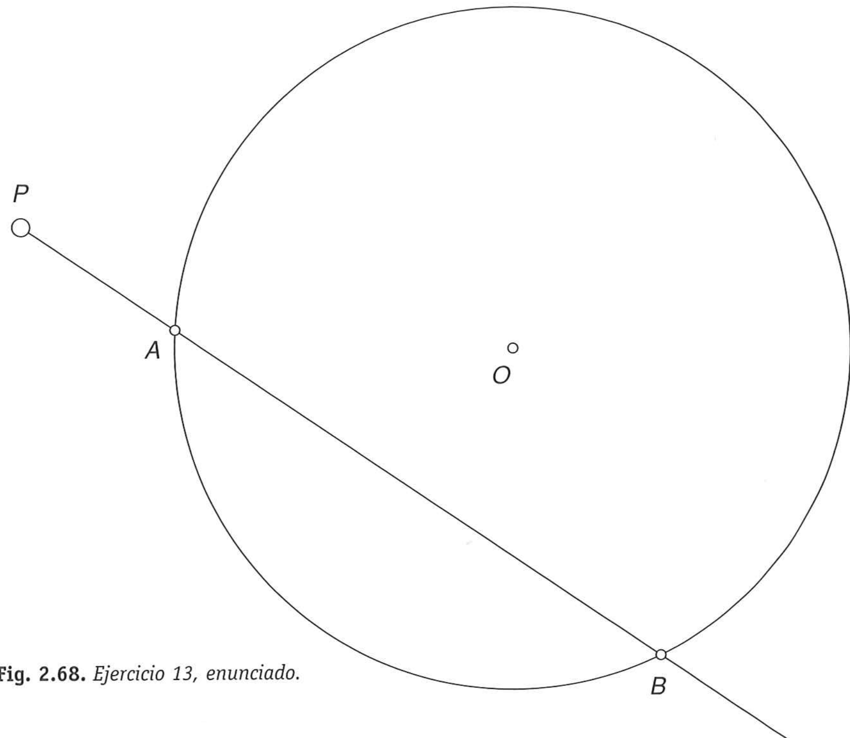
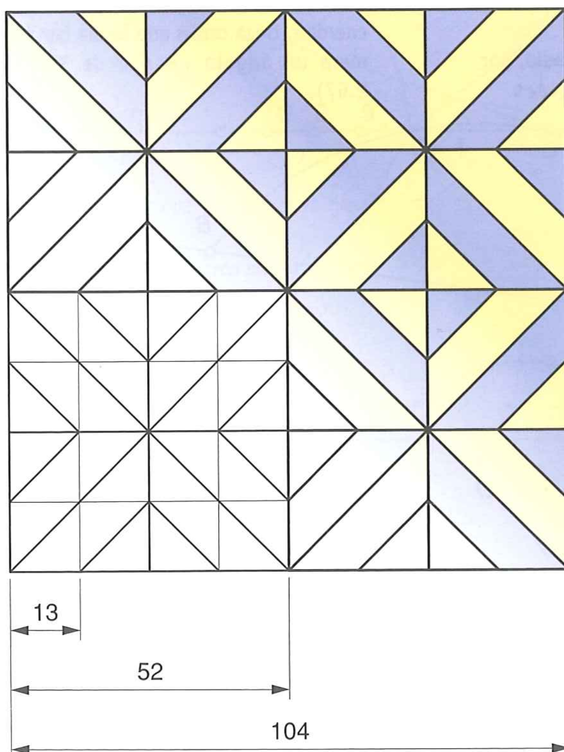


Fig. 2.68. *Ejercicio 13, enunciado.*

14. Realiza las figuras dadas (Fig. 2.69) a escala *E* = 1/2, sabiendo que las medidas están en milímetros.



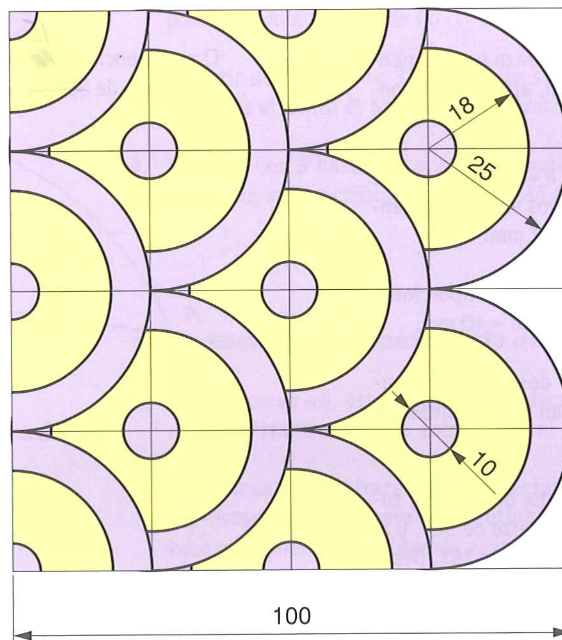
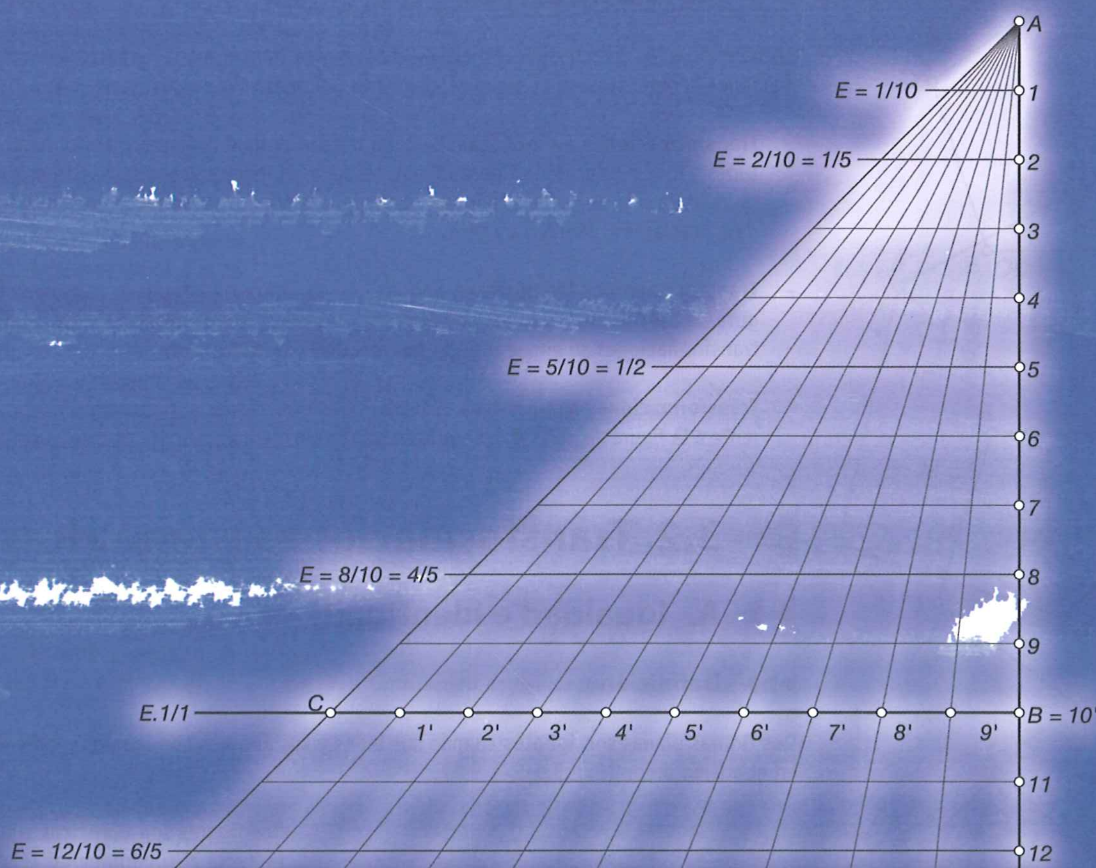


Fig. 2.69. *Ejercicio 14, figuras de modelo.*

03

Transformaciones geométricas en el plano



La idea que se tiene habitualmente de las posiciones relativas de las figuras en el plano se fundamentan en una sucesión de posiciones, como si éstas fuesen fotos fijas que unidas una tras otra generasen un movimiento. El paso de una posición a otra se realiza geométricamente por medio de lo que se denomina una transformación.

Como las transformaciones pueden producirse de manera sucesiva y diferente, este artificio posibilita solucionar problemas que de otra forma se complicarían en exceso.

Las transformaciones geométricas elementales son las que se desarrollan en este capítulo, y éstas son las isométricas, las isomórficas y las anamórficas.

3.1. Transformaciones geométricas en el plano

Se define una **transformación geométrica** como la operación que posibilita obtener una figura nueva a partir de otra dada. Por medio de esta transformación se establece una serie de correspondencias entre elementos (puntos, rectas) o figuras.

Con el nombre de **movimientos** se denominan las transformaciones geométricas que conservan la forma y el tamaño de la figura inicial.

En una transformación geométrica se denominan **elementos dobles** o **invariantes** a los que al aplicarles la transformación siguen situados en el mismo lugar geométrico, es decir, se transforman en sí mismos.

A. Clasificación

Atendiendo a las características métricas de la figura transformada respecto a la originaria, las transformaciones geométricas en el plano se clasifican del modo siguiente:

- **Transformaciones isométricas.** Se caracterizan porque la figura transformada conserva las magnitudes y los ángulos de la figura inicial; es decir, el resultado final de la transformación es una figura idéntica a la de partida. Forman parte de las transformaciones isométricas las siguientes: **igualdad, traslación, simetría** y **giro.**

- **Transformaciones isomórficas.** Son las que su figura transformada conserva sólo la forma de la figura de partida, los ángulos son iguales y las magnitudes proporcionales. Dentro de este tipo de transformaciones se encuentran la **homotecia,** y la **semejanza.**

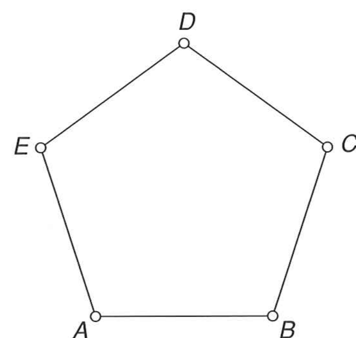
- **Transformaciones anamórficas.** En estas transformaciones la figura transformada es totalmente diferente a la figura de partida. La **equivalencia** es un ejemplo de este tipo de transformación geométrica.

3.2. Transformaciones isométricas

A. Igualdad e identidad

Definición

Dos figuras planas son **iguales** cuando sus lados y sus ángulos son iguales y, además, están dispuestos en el mismo orden (Fig. 3.1).



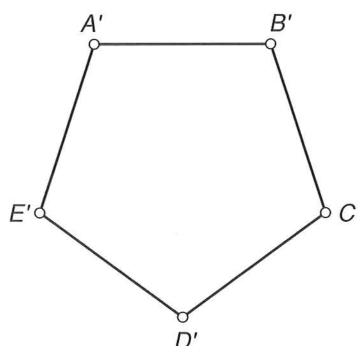


Fig. 3.1. *Figuras iguales.*

Dos figuras son **idénticas** cuando coinciden exactamente al superponerlas (Fig. 3.2). Para expresar que dos figuras K y K' son iguales se representa como $K = K'$; y la identidad entre dos figuras Q y Q', como $Q \equiv Q'$.

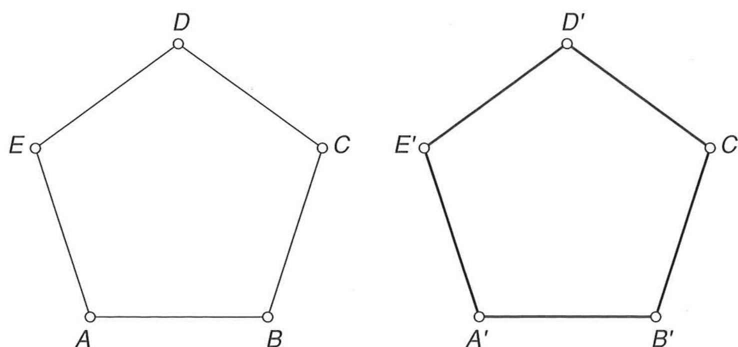
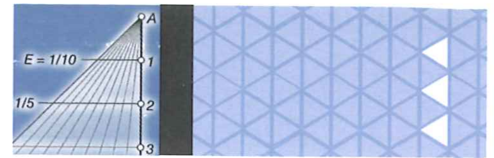


Fig. 3.2. *Figuras idénticas.*



Todas las figuras idénticas son iguales; sin embargo, no todas las figuras iguales son idénticas. Por ejemplo, en la simetría axial la figura transformada que se obtiene está formada por los mismos lados y ángulos, y en el mismo orden que la inicial; pero no pueden superponerse (Fig. 3.3). Por tanto, son dos figuras iguales pero no idénticas.

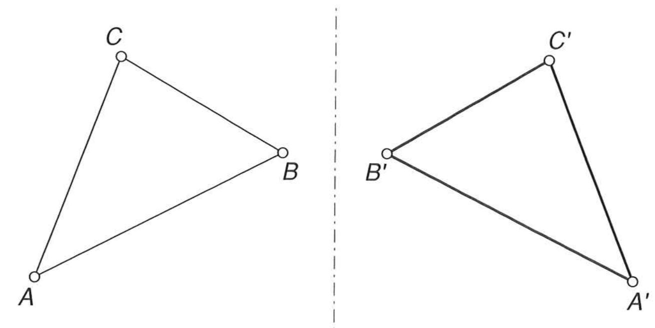


Fig. 3.3. *Simetría axial.*

Construcción de figuras planas iguales

Existen diferentes procedimientos para construir una figura igual a otra, a continuación se presentan algunos de ellos.

Por radiación

1. Se toma un punto interior *O* de la figura inicial dada *ABCDE*, y se trazan todos los segmentos que unen *O* con los vértices del polígono.

   Con centro en *O* y un radio cualquiera se dibuja una circunferencia que corta a los anteriores segmentos en los puntos *M, N, J, P, Q*.

2. Se toma un punto O_1' y se realiza una circunferencia con el mismo radio que la trazada en la anterior figura inicial. A partir de O_1' se traza una recta *r* paralela a cualquier segmento, por ejemplo *EO*, que corta a la circunferencia en *Q'*.

3. A partir de *Q'*, y sobre la recta *r*, se comienzan a transportar todos los ángulos centrales de la figura inicial prolongándolos, definiendo así, los puntos *M', N', J'* y *P'*.

4. Por último, con centro en O_1' y radios *OA, OB, OC, OD* y *OE* se describen arcos que cortan a las prolongaciones trazadas en los puntos *A', B', C', D'* y *E'*, uniendo estos puntos se obtiene la figura igual a la dada (Fig. 3.4).

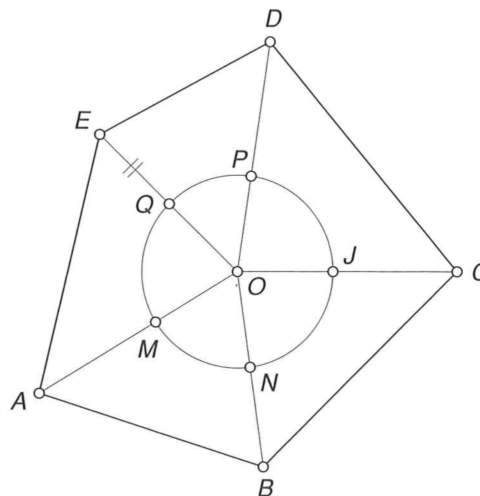


Fig. 3.4. *Construcción de figuras iguales por radiación.*

Por triangulación

1. Partiendo del vértice *A* se divide el polígono dado *ABCDE* en los triángulos *ABC, ACD* y *ADE*.

2. Se traza una recta *r* paralela, por ejemplo a *AB*, y sobre ella se sitúa el segmento *A'B'* igual a *AB*, que se tomará de base para construir los triángulos *A'B'C', A'C'D'* y *A'D'E'*; obteniendo de este modo los vértices *C', D'* y *E'*.

3. Para terminar de construir la figura igual a la de partida, sólo hay que unir los vértices obtenidos con *A'* y *B'* (Fig. 3.5).

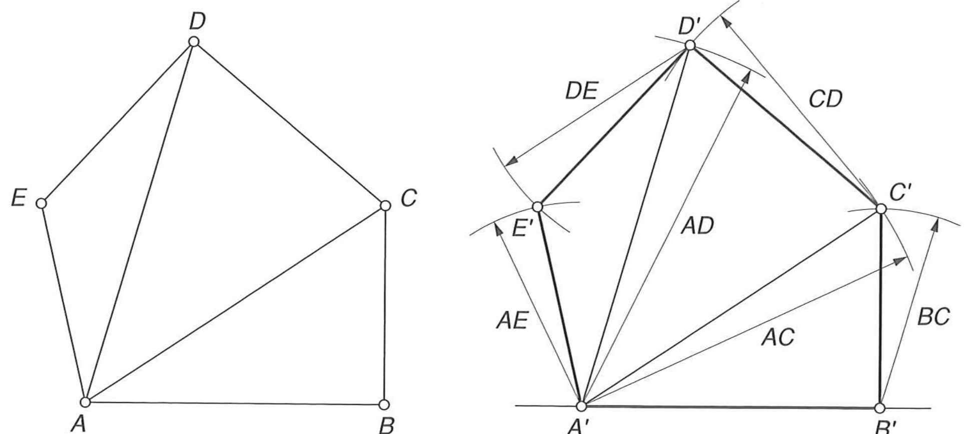
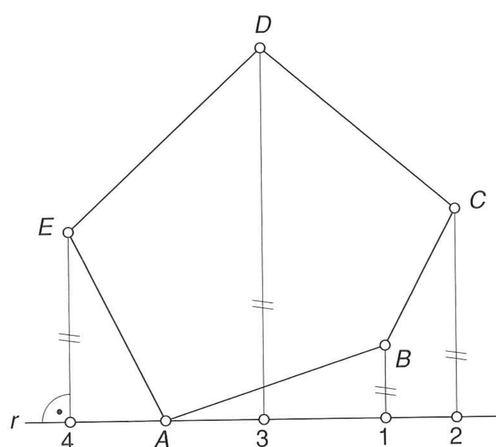


Fig. 3.5. *Construcción de figuras iguales por triangulación.*



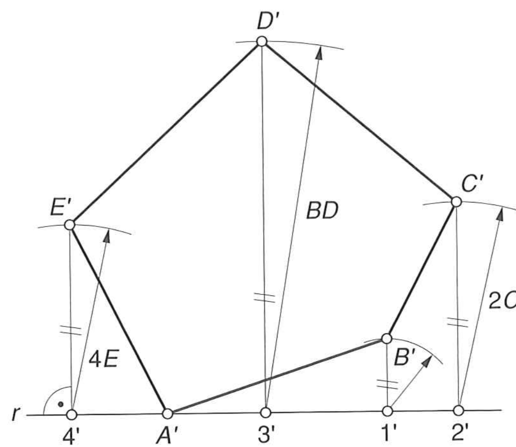


Fig. 3.6. *Construcción de figuras iguales por perpendiculares.*

Por perpendiculares

1. Se traza una recta *r* horizontal que pase por alguno de los vértices, por ejemplo *A*, de la figura dada; por todos los vértices: *B, C, D, ...,* se trazan rectas perpendiculares a la recta horizontal, con lo que se obtienen los puntos 1, 2, 3, etcétera.

2. Sobre otra recta horizontal, paralela a la anterior, se sitúa el punto *A'* y, a partir de este punto, se llevan las diferentes medidas de él respecto a los puntos 1', 2', 3', etc., y se trazan perpendiculares a dicha recta.

3. Se miden las distancias *B*1, *C*2, *D*3 ..., y se trasladan una a una a partir de los puntos 1', 2', 3'..., obteniendo los puntos *B', C', D', ...*; se completa la figura uniendo dichos puntos (Fig. 3.6).

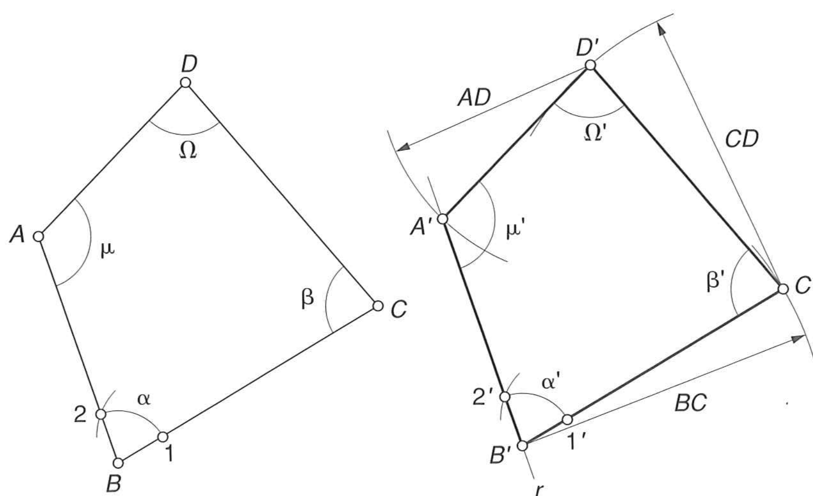


Fig. 3.7. *Construcción de figuras iguales por traslado de ángulos.*

Por traslado de ángulos

1. Se traza una recta *r* paralela a uno de los lados de la figura dada, por ejemplo al lado *AB*, y sobre ella se traza el segmento *A'B'*, igual al lado *AB* de la figura de partida.

2. Desde *B'* se trasladan de manera sucesiva los ángulos y los lados de la figura dada, determinando de este modo los puntos *C', D'* y *E'*.

3. Para terminar de construir la figura inicial, sólo hay que unir los vértices obtenidos con *A'* y *B'* (Fig. 3.7).

B. Traslación

Definición

La **traslación** es un movimiento rectilíneo según una dirección establecida por el que cada punto de una figura se desplaza una misma distancia sobre rectas paralelas.

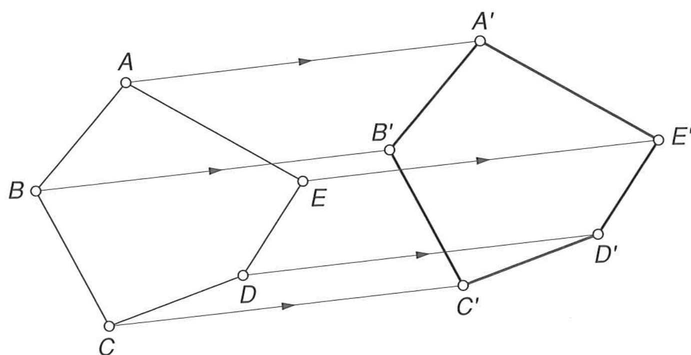
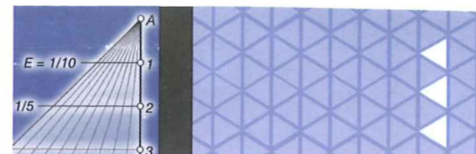


Fig. 3.8. *Figuras iguales por traslación.*

Una traslación queda definida por dos puntos homólogos *A* y *A'* dados, y la dirección de traslación o vector *AA'* determinado.

En toda traslación se verifica que:

- La transformada de un segmento o una recta es otro segmento o recta paralela.
- Las rectas que unen puntos homólogos *A* y *A'*, *B* y *B'*, etc., son paralelas a la dirección de traslación.
- Los ángulos de una figura original se transforma en otros iguales.
- Cualquier figura original se transforma en otra igual (Fig. 3.8).



Traslación de una figura

1. Se parte de la figura *ABC* y de la dirección o vector de traslación (distancia de los puntos homólogos *AA'*).

2. Por cada uno de los vértices de la figura original, se traza una recta paralela a la dirección de traslación *AA'*, y con centro en dichos vértices y radio igual a la longitud del vector de traslación *AA*, se describen arcos que cortan a cada una de las rectas en los puntos *A'*, *B'* y *C'*.

3. Uniendo los puntos determinados se obtiene una figura igual a la de partida (Fig. 3.9).

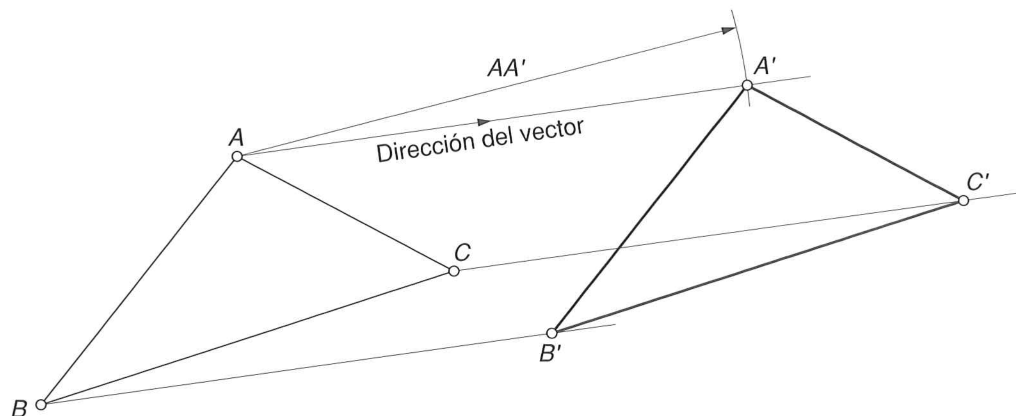


Fig. 3.9. *Traslación de una figura.*

C. Simetría

Definición

Dos figuras son **simétricas** respecto a un punto o una recta cuando, haciendo girar la transformada alrededor de este punto o recta, coincide exactamente sobre la figura inicial.

Se denomina punto o eje de simetría, aquél alrededor del cual, gira la figura. Por consiguiente, se observan dos tipos de simetría, la **«simetría central»** y la **simetría axial.**

Simetría central

En una simetría central dos puntos *A* y *A'* son simétricos, respecto a un tercero *O*, cuando están sobre una misma recta y equidistan del punto central *O*. Es decir, ***OA* = *OA'*** (Fig. 3.10).

En toda simetría central se verifica que:

- Una figura poligonal y su transformada tienen sus lados homólogos paralelos y con sentido contrario. Por tanto, para que coincidan ambas figuras hay que girar 180º el transformado.

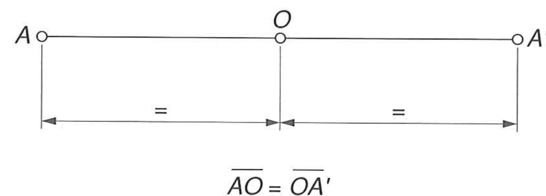


Fig. 3.10. *Simetría central.*

Simetría central de una figura plana:

1. Se parte de la figura *ABCD* y el centro de simetría *O*. Se traza una recta que una el punto *A* con *O* y se prolonga.

2. Se toma la magnitud *AO* y se lleva desde *O* sobre la prolongación determinando de este modo el punto *A'*, simétrico de *A*.

3. Se repite de igual manera el proceso expuesto con el resto de los puntos *B*, *C* y *D*, determinando sus homólogos *B'*, *C'*, y *D'*. Uniendo los puntos mencionados se obtiene la figura simétrica a la de partida (Fig. 3.11).

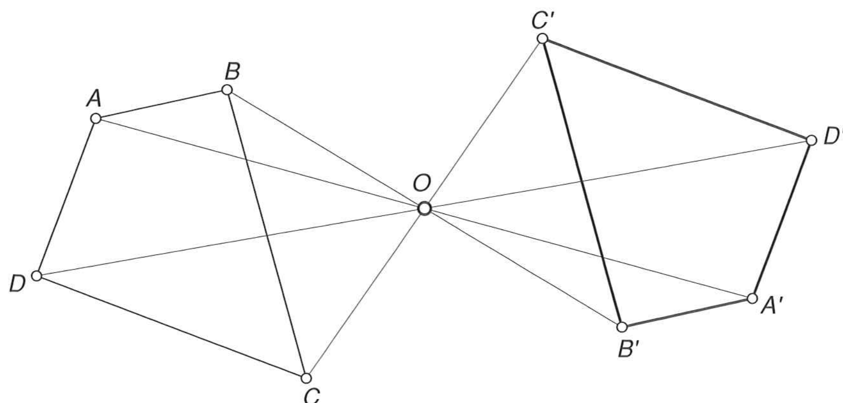


Fig. 3.11. *Simetría central de una figura plana.*



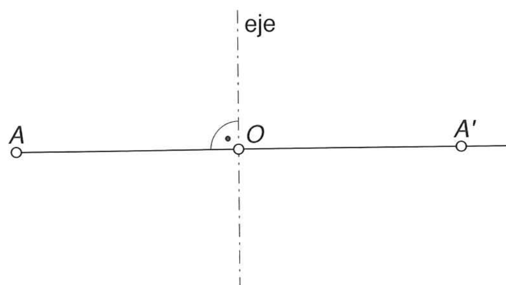


Fig. 3.12. *Simetría axial.*

▶▶▶ Simetría axial

Dos puntos son simétricos, respecto a un eje cuando están situados sobre rectas perpendiculares al eje y equidistan de él (Fig. 3.12).

En toda **simetría axial** se verifica que:

- El eje es la mediatriz del segmento que une puntos homólogos. Los puntos que componen el eje de simetría son puntos dobles, dado que coinciden con sus transformados.
- El semiplano que contiene la transformada de una figura si se gira alrededor del eje 180° en el espacio, dicha figura transformada coincide con la figura inicial.

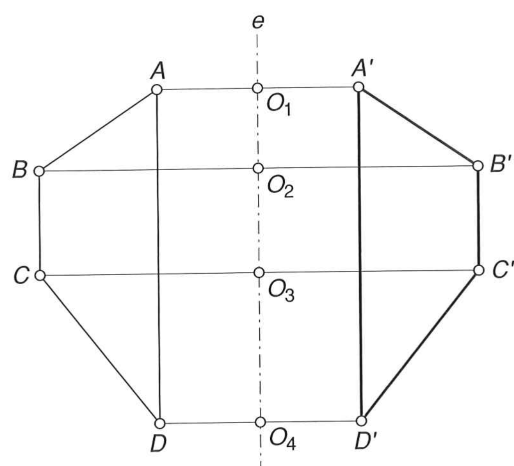


Fig. 3.13. *Simetría axial de una figura plana.*

Simetría axial de una figura plana

1. Se parte de la figura *ABCD* y el eje de simetría e. Desde cada uno de los puntos antes mencionados se trazan rectas perpendiculares al eje y se prolongan.
2. Se toma la magnitud AO_1 y desde O_1 se lleva sobre la prolongación determinando de este modo el punto *A'*, simétrico de *A*.
3. Se repite de igual manera el proceso expuesto con el resto de los puntos *B*, *C* y *D*, determinando sus homólogos *B'*, *C'*, y *D'*. Uniendo los puntos mencionados se obtiene la figura simétrica a la de partida (Fig. 3.13).

▶▶ D. Giro

▶▶▶ Definición

Un **giro** es una transformación que posibilita que un punto, recta o figura plana, se mueva alrededor de otro punto fijo *O* (centro de giro), en un sentido (positivo o negativo), y un ángulo α determinado. De lo que se deduce que los elementos que intervienen en un giro, y además lo definen, son: **el centro de giro, el sentido del giro** y **el valor del ángulo de giro** (Fig. 3.14).

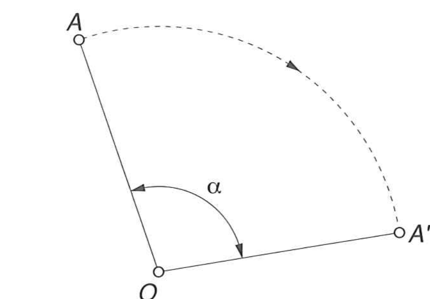


Fig. 3.14. *Elementos del giro.*

En todo giro se verifica que:

- Los ángulos y las distancias se conservan. Los segmentos se transforman en segmentos de igual magnitud pero con diferente orientación.
- Al girar, todos los elementos de una figura describen arcos de circunferencia concéntricos en la misma dirección y el mismo ángulo (Fig. 3.15).

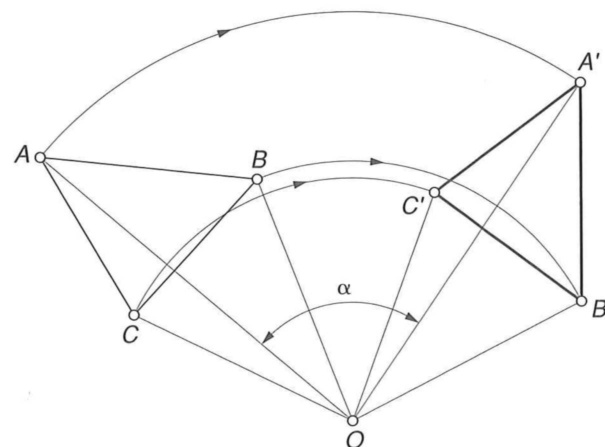


Fig. 3.15. *Giro de una figura plana.*



Para hallar el centro de giro que ha posibilitado pasar, por ejemplo, de la figura *ABC* a su transformada *A'B'C'*, se trazan las mediatrices de los segmentos formados por dos pares de puntos homólogos: *AA'* y *BB'*. Donde las mediatrices se cortan está situado el centro de giro, siendo el ángulo de giro el que forman las rectas *r* y *s* que contienen a los puntos *OB* y *OB'* (Fig. 3.16).

Existe una diferencia entre **giro** y **rotación**; se dice que una figura rota sobre sí misma cuando el centro de giro coincide con el centro geométrico de la figura. Sin embargo, en el giro el centro no coincide con el geométrico de la figura.

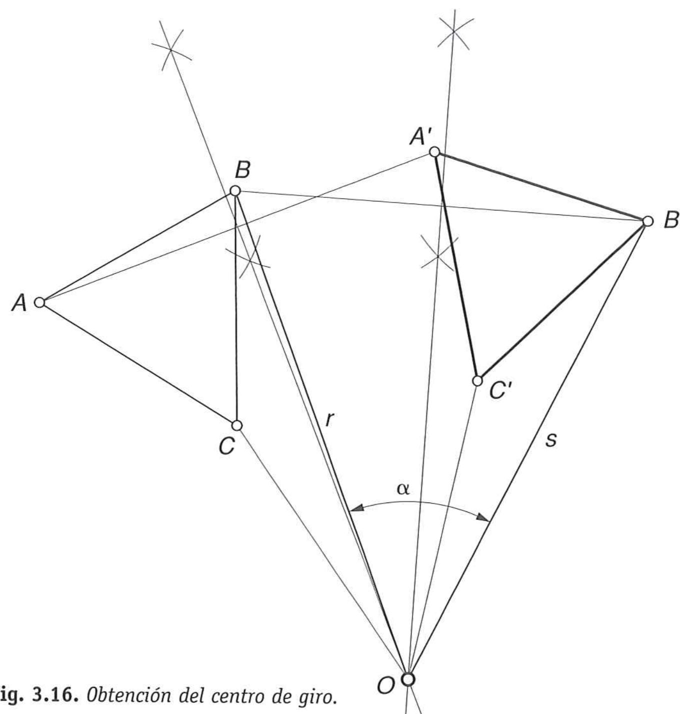


Fig. 3.16. *Obtención del centro de giro.*

▶▶▶ Construcción de giros en figuras planas

Veamos algunos ejemplos de giros:

Giro de un punto conociendo el centro y el ángulo de giro

1. Se une el punto *A* dado con el centro *O* de giro. Sobre el segmento trazado *OA* se construye el ángulo dado α.

2. Con centro en *O* y radio *OA* se realiza un arco que corta al lado del ángulo anteriormente construido en el punto *A'*, posición girada del punto *A*.

   Como puede observarse, en el giro establecen una correspondencia los puntos *A* y *A'* de manera que el ángulo *AOA'* es igual a α, y la distancia *OA* es igual a *OA'* (ver Fig. 3.14 de la página anterior).

Giro de una recta conociendo el centro y el ángulo de giro

1. Se traza una perpendicular *r* desde *O*, centro de giro, a la recta dada, y se obtiene el punto *P*.

2. Se gira el punto *P* del mismo modo que se hizo con el punto *A* en el caso anterior. Una vez realizada esta operación se traza la recta perpendicular *s* desde *P'* al segmento *OP'*, siendo ésta la recta solución, es decir, la recta girada con el ángulo α dado (Fig. 3.17).

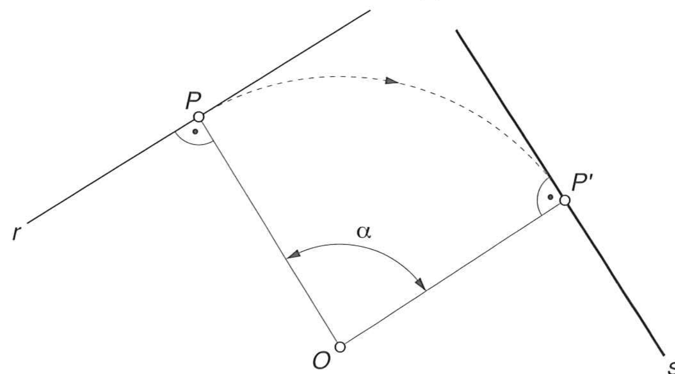


Fig. 3.17. *Giro de una recta.*

Giro de una figura plana conociendo el centro y el ángulo de giro

1. Se parte de la base que la figura que se ha de girar es el triángulo *ABC* (ver Fig. 3.15 de la página anterior).

2. Se giran los vértices *A*, *B* y *C*, uno a uno, de la misma manera que se ha hecho en el caso anterior, obteniendo así los puntos *A'*, *B'* y *C'* girados con el ángulo α dado.

Uniendo dichos puntos (*A'*, *B'* y *C'*) se construye el triángulo girado (ver Fig. 3.15 de la página anterior).

Giro de una circunferencia conociendo el centro y el ángulo de giro

Para girar una circunferencia es suficiente con girar su centro *O*, como ya es conocido, y dibujar una circunferencia de igual radio a la original desde el centro girado *O'* (Fig. 3.18).

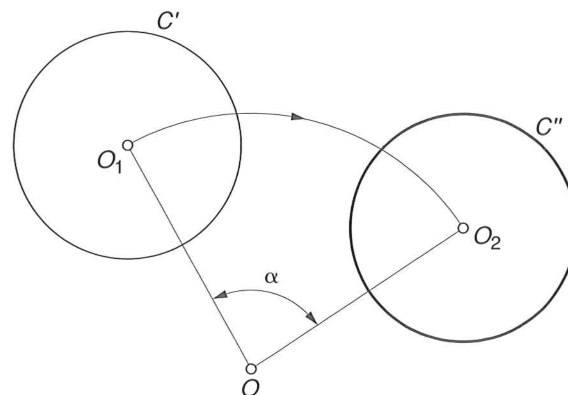


Fig. 3.18. *Giro de una circunferencia.*

Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se entiende por transformación geométrica?
2. ¿Qué caracteriza a las transformaciones isométricas?
3. ¿Cuántos tipos de transformaciones isométricas has estudiado? ¿y cómo se denominan?
4. ¿Cuándo dos figuras son iguales? y ¿cuándo se les llama idénticas?
5. Enuncia tres métodos para construir figuras iguales. Elige uno de ellos describiendo por escrito y gráficamente el proceso de realización.
6. En una translación geométrica ¿qué se verifica siempre?
7. ¿Cuándo se dice que dos figuras son simétricas?
8. ¿Qué se verifica en una simetría axial?
9. ¿Qué posibilita un giro como transformación geométrica?
10. ¿En qué se diferencia un giro de una rotación?

Ejercicios

Todos los ejercicios propuestos a continuación se realizaran a escala 2:1 en una hoja de papel blanco formato A4.

1. Dibuja las siguientes figuras utilizando el procedimiento que se indica en cada una de ellas:

a) Por radiación (Fig. 3.19).

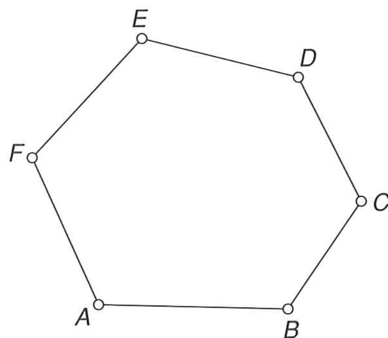


Fig. 3.19.

b) Por triangulación (Fig. 3.20).

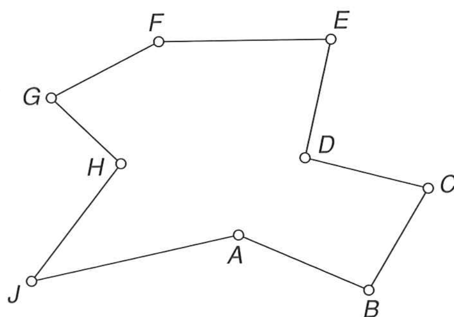


Fig. 3.20.

c) Por traslado de ángulos (Fig. 3.21).

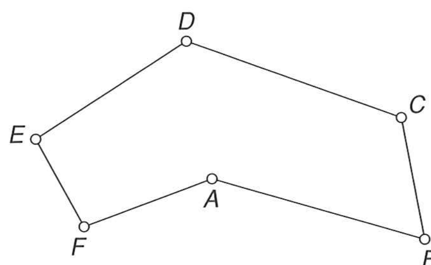


Fig. 3.21.

2. Traslada la figura *ABCDE* sabiendo que la dirección viene dada por los puntos *A* y *A'* (Fig. 3.22).

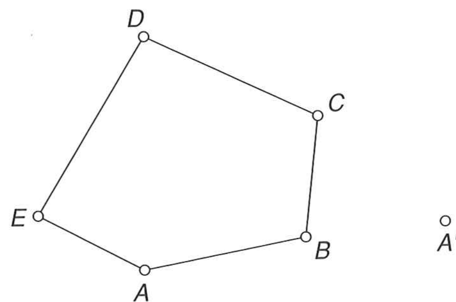


Fig. 3.22.

3. Dibuja la figura simétrica de *ABCDEF*, sabiendo que el punto *O* es el centro de la simetría (Fig. 3.23).

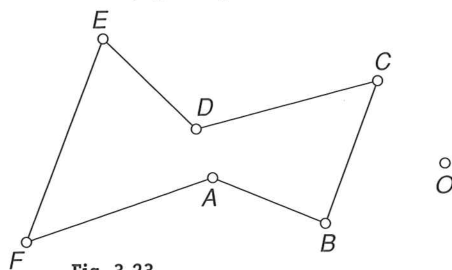


Fig. 3.23.

4. Dibuja la figura simétrica de *ABCDEF*, sabiendo que la recta *r* es el eje de simetría (Fig. 3.24).

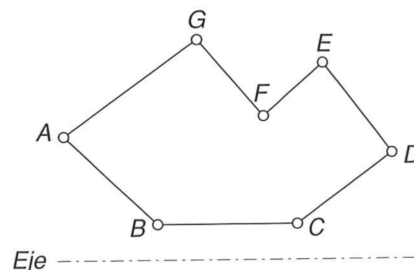


Fig. 3.24.

5. Dibuja las siguientes figuras giradas según el sentido indicado; en la figura a) 60° y en la b) 75° (Figs. 3.25a y 3.25b).

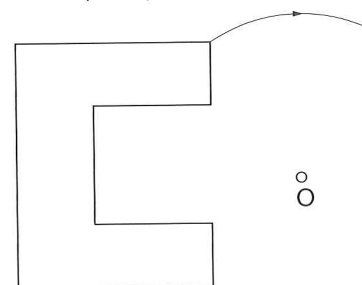


Fig. 3.25a.

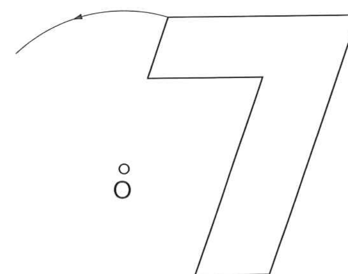


Fig. 3.25b.



3.3. Transformaciones isomórficas

A. Homotecia

Definición

Es una transformación geométrica en la que a cada punto (*A*, *B* ...) se le hace corresponder otro punto (*A'*, *B'* ...) estando ambos alineados con un punto fijo *O*, llamado centro de homotecia, y verificándose que *OA'/OA* = *K*; siendo *K* la razón de la homotecia (Fig. 3.26).

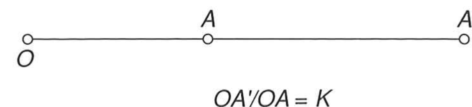


Fig. 3.26.

En toda homotecia se verifica que:

- Ésta queda determinada mediante el centro de homotecia y dos puntos homotéticos (Fig. 3.27), el centro de homotecia y la razón de homotecia (Fig. 3.28), o dos figuras homotéticas (Fig. 3.29).

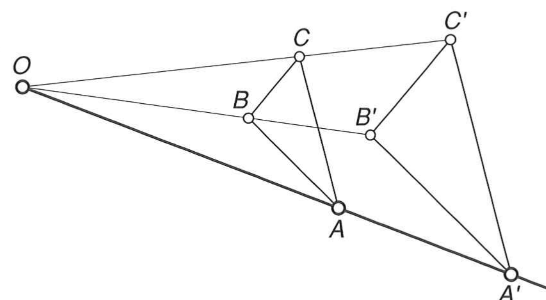


Fig. 3.27. *Homotecia determinada por el centro y dos puntos homotéticos.*

- La razón entre dos segmentos homotéticos es siempre constante e igual a la razón de homotecia.
- Las rectas homólogas son paralelas si no pasan por el centro de homotecia. Sin embargo, aquellas que sí que pasan se transforman en sí mismas, es decir, son rectas dobles.
- Los ángulos de una figura trasformada no varían; sin embargo, las magnitudes lineales varían en una proporción igual a la razón de homotecia.

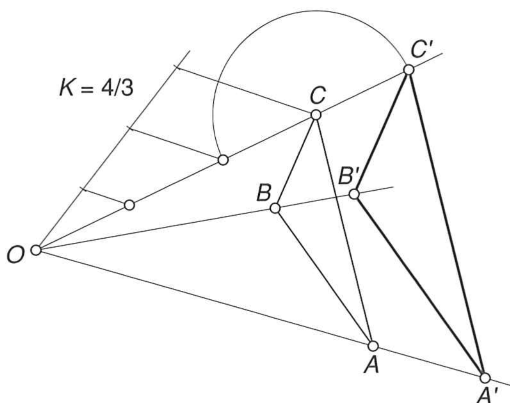


Fig. 3.28. *Homotecia determinada por el centro y la razón de homotecia. Por ejemplo K = 4/3.*

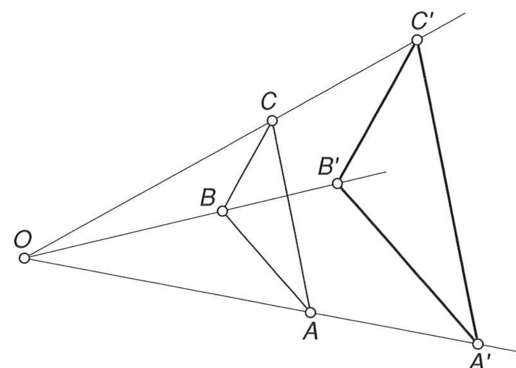


Fig. 3.29. *Homotecia determinada por dos figuras homotéticas.*

Homotecia directa

Si la razón *K* de una homotecia es positiva se dice que la homotecia es directa. Esto sucede cuando los puntos homotéticos *A* y *A'* están situados a un mismo lado del punto *O*, centro de homotecia. Dentro de ella pueden darse los siguientes casos (Fig. 3.30, Fig. 3.31, Fig. 3.32 y Fig. 3.33):



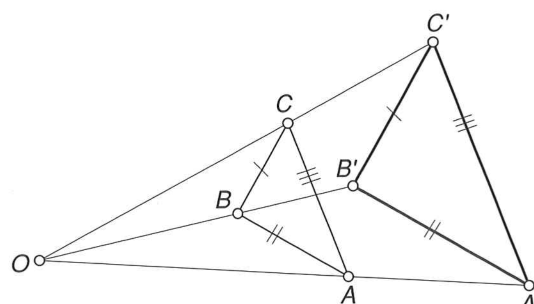
Fig. 3.30.



Fig. 3.31.



Fig. 3.32.



$OA' / OA = OB' / OB = OC' / OC = K$
$A'B' / AB = B'C' / BC = A'C' / AC = K$

Fig. 3.33. *Homotecia determinada por dos figuras homotéticas.*



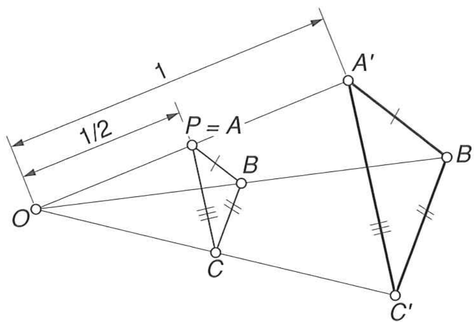


Fig. 3.34. *Figura homotética directa.*

Figura homotética de ABC, siendo O el centro de la homotecia y K su razón

1. Se une *O*, centro de la homotecia, con los vértices *ABC* de la figura. Sobre *OA*, por ejemplo, se lleva un segmento *OP* igual a la magnitud de la razón *K;* se parte de que ésta es 1/2, resultando el punto *A'*.

2. Por *A'* se traza una paralela *AB* que corta a la prolongación de *OB* en el punto *B'*. Se procede de modo semejante para hallar *C'*.

3. Se unen los puntos *A'B'C'* y se obtiene la figura homotética (Fig. 3.34).

▶▶▶ Homotecia inversa

Si la razón *K* de una homotecia es negativa la homotecia se define como negativa. Esto sucede cuando en una pareja de puntos homotéticos *A* y *A'*, cada uno está a un lado del centro *O* de homotecia (Fig. 3.35, Fig. 3.36, Fig.3.37 y Fig. 3.38).

A' O A $OA'/OA = -K - 1$

Fig. 3.35.

A' = O = A $OA'/OA = -K = -1$

Fig. 3.36.

A' O A $OA'/OA = -K < -1$

Fig. 3.37.

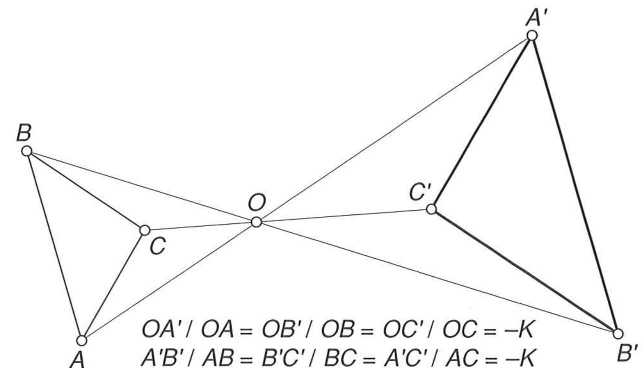


Fig. 3.38.

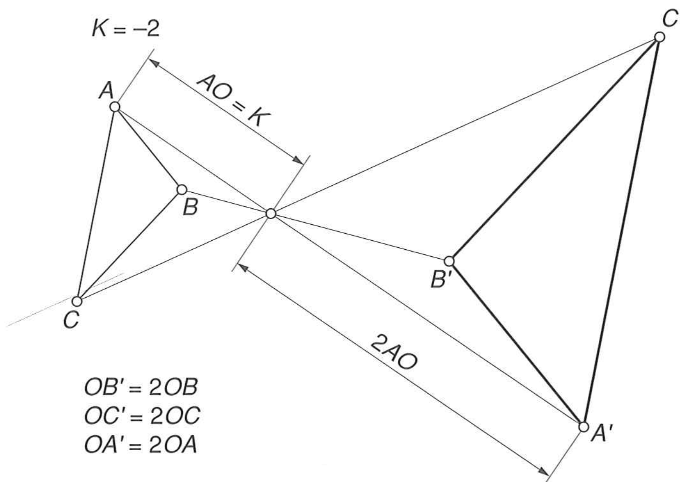


Fig. 3.39. *Figura homotética inversa.*

Figura homotética de ABC, siendo O el centro de la homotecia y -K su razón

En este caso se actúa de la misma manera que si la figura homotética a realizar fuese una figura basada en una homotecia directa. En la Figura 3.39 pueden observarse los pasos dados para su construcción, y cómo los lados homotéticos son paralelos y miden el doble que los originales, estando éstos a distinto lado respecto del centro *O* de homotecia por ser la razón negativa (en este caso, -2).

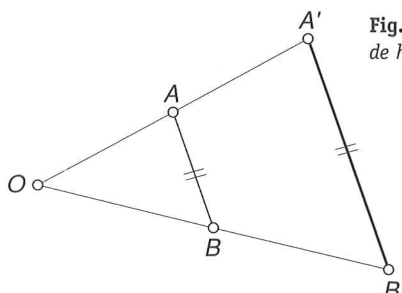


Fig. 3.40. *Centro de homotecia directa.*

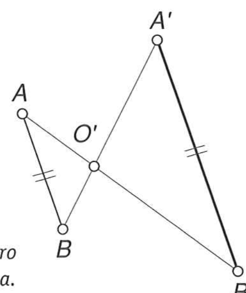


Fig. 3.41. *Centro de homotecia inversa.*

▶▶▶ Homotecia respecto a dos centros

Si se toman dos segmentos paralelos, *AB* y *A'B'*, se observa que son homotéticos respecto a dos centros *O* y *O'*, uno de ellos perteneciente a una homotecia directa, y el otro a una homotecia inversa, respectivamente. Los centros de las dos homotecias están determinados por los puntos de intersección que realizan las rectas que unen los extremos de los dos segmentos (Figs. 3.40 y 3.41).



▶▶▶ Centro de homotecia de dos circunferencias

Basándose en lo expuesto anteriormente, se verifica que dos circunferencias son siempre homotéticas respecto de dos centros *O* y *O'*, es decir, en una homotecia directa y en otra inversa.

Para hallar los centros de homotecia se trazan dos radios paralelos, *r* y *r'*, de ambas circunferencias, se unen sus extremos *A* y *A'* mediante una recta *s*, y en el punto donde ésta corte a la recta *t* que une los centros *c* y *c'* de las circunferencias, está situado el centro de homotecia. Por tanto, la razón de homotecia viene determinada por el cociente entre los radios de ambas circunferencias, como se muestra en las Figuras 3.42 (homotecia directa) y 3.43 (homotecia inversa).

Los centros de homotecia también pueden ser determinados donde las rectas tangentes a las circunferencias corten a la recta que une sus centros. En el caso de que las rectas sean tangentes exteriores se obtiene el centro de la homotecia directa (Fig. 3.44); si las rectas tangentes son interiores, el centro pertenece a la homotecia inversa (Fig. 3.45).

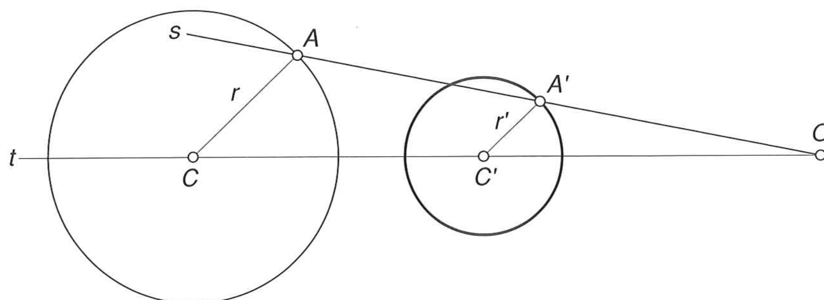


Fig. 3.42. *Centro de homotecia directa de dos circunferencias.*

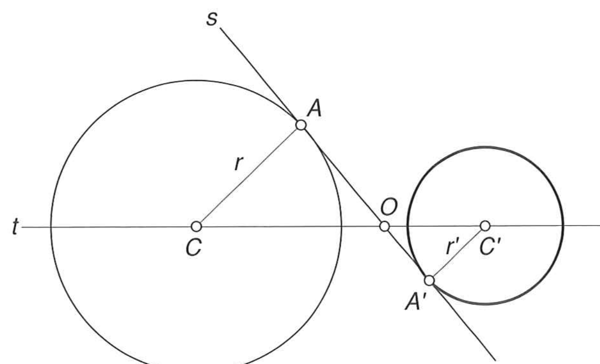


Fig. 3.43. *Centro de homotecia inversa de dos circunferencias.*

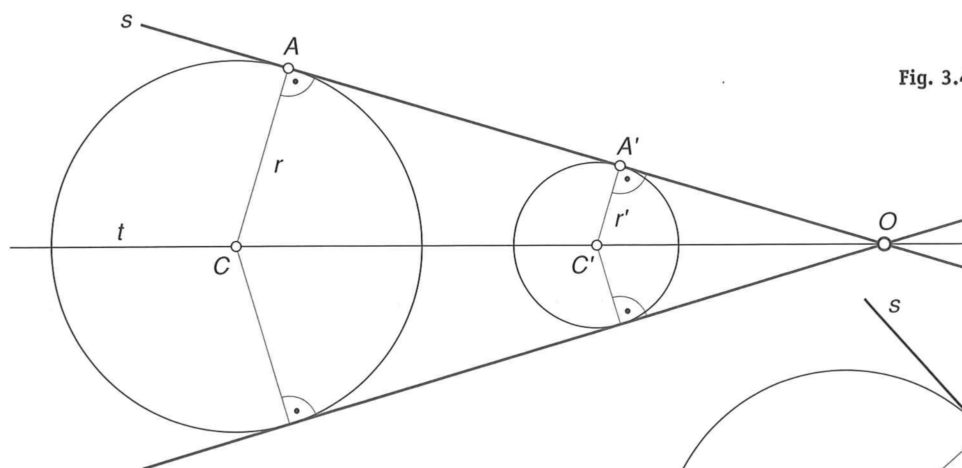


Fig. 3.44. *Centro de homotecia directa: método alternativo.*

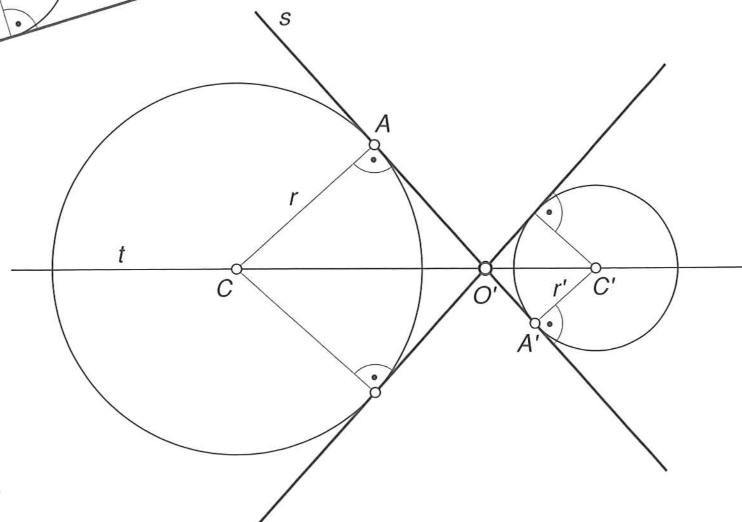


Fig. 3.45. *Centro de homotecia inversa: método alternativo.*

B. Semejanza

Definición

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.

Los elementos que se corresponden en una figura original y su semejante se denominan homólogos.

Razón de semejanza, *K*, es la relación de proporcionalidad que existe entre segmentos homólogos, $K = A'B'/AB$; de tal modo, se verifica lo siguiente:

- Si $K > 1$ la figura semejante es mayor que la original (Fig. 3.46).
- Si $K < 1$ la figura semejante es menor que la original (Fig. 3.47).
- Si $K = 1$ la figura semejante es igual a la original (Fig. 3.48).

Cuando dos figuras semejantes están alineadas con relación a un punto fijo, *O*, pasan a denominarse homotéticas, siendo *O* el centro de homotecia. Al igual que sucede en la homotecia, la semejanza puede ser directa o inversa dependiendo del sentido que tenga la figura original con respecto a su transformada. Es conveniente tener en cuenta que no todas las figuras semejantes son homotéticas.

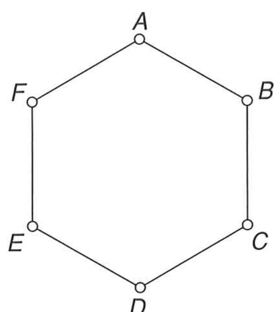
En toda semejanza se verifican las condiciones que se detallan a continuación.

a) Dos triángulos son semejantes:

- Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.
- Cuando tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ambos.
- Cuando tienen sus tres lados proporcionales.

El cumplimiento de cada uno de los criterios expuestos se puede observar si se comparan los dos triángulos representados en la Figura 3.49 bajo los parámetros expuestos en cada criterio.

$K > 1$



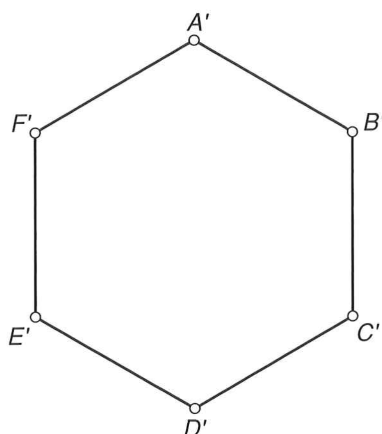
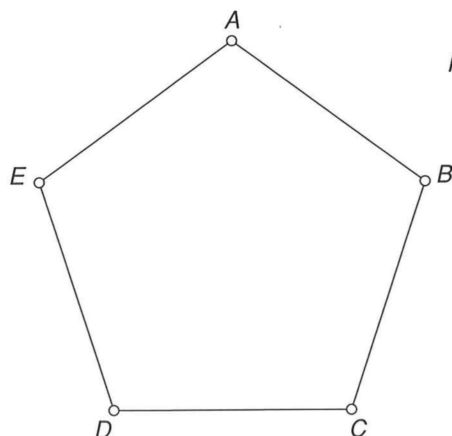


Fig. 3.46. *Figura semejante mayor.*

$K < 1$



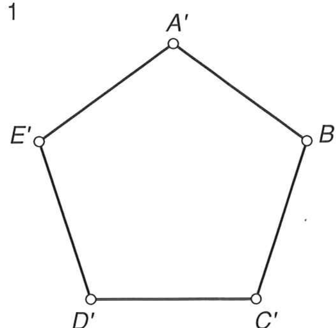
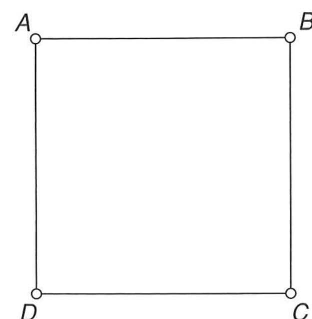


Fig. 3.47. *Figura semejante menor.*

$K = 1$



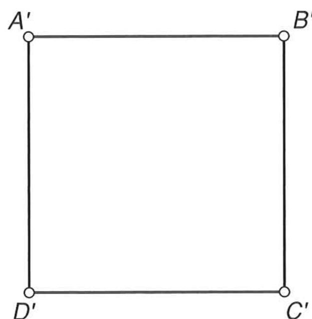


Fig. 3.48. *Figura igual a la original.*

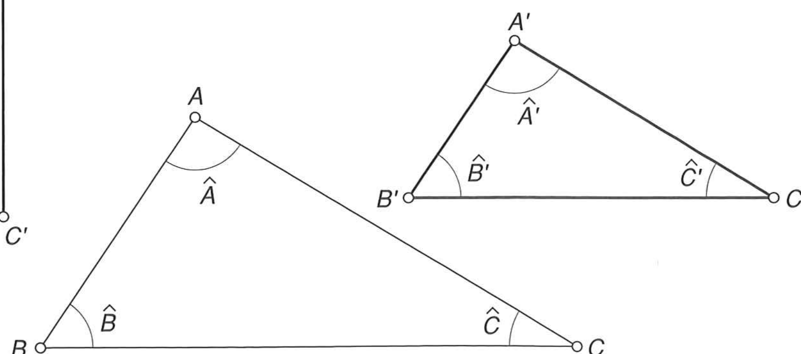
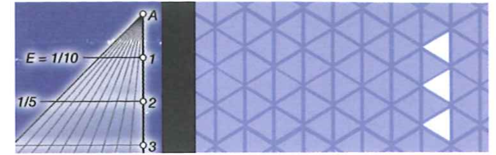


Fig. 3.49. *Dos triángulos semejantes.*



b) Dos polígonos del mismo número de lados son semejantes:

- Cuando están compuestos del mismo número de triángulos semejantes y situados de la misma manera.

- Cuando tienen todos sus ángulos iguales, y proporcionales sus lados menos dos.

- Cuando tienen todos sus ángulos consecutivos iguales menos dos, y todos sus lados son proporcionales menos uno.

- Cuando dos polígonos son regulares con el mismo número de lados (ver Fig. 3.47 más arriba).

El cumplimiento de cada uno de los criterios expuestos se puede observar si se comparan los dos polígonos de la Figura 3.50 bajo los parámetros expuestos en cada criterio.

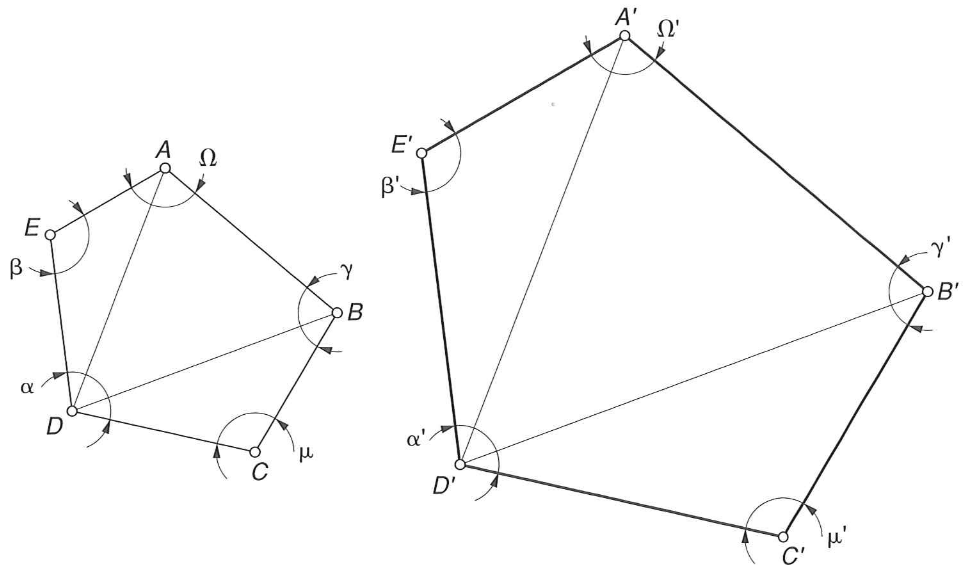


Fig. 3.50. *Dos polígonos semejantes.*

▶▶▶ Construcción de figuras planas semejantes

Veamos algunos métodos que se emplean para dibujar una figura semejante a otra dada.

Por homotecia o radiación conociendo la razón de semejanza positiva, por ejemplo, K = 2/1

1. Se parte de la figura dada *ABCDE* y se considera un punto *O* centro de la homotecia, que en esta ocasión se va hacer coincidir con uno de los vértices del polígono, por ejemplo *A*. Se une *O* = *A* con los vértices de la figura prolongándolos.

2. A partir de *B* se lleva la magnitud *OB*, dado que la razón es 2/1; se procede del mismo modo con *B*, determinando el homologo *B'*. Se traza una paralela por *B'* a *BC* y donde esta corte al radio *OC* prolongado queda determinado el vértice *C'*. Se continúa de manera análoga para hallar los demás vértices.

3. Se unen los puntos A', B', C' ... para obtener la figura semejante. Como se podrá observar, la figura obtenida es doble de tamaño a la original (Fig. 3.51).

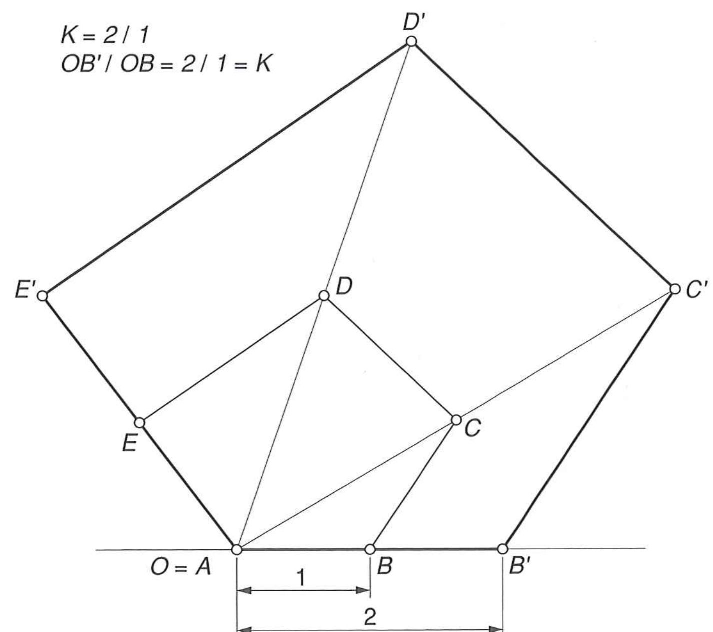


Fig. 3.51. *Figura semejante por homotecia positiva.*



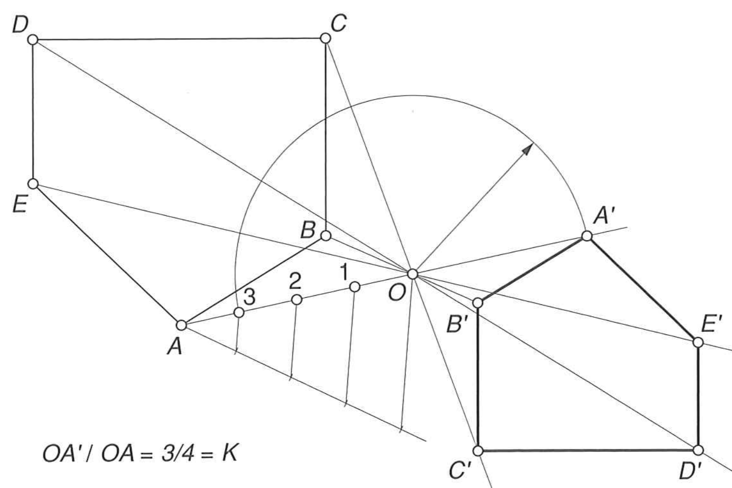


Fig. 3.52. *Figura semejante por homotecia negativa.*

Por homotecia o radiación conociendo la razón de semejanza negativa, por ejemplo, K = -3/4

En esta ocasión vamos a determinar la figura semejante utilizando un centro *O* de homotecia situado fuera de la figura, dado que *O*, esté fuera, dentro o formando parte de la figura original, no modifica el resultado final de la figura semejante buscada.

1. Se toma un punto *O* cualquiera exterior a la figura original dada, *ABCDE*, centro de la homotecia o radiación y se une con los vértices de la figura prolongándolos.

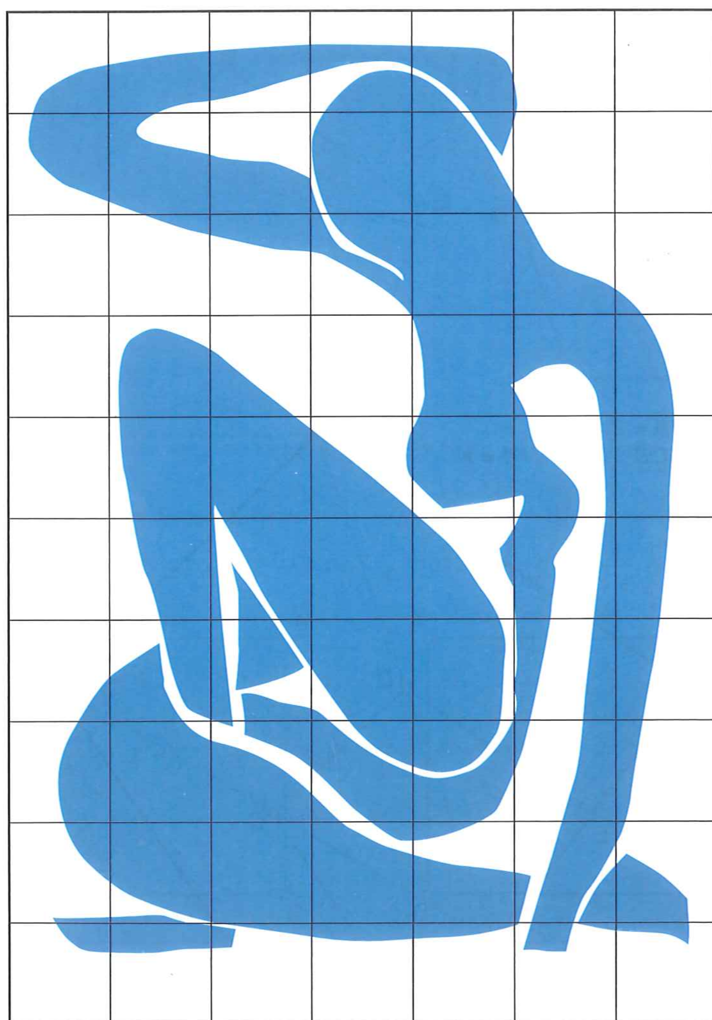
2. Dado que la razón de semejanza es negativa, *K* = -3/4, se determina la proporcionalidad sobre la prolongación de los lados del polígono, por ejemplo *OA*, obteniéndose su punto homologo *A'*.
3. Se traza una paralela desde *A'* a *AB* y donde ésta corte al radio *OB* prolongado queda determinado el punto *B'*. Se continúa de modo análogo para hallar los demás vértices, y de este modo se obtiene al unirlos la figura semejante con la razón de semejanza dada (Fig. 3.52).

Por el sistema de la cuadrícula conociendo la razón de semejanza, por ejemplo, K = 1/2

Este método se basa en construir una cuadrícula sobre la figura original y repetirla según la razón de semejanza, es decir, la proporción pedida sobre otra.

Este procedimiento es muy práctico para trabajar con figuras cuyas formas sean de configuración orgánica, más que para aquellas otras puramente geométricas.

Supongamos que la figura semejante que se quiere conseguir es la obra de Henri Matisse, *Desnudo azul,* realizada por el artista en 1952. En la Figura 3.53 se puede observar, de manera gráfica, la construcción tan sencilla en el que se fundamenta este método.



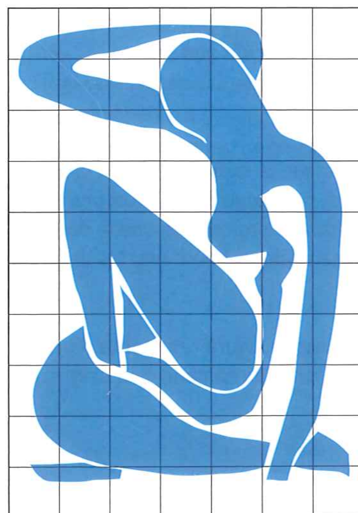
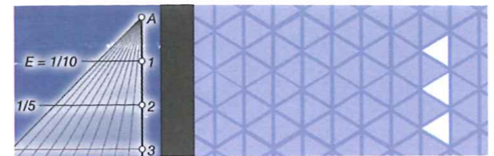


Fig. 3.53. *Interpretación de la obra,* Desnudo azul, *de Henry Matisse, 1952. Figura semejante producida por el sistema de la cuadrícula.*



C. Escalas

Definición

A veces, cuando se va a representar un objeto, surgen dificultades derivadas de su tamaño, bien porque es muy grande para dibujarlo en los límites del papel de dibujo, o porque es muy pequeño y no se pueden precisar detalles de su forma. Las escalas surgen para dar solución a estos problemas que se plantean en la representación gráfica de los objetos.

La **escala** es la razón que existe entre las dimensiones de un dibujo y sus correspondientes medidas en la realidad.

Esta relación puede expresarse en forma de proporción (escala 2:3), en forma de fracción (escala 2/3), en forma decimal (escala = 0,66), o en forma gráfica (Fig.3.54):

Fig. 3.54. *Construcción gráfica de una escala.*

Escala = medida del dibujo/medida de la realidad.

Sobre la base de la igualdad de que escala E es igual a la medida gráfica del dibujo D dividido entre su correspondiente realidad, R, podemos hallar cualquiera de los otros datos:

$$E = D/R\ ; \quad D = E\ .\ R; \quad R = D/E$$

Tipos de escalas

Existen tres tipos de escalas:

- **Escala natural** (Fig. 3.55): es la que tiene la relación 1:1. En ella, las medidas del dibujo son iguales a las de la realidad. $E = mD/mR = 1$.
- **Escala de reducción** (Fig. 3.56): las medidas del dibujo son menores que las reales; por ejemplo, 1/2. $E = mD/mR < 1$.
- **Escala de ampliación** (Fig. 3.57): en este caso las medidas del dibujo son mayores que las reales; por ejemplo, 3/2. $E = mD/mR > 1$.

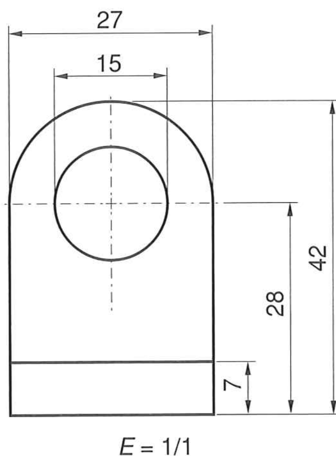


Fig. 3.55. *Escala natural.*

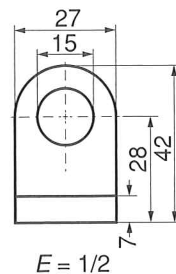


Fig. 3.56. *Escala de reducción.*

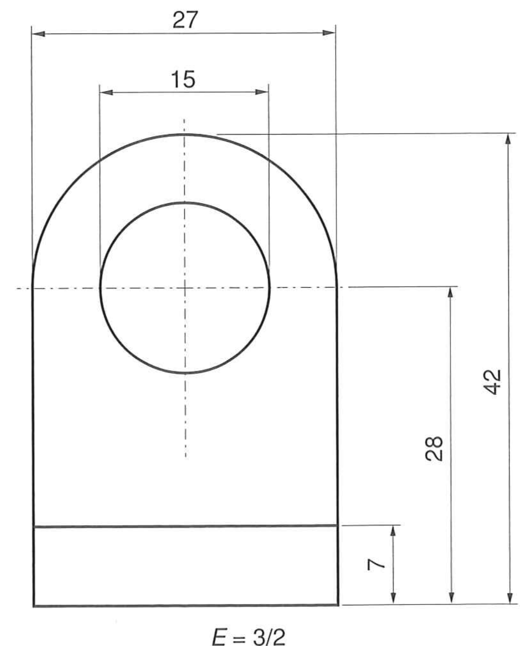
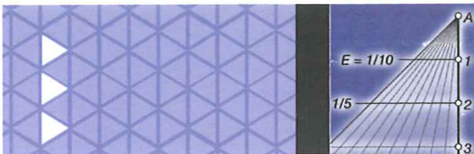


Fig. 3.57. *Escala de ampliación.*

Cada tipo de escala se adecua a unas representaciones concretas. Así, las escalas de reducción se emplean para representar grandes objetos o espacios en arquitectura, ingeniería, diseño, topografía o cartografía. Las escalas de ampliación, en la representación del diseño de pequeños objetos.

En los dibujos hechos a escala, el tamaño del dibujo está en función de la misma; sin embargo, la cifra de cota no varía; obsérvese esta norma en los ejemplos de las figuras adjuntas.



▶▶▶ Conversión de escala

La representación numérica de una escala puede cambiarse de fracción quebrada u ordinaria, a fracción decimal. Veamos cómo pueden realizarse estos cambios:

- Cambio de fracción quebrada a fracción decimal. Sólo es necesario dividir el numerador por el denominador de la fracción dada, es decir la escala. Por ejemplo:

$E = 2/3 = 0{,}66$; por tanto, $E = 0{,}66$.

- Cambio de fracción decimal a fracción quebrada. En este caso se reduce, simplemente, la fracción decimal a fracción quebrada. Por ejemplo:

$E = 0{,}5 = 5/10 = 1/2$; por tanto, $E = 1/2$.

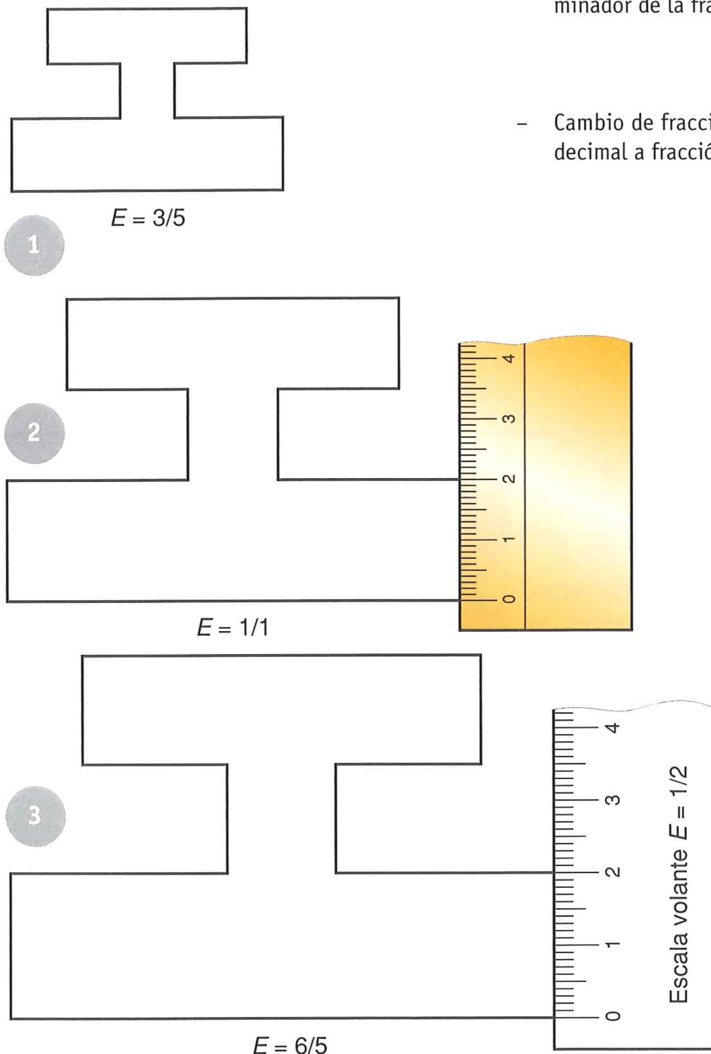


Fig. 3.58. *Paso de una escala a otra.*

▶▶▶ Paso de una escala a otra

En ocasiones, un dibujo que está realizado a una escala se desea pasarlo a otra, por ejemplo, un dibujo realizado a escala 3/5, pasarlo a escala 6/5.

El dibujo a escala 3/5 supone que las magnitudes reales de él son 5/3 mayores (Fig. 3.58); por tanto, el problema se resume en obtener las verdaderas magnitudes de dibujo y luego aplicarles el coeficiente de la nueva escala, es decir, la de 6/5, para así determinar el tamaño del nuevo dibujo.

Por consiguiente, la escala de relación entre el dibujo original y el dibujo final, se obtiene al multiplicar la inversa de la escala del dibujo dado, por la escala a la que se desea representar el nuevo dibujo. Aplicando lo expuesto al ejemplo elegido se tiene que: la escala original es 3/5, su inversa 5/3; por tanto, 5/3; 6/5 = 30/15 = 1/2 = 0,5.

Una vez determinada la escala de relación, en este caso 1/2 , se construye su escala gráfica y se actúa del siguiente modo para realizar el nuevo dibujo: sobre el original se toman medidas con la regla (Fig. 3.59), y las magnitudes obtenidas se llevan al nuevo dibujo con la escala gráfica (Fig. 3.60).

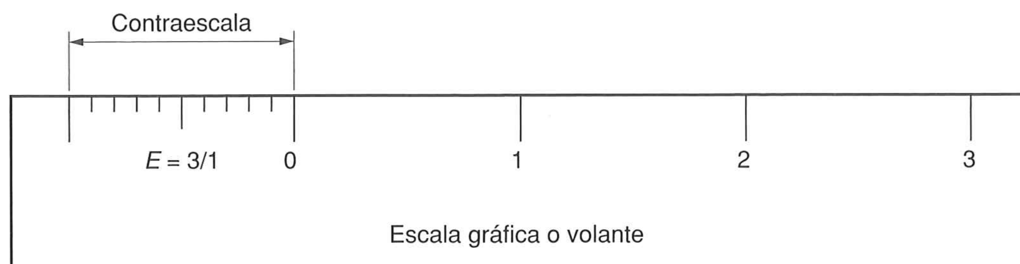
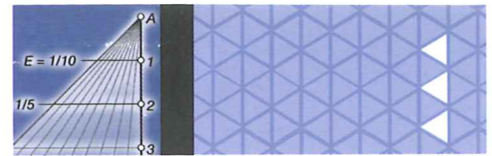


Fig. 3.59. *Escala volante.*

▶▶▶ Escalas gráficas o volantes

Es posible expresar las escalas de manera gráfica y de forma proporcional sobre un segmento graduado. Este procedimiento permite leer y transportar directamente las medidas que necesitamos para comprender o realizar un dibujo con rapidez y exactitud.

El método con el que se realiza una **escala gráfica** (también conocida como **volante**) se basa en determinar el valor de la unidad en esa escala. Para que esta escala gráfica tenga además un tamaño de trabajo adecuado, es conveniente elegir bien la unidad en la que se va desarrollar. Se miden las décimas de una unidad de escala construyendo la **contraescala,** para lo que se divide dicha unidad en diez partes iguales (Fig. 3.59).



▶▶▶ Construcción de escalas gráficas

De reducción

Supongamos que la escala es de 1/8. Podríamos expresarla también en forma decimal: 0,125, lo que nos indica que, por cada unidad en la realidad, utilizamos 0,125 unidades en el dibujo.

Si elegimos el centímetro como unidad, 100 cm reales tienen una representación en el dibujo de 12,5 cm; es decir, 1 m sería igual a 12,5 cm. En este caso, se coloca sobre el borde de un papel o cartulina la medida de 12,5 cm y se divide en diez partes iguales, con lo que se obtiene el valor de cada decímetro en la escala gráfica (Fig. 3.60).

A la izquierda del cero se transporta una unidad de escala, que se divide en diez partes iguales, quedando así representada la contraescala.

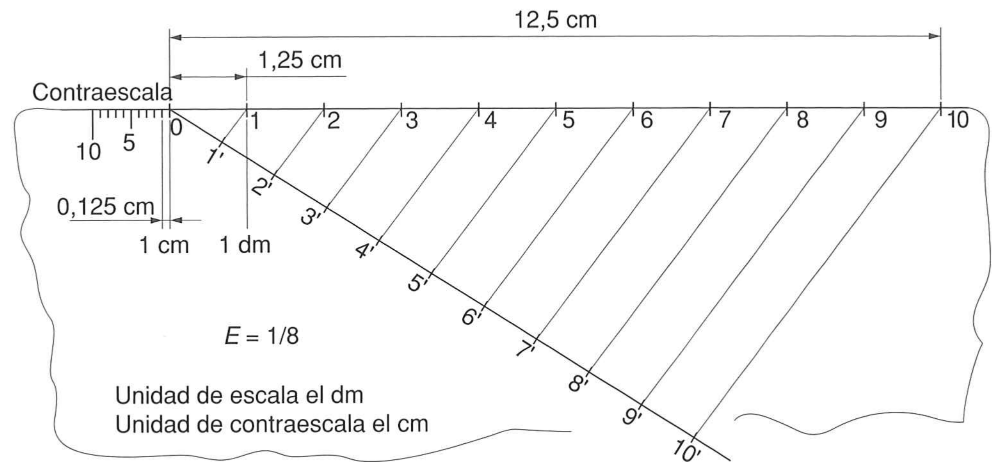


Fig. 3.60. *Construcción de una escala de reducción.*

De gran reducción

Para representar las escalas gráficas de gran reducción, por ejemplo 1/75 000 se hace lo mismo que se ha hecho en el caso anterior. Es decir, se divide 1 entre 75 000, y se observa que 1 km real está representado por 0,0000133, es decir, por 1,33 cm, imposible de representar con la regla, ya que ésta no contempla la representación de centésimas de centímetro, y en este caso hay tres. Por tanto, se ha de tomar una magnitud diez veces superior a la unidad con el fin de trazar con la mayor exactitud posible esta magnitud.

Por consiguiente, se lleva sobre una tira de papel 13,3 cm, que equivalen a 10 km en la realidad, se divide en diez partes iguales esta medida y se obtiene la representación de 1 km (Fig. 3.61).

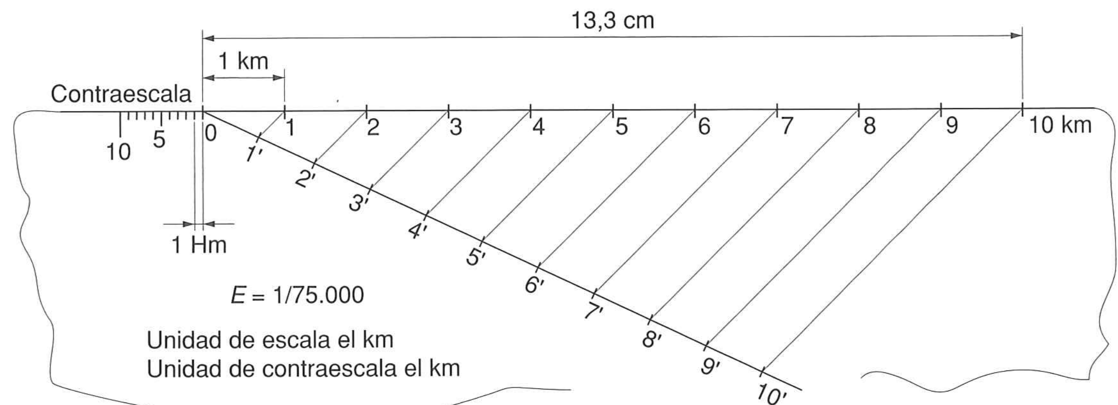


Fig. 3.61. *Construcción de una escala de gran reducción.*

De ampliación

Tomemos por ejemplo la escala 8/5.

Igual que para comenzar a realizar cualquier escala se divide numerador entre denominador (8:5 = 1,6), se toma el centímetro como unidad de escala, que se representa en el dibujo con 1,6 cm.

Como en los casos anteriores, sobre una tira de papel se sitúa y se repite esta medida (1,6) tantas veces como unidades se necesiten representar. Para determinar la contraescala se actúa, como ya se ha comentado, de igual forma que en los casos precedentes (Fig. 3.62).

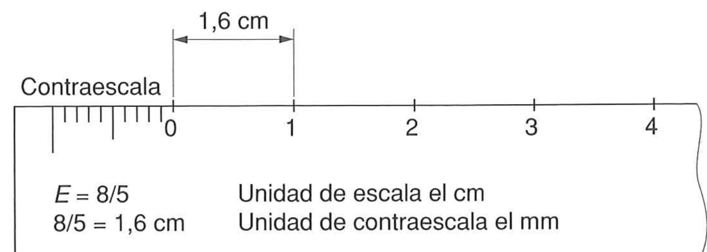
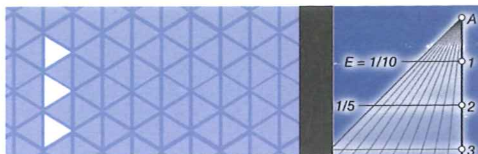


Fig. 3.62. *Construcción de una escala de ampliación.*



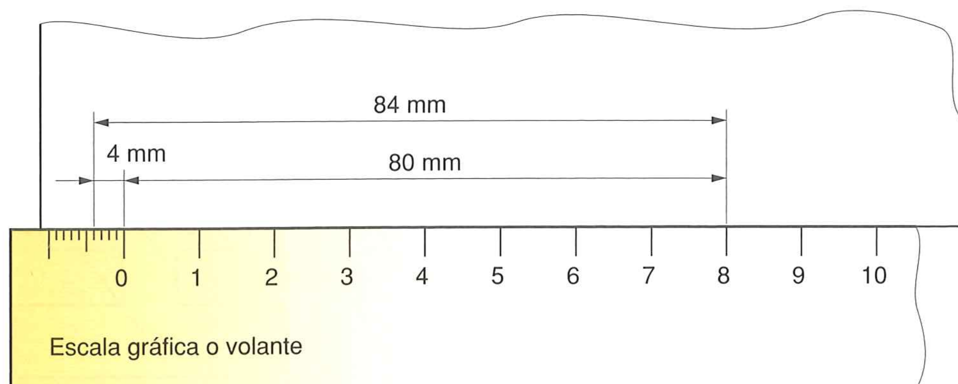


Fig. 3.63. *Medición con escala gráfica.*

▶▶▶ Medir con una escala gráfica

Supongamos que se necesita tomar una magnitud de 84 mm de la escala gráfica que aparece en la Figura 3.63. Para realizar esta medición se procede del modo que aparece expuesto, de forma gráfica, en la figura.

En ella se puede observar que se han tomado ocho unidades de la escala y cuatro de la contraescala. La mejor forma de tomar medidas de una escala gráfica es utilizando el borde de un papel.

▶▶▶ Escala transversal

Este tipo de escala se utiliza siempre que es necesario trabajar precisando décimas en la representación del dibujo. El proceso de construcción de la escala transversal vamos a desarrollarlo tomando como ejemplo la escala 1/25 (ver Fig. 3.64).

1. Se realiza la escala gráfica o volante de la escala dada, 1/25 sobre una recta *r*. Por los puntos 0*m*, 1*m*, 2*m*, 3*m*, etc. y 10 de la contraescala, y se trazan perpendiculares a la recta *r*.

2. Sobre la perpendicular trazada en el punto 10 se llevan las diez divisiones de la contraescala, y por ellas se trazan paralelas a la recta *r*, es decir, la recta donde está representada la escala gráfica.

3. Se llevan las divisiones de la contraescala 1, 2, 3, etc., sobre la recta *s*, determinando los puntos 1′, 2′, 3′ ... Se unen los puntos 0 con 1′, el 1 con 2′, y así sucesivamente hasta unir 9 con 10′; de este modo, se habrá terminado la construcción de la escala transversal, también denominada de décimas.

4. En los segmentos trazados sobre la escala se puede apreciar sus magnitudes.

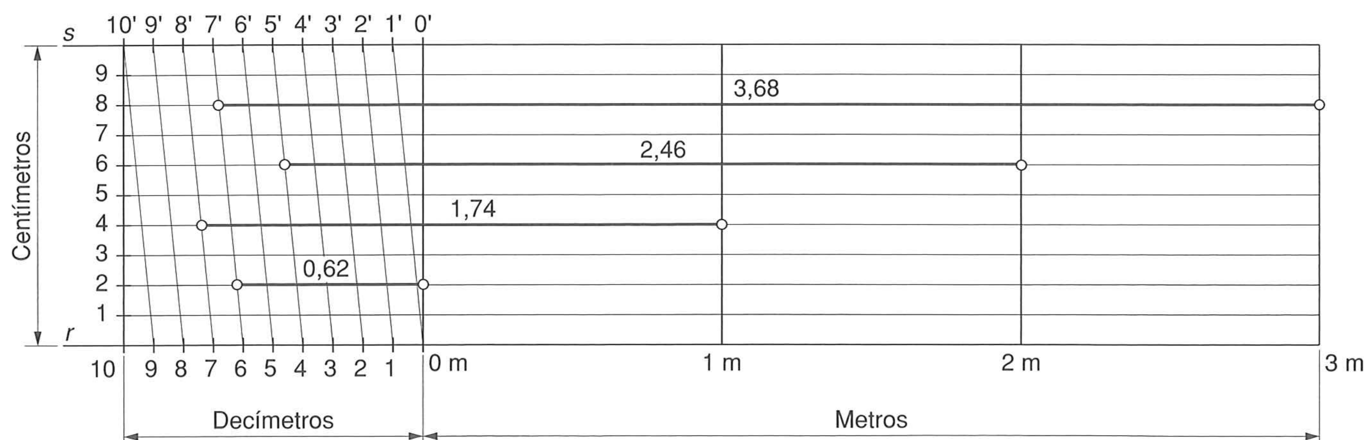
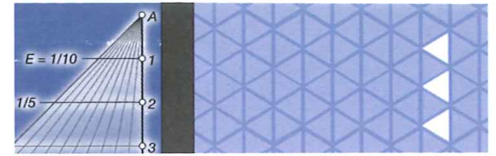


Fig. 3.64. *Escala transversal.*



▶▶▶ Triángulo universal de escalas

Partiendo de un triángulo rectángulo isósceles podemos crear cualquier tipo de escala gráfica, tanto de reducción como de ampliación. El proceso de construcción es el siguiente:

1. Se parte de un triángulo rectángulo isósceles *ABC* cuyos catetos tienen una longitud, cada uno de ellos, de 10 cm. Se dividen éstos en diez partes iguales determinando los puntos 1, 2, 3 ..., y 1', 2', 3'... Se prolonga el cateto *AB* y la hipotenusa *AC*.

2. Se trazan paralelas por los puntos 1, 2, 3, etc., y se unen, posteriormente, los puntos 1', 2', 3' ... con el vértice *A* del triángulo.

3. Fijándose en la construcción se pueden observar diferentes escalas de reducción: escala 8/10 igual a 4/5, escala 5/10 igual a 1/2 ,etcétera.

4. Prolongando las rectas que concurren en *A*, y trazando más paralelas al cateto *BC*, separadas por ejemplo con la distancia *A*1, se determinan otras tantas escalas, en este caso de ampliación: escala 12/10 igual 6/5, etcétera (Fig. 3.65).

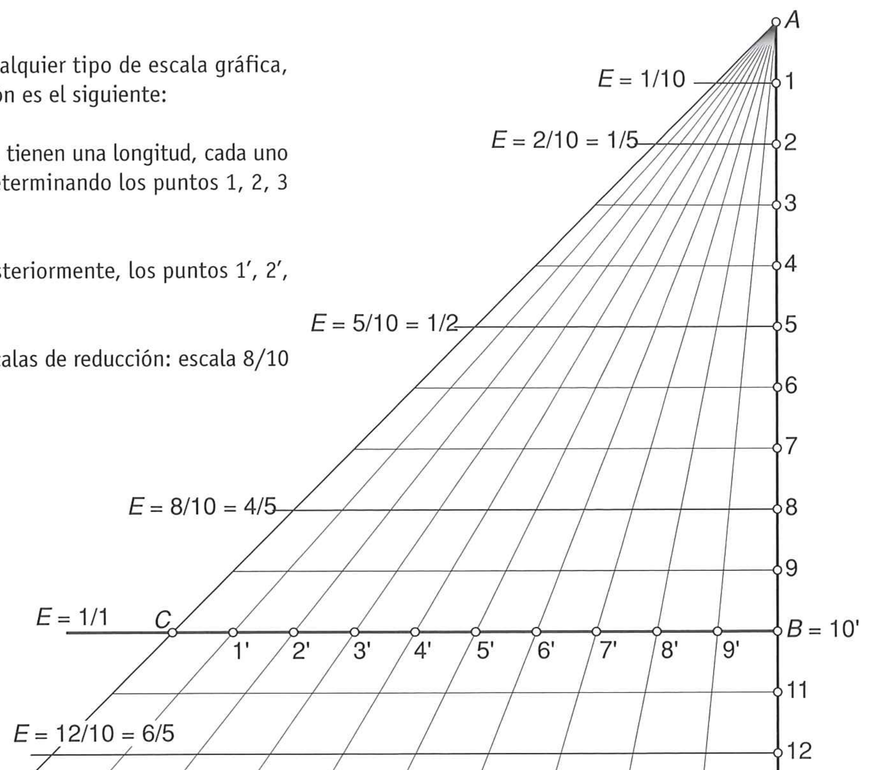


Fig. 3.65. *Triángulo de escalas.*

▶▶▶ Elección de escala

Es muy importante determinar la escala más adecuada a cada dibujo. El mejor procedimiento para elegirla consiste en relacionar las medidas máximas de longitud y anchura de la superficie en la que se va a realizar el dibujo con las máximas de las mismas magnitudes del objeto real.

De este modo se tienen enunciadas dos escalas. Cuando se trate de reducir, se debe elegir la escala que reduzca más y, en caso de ampliación, la escala que amplíe menos, puesto que así siempre tendrá cabida la otra dimensión.

Vamos a poner un caso práctico. El papel de formato A4 tiene como medida máxima de longitud 297 mm, y de anchura, 210 mm. La medida mayor del objeto que vamos a representar en longitud es de 1 435 mm, y la referente a su anchura, 360 mm. Las escalas que podemos realizar con estas medidas son las siguientes:

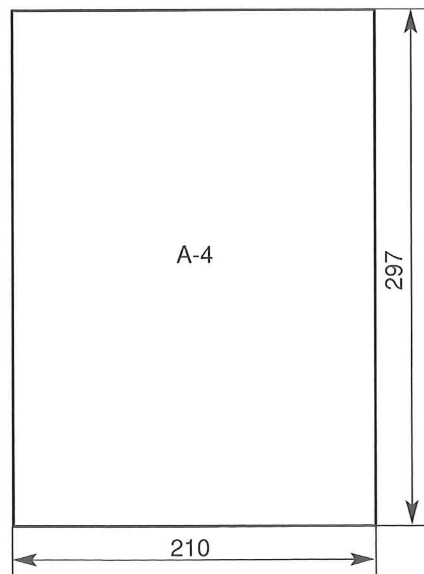
- Dividir la longitud del formato A4 por la longitud del dibujo, teniendo en cuenta que la zona útil del papel viene determinada por unos márgenes que deben respetarse por estética, normalmente 5 mm para los márgenes superior, inferior y derecho, y 25 mm para el izquierdo.

  287/1435 = 0,20

- Dividir la anchura de la hoja de papel A4 entre la del dibujo.

  180/360 = 0,50

En este caso, la escala apropiada es de 0,20, ya que es la que reduce, y garantiza que el dibujo quepa en la hoja. Si multiplicamos 0,20 por 100, podremos expresar esta escala así: 20/100, que es igual que 1/5 (Fig. 3.66).



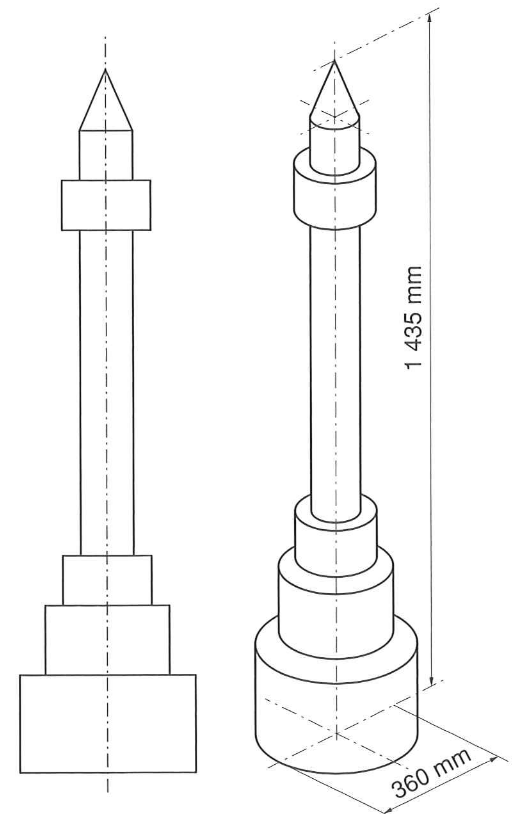
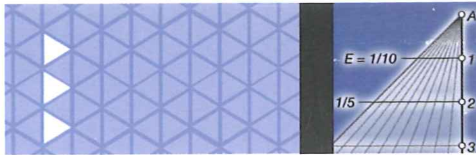


Fig. 3.66. *Objeto a representar en papel de formato A4.*



3.4. Transformaciones anamórficas

A. Equivalencia

Definición

Se denominan **figuras equivalentes** aquellas que teniendo diferente forma tienen igual área.

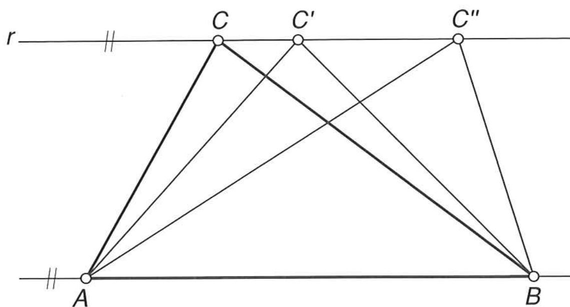


Fig. 3.67. *Triángulos equivalentes*

Construcción de figuras equivalentes

Triángulos equivalentes

Todos los triángulos que tengan la misma base y el vértice opuesto a ella sobre una recta r paralela a dicha base son equivalentes.

En la Figura 3.67 se observa cómo aplicando, la teoría expuesta, se han obtenido otros triángulos equivalentes al original *ABC*.

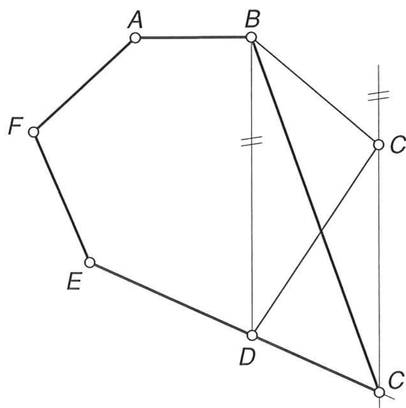


Fig. 3.68. *Polígonos equivalentes: primera transformación.*

Polígonos equivalentes

Con el método que a continuación se explica se puede construir un polígono equivalente a otro dado de un número igual de lados menos uno. Es decir, si se parte de una forma poligonal de seis lados, se puede pasar a una de cinco y, con una nueva aplicación del procedimiento, a otra de cuatro y así sucesivamente.

Veamos un ejemplo. Transformar una figura poligonal de seis lados *ABCDEF* en otra figura equivalente de cuatro lados *ABC'F'*:

1. Se traza la diagonal que une los vértices *B* y *D*, determinando así el triángulo *BCD*.
2. Por *C* se traza una paralela a la diagonal *BD*. Se prolonga el lado *ED* hasta que corte en *C'* a la paralela anteriormente trazada en *C*. Con estos trazados se ha obtenido un triángulo *BC'D* con la misma área que el *BCD*, dado que tienen ambos la misma base e igual altura.
3. Por tanto, el polígono *ABCDEF* se ha transformado en otro equivalente de cinco lados *ABC'EF* (Fig. 3.68).
4. Para hallar la siguiente transformación sólo es necesario aplicar otra vez el mismo procedimiento, quedando de esta manera determinando el cuadrilátero *ABC'F'* buscado. Véase explicado de forma gráfica en la Figura 3.69.

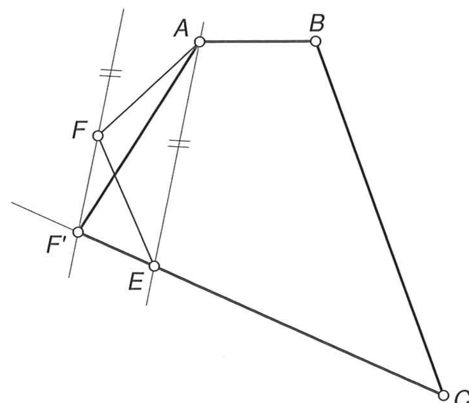
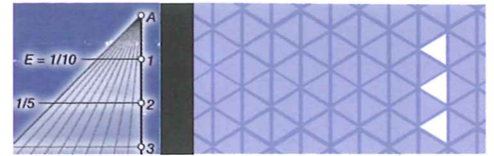


Fig. 3.69. *Polígonos equivalentes: segunda transformación.*



Cuadrado equivalente a un triángulo

1. Se halla el punto *D*, punto medio de la altura *AC* del triángulo *ABC* dado. Con centro en el vértice *A* y radio *AD*, se describe un arco que corta a la prolongación de *AB* en el punto *E*.

2. Con centro en *O*, punto medio del segmento *EB*, y radio *OE* se traza una semicircunferencia que corta a *AC* en el punto *F*.

3. El segmento *AF* es el lado del cuadrado pedido (Fig. 3.70).

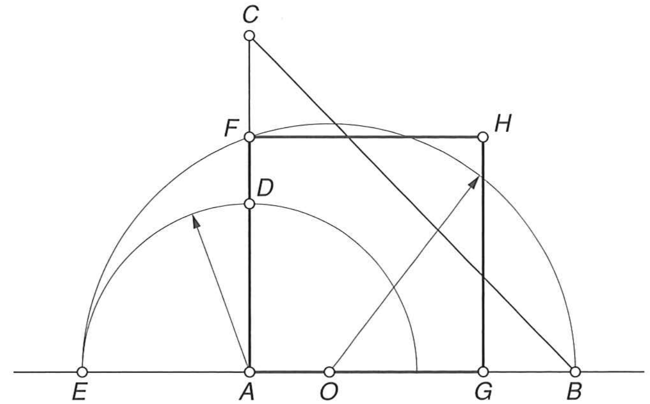


Fig. 3.70. *Cuadrado equivalente a un triángulo.*

Cuadrado equivalente a un círculo (cuadratura del círculo)

La cuadratura del círculo es una construcción aproximada, dado que en el cálculo del área del círculo se encuentra el número π, del que se desconoce su expresión decimal exacta.

1. Se dibuja un diámetro cualquiera *AB*, y por *A* se traza una recta tangente a la circunferencia. Se divide el radio *OB* en seis partes iguales, 1, 2, 3, etcétera.

2. Con centro en el punto 1, y radio igual al doble de la magnitud del diámetro, se traza un arco que corta a la tangente trazada anteriormente en *P*.

3. Se unen *P* y *B* con una recta que determina el punto *C* al cortar a la circunferencia. El segmento *CA* es el lado del cuadrado equivalente al círculo dado (Fig. 3.71).

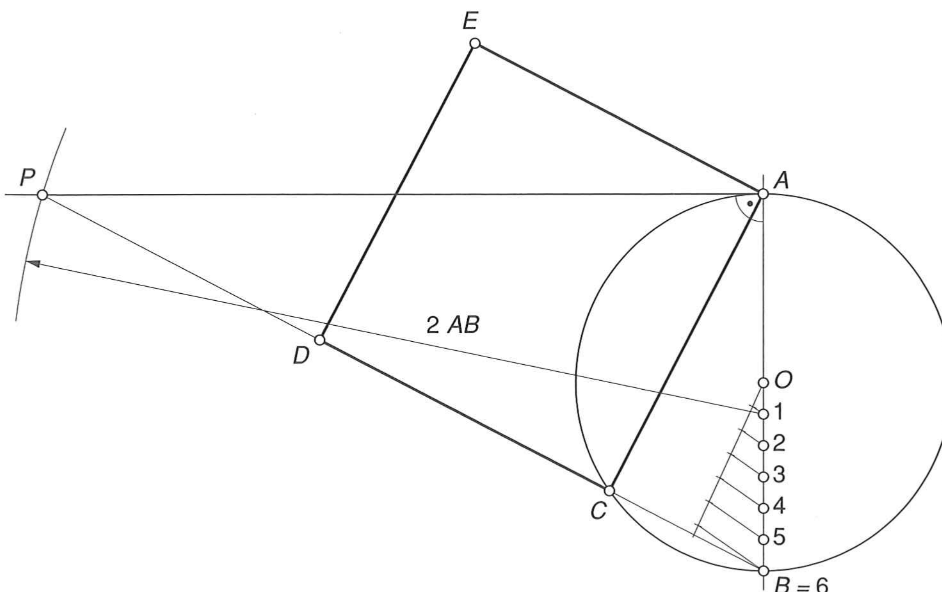


Fig. 3.71. *Cuadrado equivalente a un círculo.*



Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es una homotecia? En toda homotecia, ¿qué se verifica?
2. ¿Cuándo se dice que una homotecia es directa? ¿Y cuándo inversa?
3. Explica qué es homotecia respecto a dos centros. Hazlo por escrito, apoyándote en trazados gráficos.
4. ¿Cuándo dos figuras son semejantes?
5. ¿Qué diferencia hay entre figuras semejantes y figuras omotéticas?
6. ¿Cuándo dos polígonos del mismo número de lados son semejantes?
7. ¿Qué medidas relaciona una escala?
8. Explica cómo se pasa de una escala a otra. Básate para ello en un ejemplo.
9. Teniendo en cuenta el formato del papel de trabajo y el objeto a dibujar, explica cómo se lleva a cabo la elección de escala.
10. ¿Cuándo dos figuras son equivalentes? ¿Y a qué tipo de transformación geométrica pertenece la equivalencia?

Ejercicios

Todos los ejercicios propuestos a continuación se realizarán a escala 2:1 en una hoja de papel blanco formato A4.

1. Dibuja la figura homotética a la dada (Fig. 3.72) de razón -2, con centro en *O*.

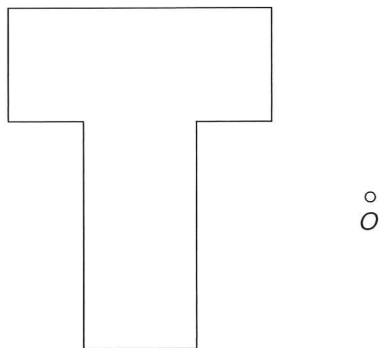


Fig. 3.72. *Figura de modelo, Ejercicio 1.*

2. Dadas las circunferencias de centros *P* y *P'* (Fig. 3.73), determina los centros de homotecia que transforman *P* en *P'* indicando las razones de homotecia correspondientes.

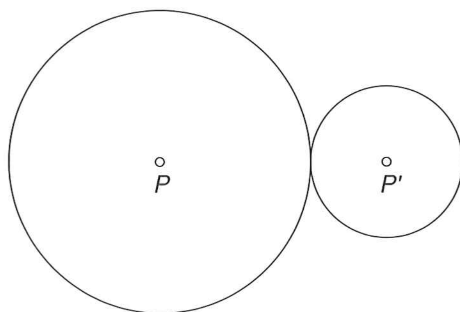


Fig. 3.73. *Enunciado, Ejercicio 2.*

3. Dibuja la figura semejante a la dada (Fig. 3.74) de razón 3/4.

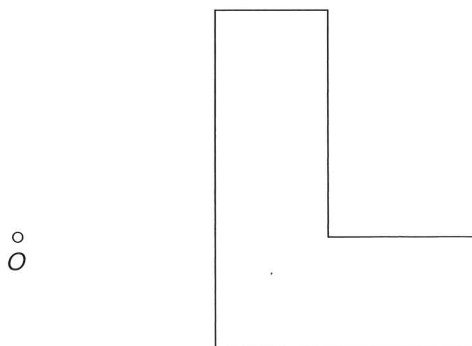


Fig. 3.74. *Figura de modelo, Ejercicio 3.*

4. Por el sistema de la cuadrícula dibuja una figura semejante a la dada (Fig. 3.75) de razón 2:1.

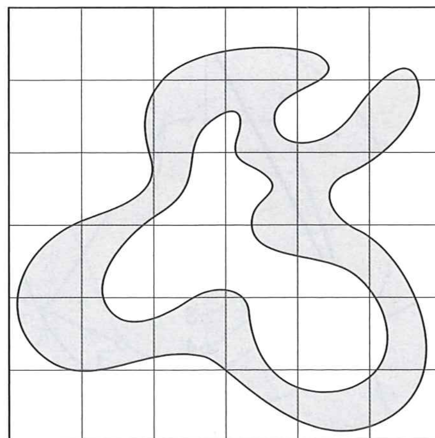


Fig. 3.75. *Figura de modelo, Ejercicio 4.*

5. Dibuja las siguientes escalas volantes:

   a) $E = 8/5$ b) $E = 5/7$

   c) $E = 1/125$ d) $E = 1/37\,500$

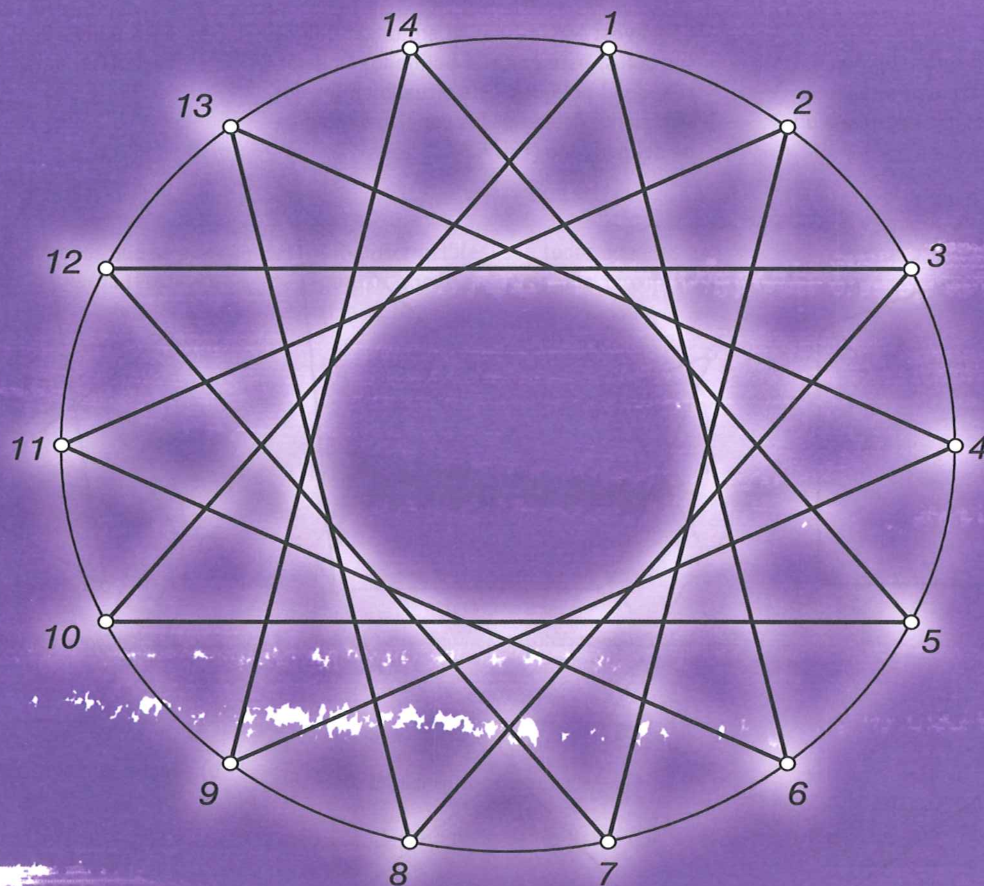
6. Un objeto que está dibujado en un plano a escala 1/20, se necesita volver a dibujarlo en esta ocasión a escala 1/75. Explica de manera razonada cómo se pasa de una escala a la otra.
7. Dibuja la escala transversal de 1/20.
8. Qué escalas son las más apropiadas para dibujar en un papel formato A4 los siguientes espacios:

   a) Una habitación de 6,35 m de largo por 4,16 de ancho.

   b) El alzado de una lámpara de pie, sabiendo que su altura es de 1,40 m y la magnitud máxima de su largo es de 0,42 m.

04

Polígonos



En este capítulo se desarrollan contenidos que tratan sobre el estudio de los polígonos, empleando para sus construcciones los trazados fundamentales en el plano y ciertas transformaciones geométricas, como por ejemplo las isométricas.

Las formas poligonales son básicas para fundamentar dibujos técnicos, puesto que componen la estructura de infinidad de objetos fabricados por el ser humano, además de la indiscutible importancia que han tenido a lo largo de diversas épocas y estilos artísticos como elementos compositivos.

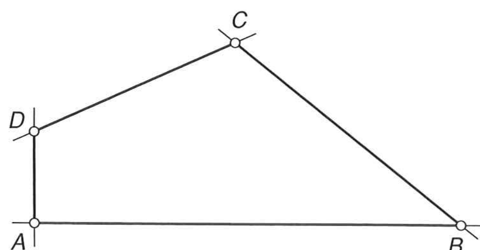


Fig. 4.1. *Polígono cerrado por cuatro rectas.*

4.1. Polígonos

Denominamos polígono a una figura plana y cerrada, limitada por rectas que se cortan dos a dos en puntos que llamamos **vértices.** Los segmentos comprendidos entre los vértices son los **lados** del polígono (Fig. 4.1).

El número de datos necesarios para poder construir un polígono viene dado por la fórmula siguiente: $2n - 3 = N$ (n = número de lados, y N = número de datos necesarios).

A. Clasificación

Los polígonos se pueden clasificar de la manera siguiente:

a) Según la dirección de sus lados:

- **Convexos:** son aquellos que, prolongando uno de sus lados, éste no corta al polígono. Es decir, cuando el polígono está situado en uno de los dos semiplanos que determina un lado cualquiera de él (Fig. 4.2).

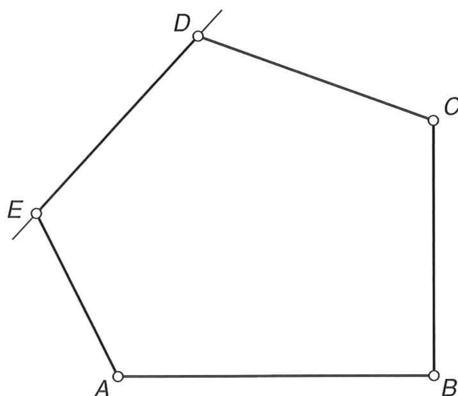


Fig. 4.2. *Polígono convexo.*

- **Cóncavos:** son los que, al prolongar uno de sus lados, éste corta al polígono. Es decir, cuando el polígono está situado en los dos semiplanos determinados por al menos un lado del polígono (Fig. 4.3).

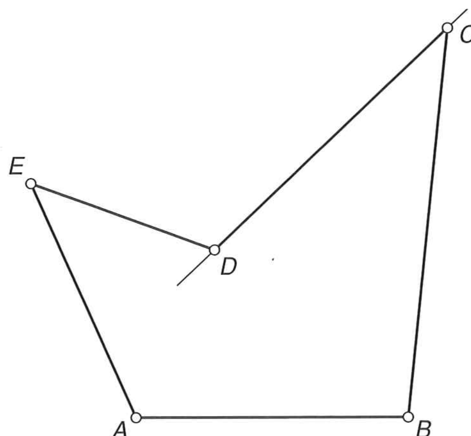


Fig. 4.3. *Polígono cóncavo.*

- **Estrellados:** son los que tienen forma de estrella (Fig. 4.4).

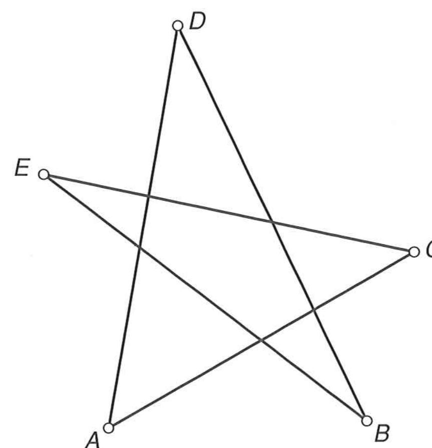


Fig. 4.4. *Polígono estrellado.*

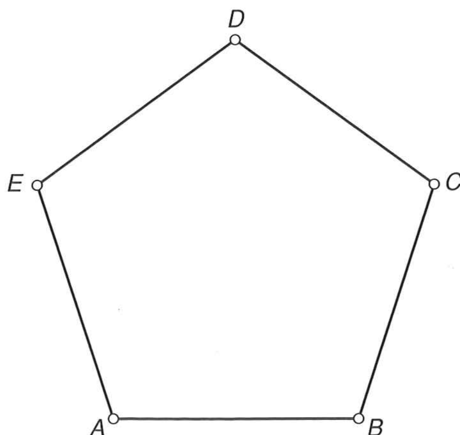


Fig. 4.5. *Polígono regular.*

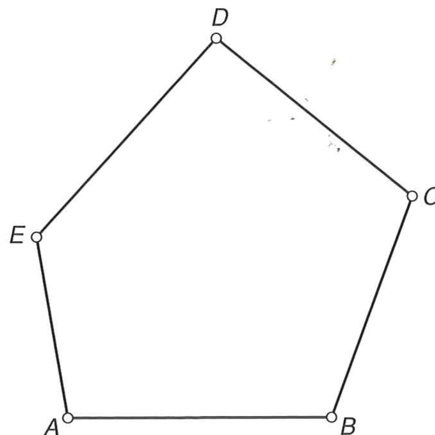
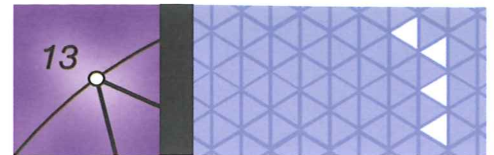


Fig. 4.6. *Polígono irregular.*

b) Según la magnitud de sus lados y sus ángulos:

- **Regular:** es el polígono que tiene lados y ángulos iguales. Es decir, es equilátero y equiángulo (Fig. 4.5).
- **Irregular:** es el polígono en el que no todos sus lados y ángulos son iguales (Fig. 4.6).



- **Equilátero:** es el polígono que tiene sus lados iguales aunque sus ángulos no lo sean (Fig. 4.7).

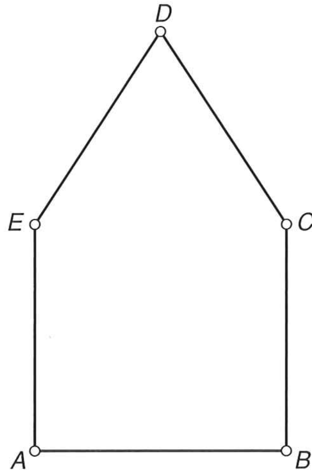


Fig. 4.7. *Polígono eqiulátero.*

- **Equiángulo:** se denomina de esta manera al polígono que tiene sus ángulos iguales aunque sus lados no lo sean (Fig. 4.8).

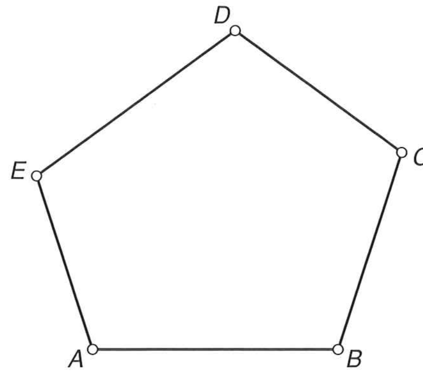


Fig. 4.8. *Polígono equiángulo.*

c) **Respecto de la circunferencia:**

- **Inscriptibles:** son los polígonos que se pueden inscribir en una circunferencia (Fig. 4.9).

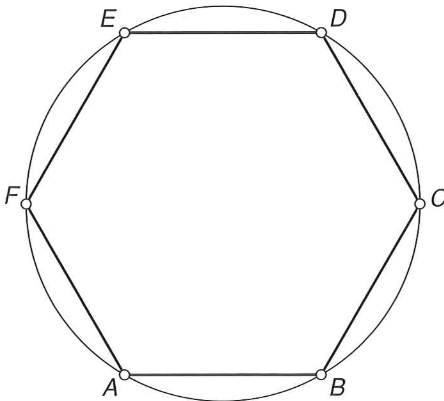


Fig. 4.9. *Hexágono inscriptible.*

- **Circunscriptibles:** son todos aquellos en los que se puede inscribir una circunferencia (Fig. 4.10).

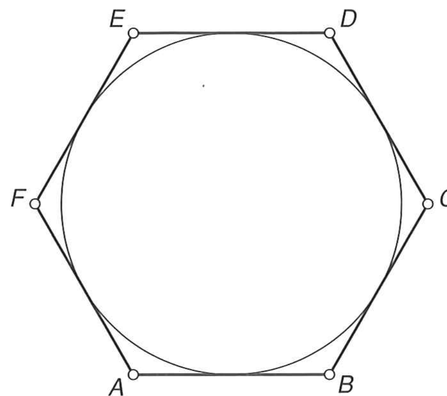


Fig. 4.10. *Hexágono circunscriptible.*

Un polígono puede construirse empleando diferentes métodos, dependiendo de los datos que de él se conozcan. Los casos que pueden presentarse son los siguientes:

1. **Casos directos.** Son cuando se conocen algunos de los elementos que los configuran, por ejemplo, lados, ángulos, alturas, etc.; por tanto, para su construcción sólo es necesario articular y trazar de manera coherente los datos aportados.

   En este curso las construcciones de polígonos están resueltas básicamente mediante este método.

2. **Por lugares geométricos.** Es cuando se aplican para su solución los lugares geométricos, es decir, mediatrices, bisectrices, etcétera.

3. **Por aplicación de transformaciones geométricas.** Homotecia, translación, simetría, giro.

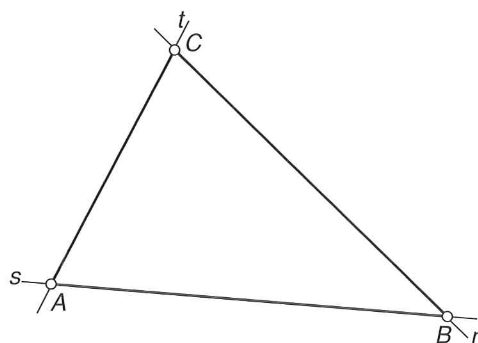


Fig. 4.11. *Elementos constitutivos de un triángulo.*

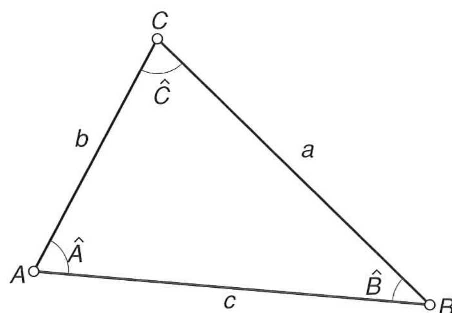


Fig. 4.12. *Nomenclatura de los elementos de un triángulo.*

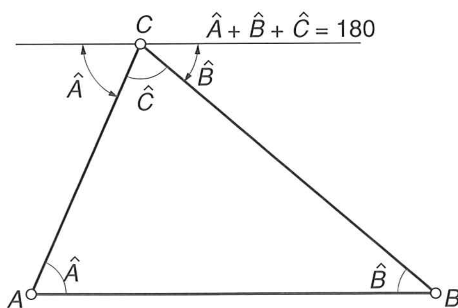


Fig. 4.13. *Demostración gráfica de que los ángulos de un triángulo suman 180°.*

4.2. Triángulos

A. Definición

El triángulo es una figura plana y cerrada limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Se denominan **vértices** a los puntos de intersección de las rectas, y los segmentos que los unen se llaman **lados** (Fig. 4.11).

B. Notaciones

Observa en la Figura 4.12 la nomenclatura que se usa para designar los vértices, ángulos y lados de un triángulo.

Vértices y **ángulos** se denominan con letras mayúsculas, la letra que identifica a los ángulos lleva sobre ella un pequeño símbolo a modo de sombrero. Los **lados** opuestos a los ángulos tienen la mismas letras que éstos, sólo que en minúsculas. (Fig. 4.12).

C. Propiedades

Los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180°, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (Fig. 4.13).

Como consecuencia de este hecho:

- Un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso o un ángulo recto.
- En un triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.

Si los lados y ángulos de un triángulo son iguales éste es regular, y se le denomina triángulo equilátero.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo es mayor que cada uno de sus catetos.

Cualquiera de los lados de un triángulo es menor que la suma de los dos restantes, pero mayor que su diferencia, por ejemplo: $a < b + c$; y $a > b - c$.

D. Clasificación

Se clasifican los triángulos aplicando dos criterios:

a) Según la longitud de sus lados:

- **Equilátero.** Los tres lados son iguales (Fig. 4.14).

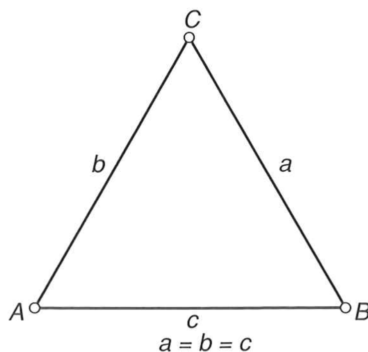


Fig. 4.14. *Triángulo equilátero.*

- **Isósceles.** Dos lados son iguales (Fig. 4.15).

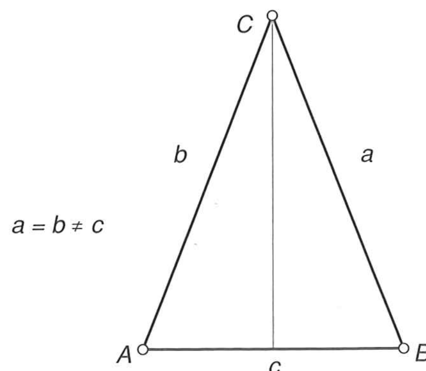


Fig. 4.15. *Triángulo isósceles.*

- **Escaleno.** Todos los lados son desiguales (Fig. 4.16).

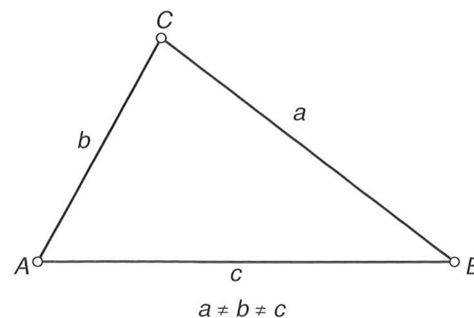


Fig. 4.16. *Triángulo escaleno.*



b) **Según el valor de sus ángulos, los triángulos pueden ser:**

- **Equiángulo.** Los tres ángulos son iguales (Fig. 4.17).
- **Rectángulo.** Uno de sus ángulos es recto (Fig. 4.18).
- **Obtusángulo.** Tiene un ángulo obtuso (Fig. 4.19).

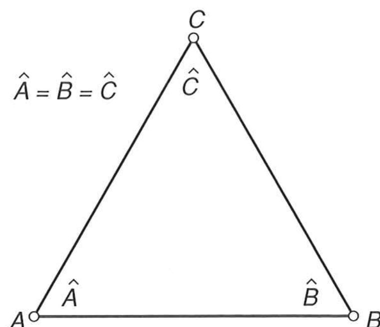


Fig. 4.17. *Triángulo equiángulo.*

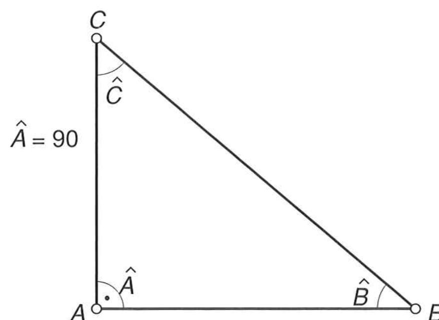


Fig. 4.18. *Triángulo rectángulo.*

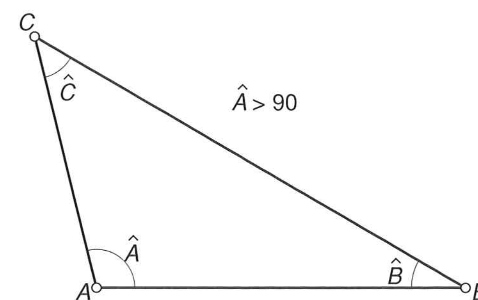


Fig. 4.19. *Triángulo obtusángulo.*

- **Acutángulo.** Sus tres ángulos son agudos (Fig. 4.20).

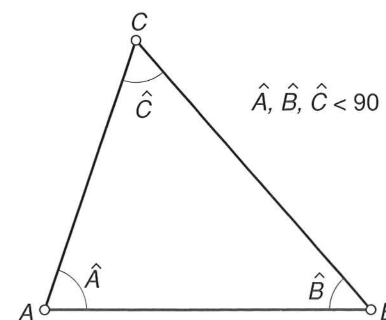


Fig. 4.20. *Triángulo acutángulo.*

E. Igualdad y semejanza de triángulos

a) **Dos triángulos son iguales si se cumple una de las siguientes condiciones:**

- Cuando tienen los tres lados iguales (Fig. 4.21).

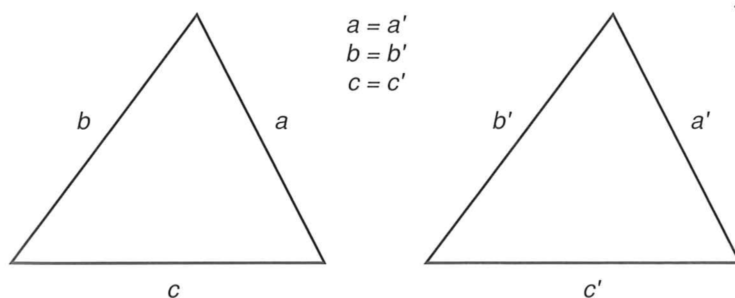


Fig. 4.21. *Primera condición de igualdad de triángulos.*

- Cuando tienen iguales dos lados y el ángulo que ambos forman (Fig. 4.22).

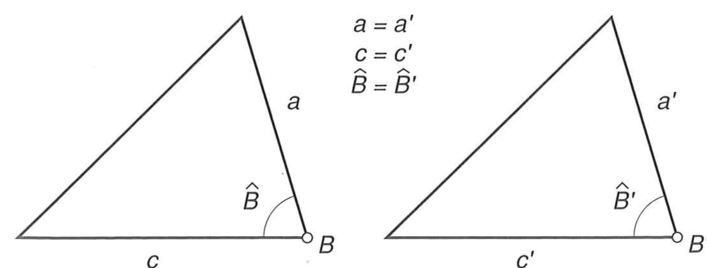


Fig. 4.22. *Segunda condición de igualdad de triángulos.*

- Cuando tienen iguales dos ángulos y un lado (Fig. 4.23).

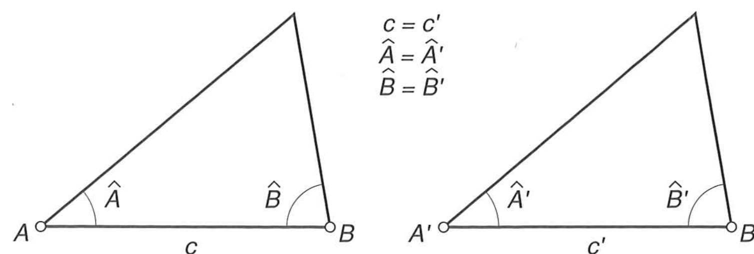


Fig. 4.23. *Tercera condición de igualdad de triángulos.*

b) Dos triángulos son semejantes si se cumple una de las siguientes condiciones:

- Cuando tienen los lados proporcionales (Fig. 4.24).
- Cuando tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo determinan (Fig. 4.25).

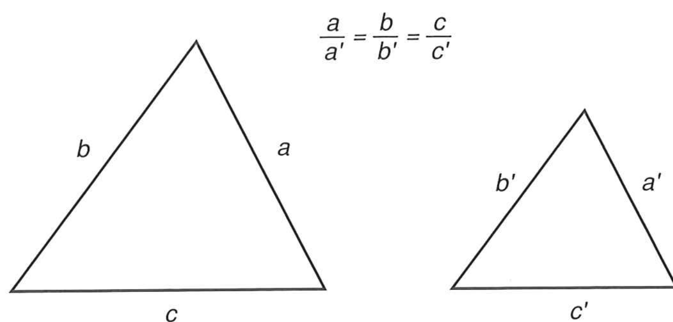


Fig. 4.24. *Primera condición de semejanza de triángulos.*

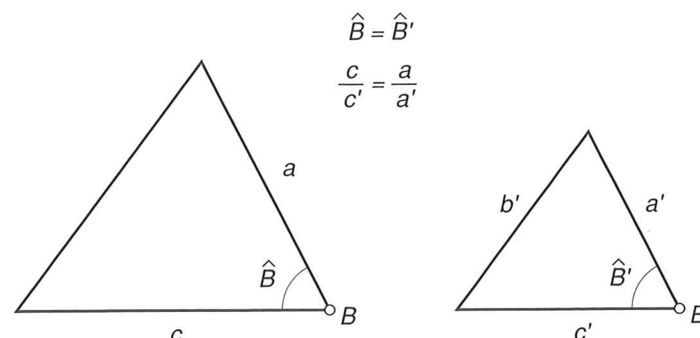


Fig. 4.25. *Segunda condición de semejanza de triángulos.*

- Cuando tienen dos ángulos iguales (Fig. 4.26).

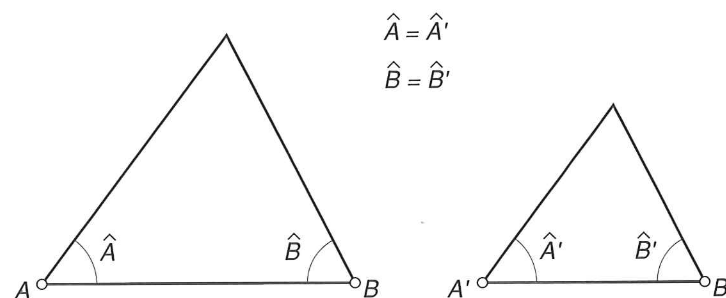


Fig. 4.26. *Tercera condición de semejanza de triángulos.*

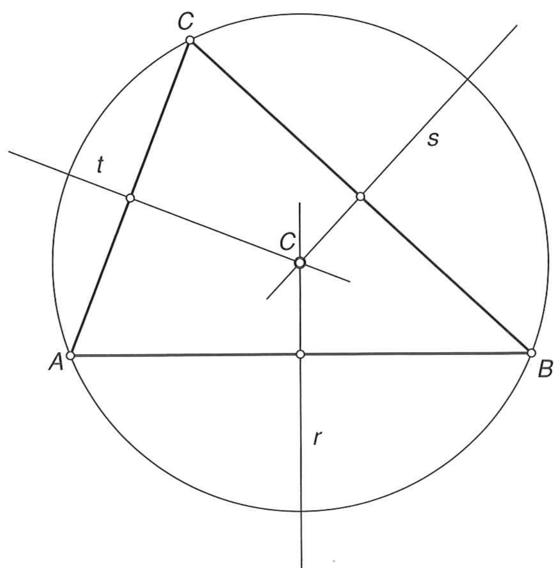


Fig. 4.27. *Mediatrices y circuncentro.*

F. Rectas y puntos notables en el triángulo

Mediatriz y circuncentro

Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados trazadas en su punto medio. Las mediatrices se cortan en un punto denominado **circuncentro.** Este punto es además el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (Fig. 4.27).

Bisectriz e incentro

Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que pasando por los vértices de los ángulos del triángulo dividen a cada uno de ellos en dos ángulos iguales, y se cortan en un punto llamado **incentro.** Este punto es además el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (Fig. 4.28).

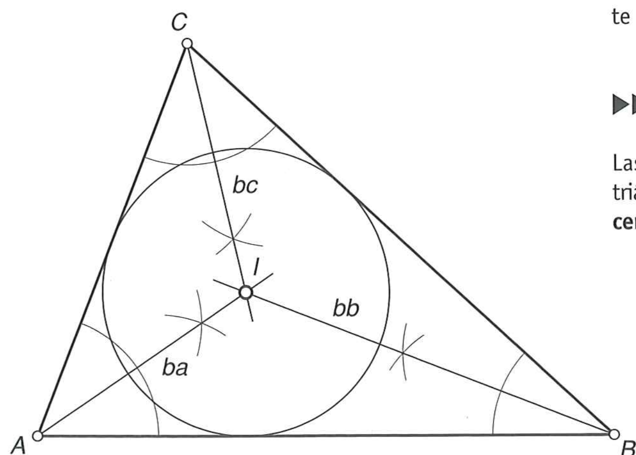
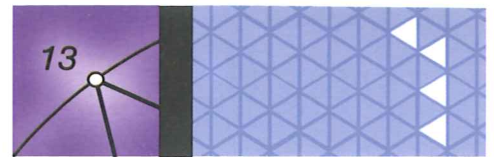


Fig. 4.28. *Bisectrices e incentro.*



▶▶▶ Alturas y ortocentro

Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice al lado opuesto del mismo. El punto donde se cortan estas rectas se llama **ortocentro.** Al unir los pies de las alturas el triángulo que resulta se denomina **triángulo órtico** (Fig. 4.29).

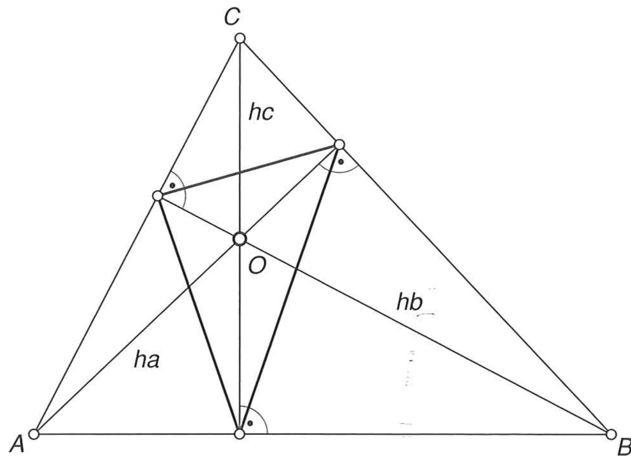


Fig. 4.29. *Alturas, ortocentro y triángulo órtico.*

▶▶▶ Medianas y baricentro

Las **medianas** de un triángulo son las rectas que unen cada vértice de él con el punto medio del lado opuesto. El punto donde se cortan estas rectas se llama **baricentro** (Fig. 4.30).

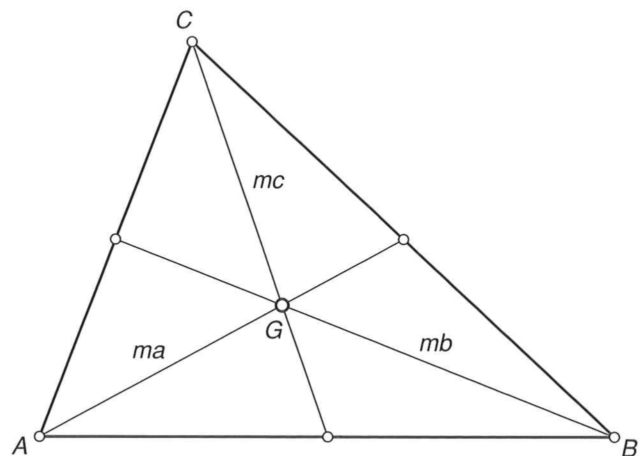


Fig. 4.30. *Medianas y baricentro.*

▶▶ G. Recta de Euler

Se verifica que en cualquier triángulo el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados. La recta que une estos tres puntos se denomina **recta de Euler** (Fig. 4.31).

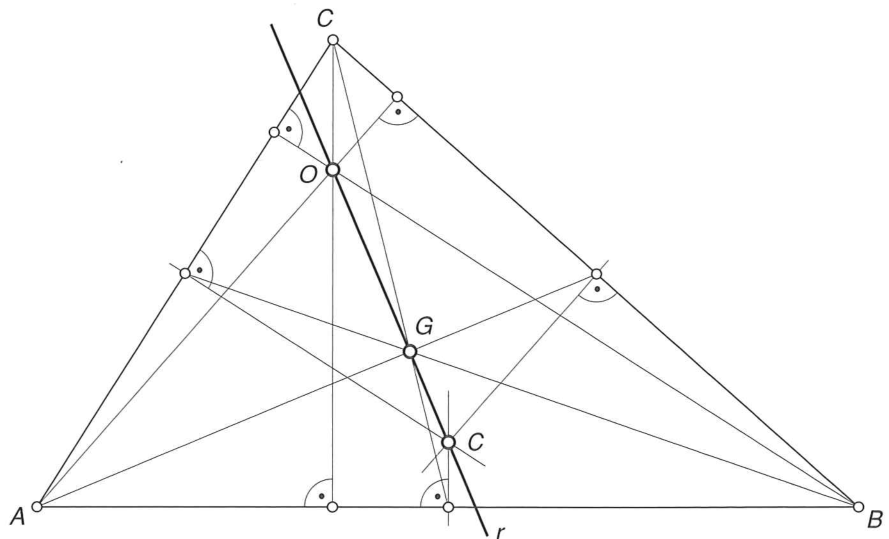


Fig. 4.31. *Recta de Euler.*

▶▶ H. Construcción de triángulos

Para poder construir un triángulo es necesario conocer tres datos de todos los que lo componen (lados, ángulos, etc.). Si aplicamos la fórmula para saber el número de datos necesarios para poder determinar un polígono ($2n - 3 = N$), observamos que: **2 X 3 – 3 = 3 datos.** Sin embargo, hay algunos triángulos, que dadas sus características particulares, con menos datos puede realizarse su construcción; por ejemplo, un triángulo equilátero puede construirse sabiendo sólo el valor de uno de sus lado, dado que los tres lados de un triángulo equilátero son iguales. Es decir, hay ocasiones en que los datos están implícitos dadas las características del triángulo a construir.

No obstante, hay una excepción: si de un triángulo conocemos sólo sus tres ángulos las soluciones son infinitas, por tanto sería necesario conocer otro dato del mismo para poder definirlo. También hay que tener en cuenta que el número de soluciones en la construcción de triángulos no siempre es único, hay ocasiones donde hay más de una.

▶▶▶ Construcciones de triángulos escalenos

En este tipo de triángulos, al tener los lados y los ángulos desiguales, es necesario conocer tres datos para realizar su construcción, sean éstos lados o lados y ángulos.

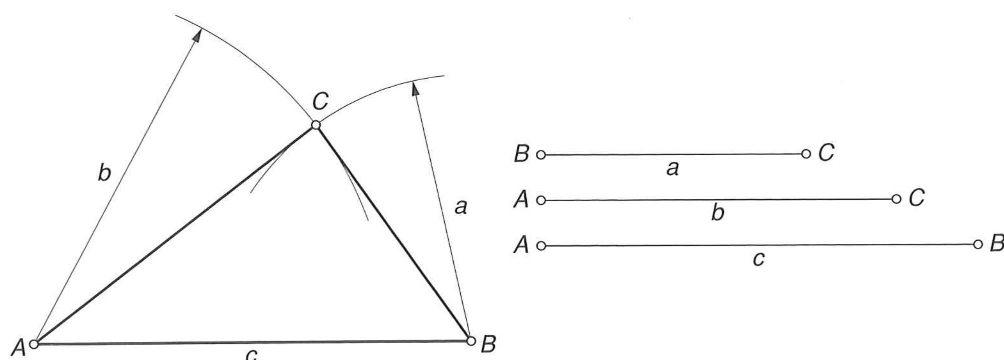


Fig. 4.32. *Construcción de un triángulo conociendo sus tres lados.*

Conociendo sus tres lados

1. Se toma como base el lado mayor *AB* = *c*. Con centro en el vértice *A*, se traza un arco con una abertura de compás igual al lado *b*.

2. Con centro en el vértice *B*, se dibuja otro arco, pero ahora con una abertura del valor del lado *a*. De esta forma se obtiene el vértice *C*, en el que se cortan esos arcos.

3. Al unir *A* y *B* con *C* queda construido el triángulo (Fig. 4.32).

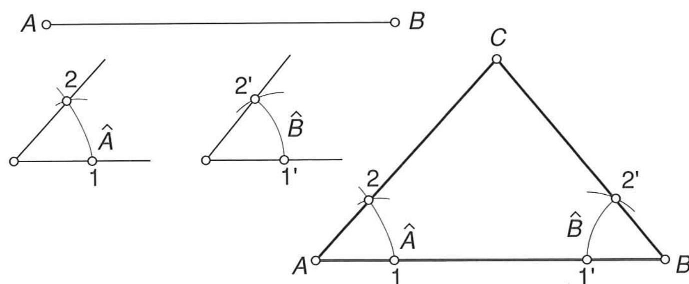


Fig. 4.33. *Construcción de un triángulo conociendo un lado y los dos ángulos contiguos.*

Conociendo un lado y los dos ángulos contiguos

1. Se dibuja un segmento *AB* con el valor del lado conocido.

2. Sobre *A* y *B* se dibujan ángulos iguales a los dados, $\hat{A}$ y $\hat{B}$. La intersección de los lados de los ángulos que se han construido determinan el vértice *C* del triángulo.

3. Para terminar de trazar el triángulo sólo hay que unir los vértices *A*, *B* y *C* (Fig. 4.33).

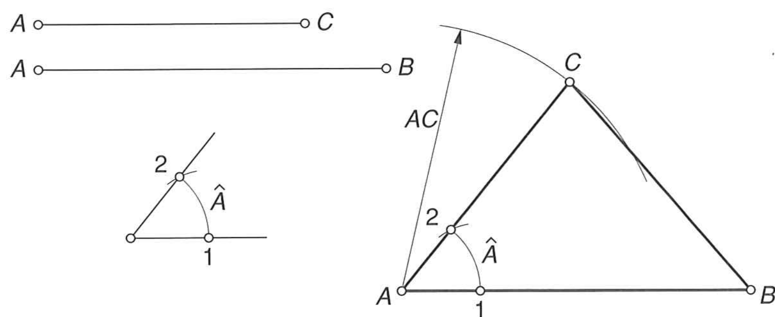


Fig. 4.34. *Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo que comprenden.*

Conociendo dos lados y el ángulo que comprenden

1. Se traza el lado *AB*.

2. Sobre *A* se dibuja un ángulo igual al dado, $\hat{A}$. Con centro en *A* y radio *AC* se traza un arco. Donde dicho arco corte al lado del ángulo determina el vértice *C* del triángulo.

3. Sólo hace falta unir *A*, *B* y *C* para determinar el triángulo (Fig. 4.34).

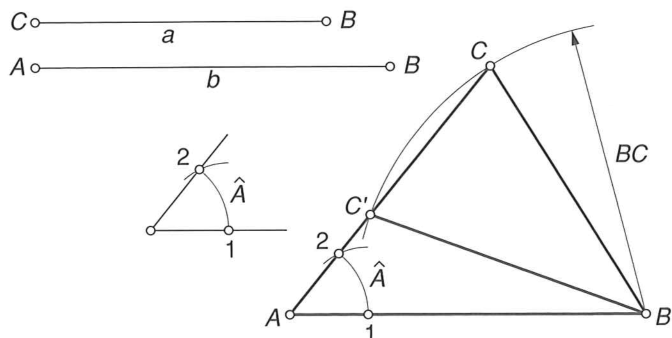


Fig. 4.35. *Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a ellos.*

Conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

1. Se traza el lado *AB*.

2. Sobre el vértice *A* se dibuja el ángulo igual al dado, $\hat{A}$. Con centro en *B* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado del ángulo anteriormente trazado en los vértices *C* y *C'*.

3. En este caso tenemos dos posibles soluciones: unir *A*, *B* y *C*, o unir *A*, *B* y *C'* (Fig. 4.35).



▶▶▶ Construcciones de triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos se pueden construir conociendo sólo dos de todos sus datos, dado que conocemos de ellos que tienen un ángulo recto y dos agudos.

Otro aspecto importante para su construcción es conocer las **relaciones métricas** que tienen entre sus componentes. Por ejemplo, los que nos desvelan los siguientes teoremas:

- **Teorema de la altura:** la altura trazada desde el vértice opuesto a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta última (Fig. 4.36):

$$h^2 = BC \cdot CH$$

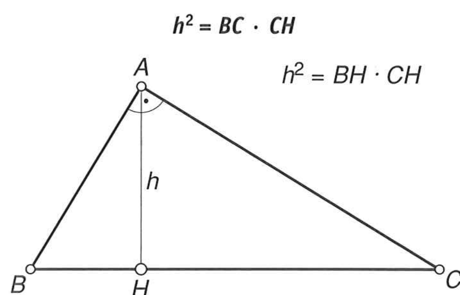


Fig. 4.36. *Teorema de la altura.*

- **Teorema del cateto:** los catetos son media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella (Fig. 3.37):

$$BA^2 = BC \cdot BH \text{ ; y } CA^2 = CB \cdot CH$$

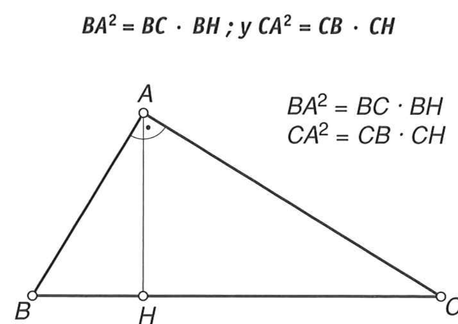


Fig. 4.37. *Teorema del cateto.*

- **Teorema de Pitágoras:** la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa (Fig. 4.38):

$$b^2 + c^2 = a^2$$

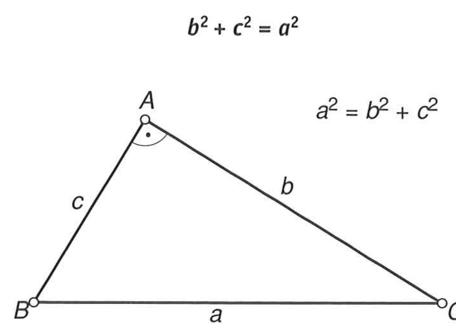


Fig. 4.38. *Teorema de Pitágoras.*

Conociendo un cateto y la hipotenusa

1. Se traza un segmento *AB* con el valor del cateto conocido.
2. Por el punto *A* se dibuja una perpendicular al segmento *AB*. Con centro en el punto *B* y radio igual al valor de la hipotenusa, se traza un arco que corta a la perpendicular en el punto *C*.
3. Para terminar de construir el triángulo, sólo hay que unir los vértices *A*, *B* y *C* (Fig. 4.39).

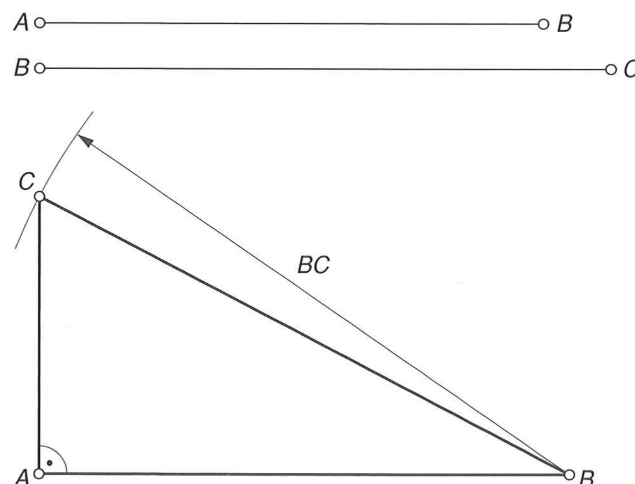


Fig. 4.39. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa.*

Conociendo un cateto y el ángulo opuesto

1. Se traza un segmento *AB* con el valor del cateto conocido, y se dibuja una perpendicular por *A*.
2. Se toma un punto *P* cualquiera de la perpendicular y se construye un ángulo $\hat{C}$ igual al dado.
3. Desde *B* se traza una paralela al lado del ángulo $\hat{C}$, y su intersección con la perpendicular determina el punto *C*. Por último, se unen los puntos *A*, *B* y C para determinar el triángulo (Fig. 4.40).

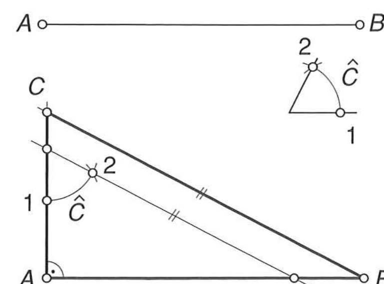


Fig. 4.40. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y el ángulo opuesto.*

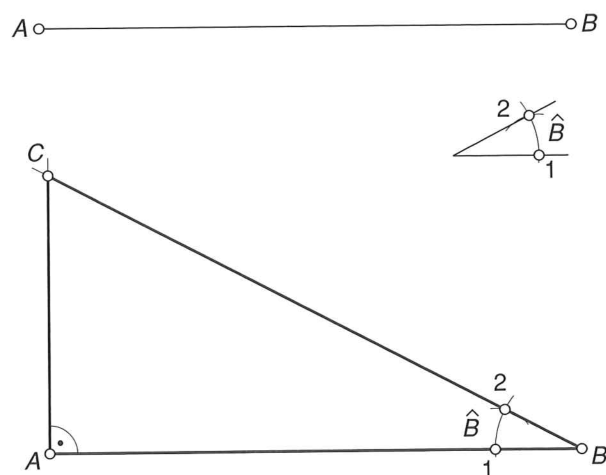


Fig. 4.41. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y un ángulo contiguo.*

Conociendo un cateto y un ángulo contiguo

1. Se traza un segmento *AB* con el valor del cateto conocido, y se dibuja una perpendicular por *A*.

2. Sobre el vértice *B* se dibuja un ángulo igual al dado $\hat{B}$, se prolonga dicho lado del ángulo hasta que corte a la perpendicular trazada anteriormente en *A*, obteniendo el vértice *C*.

3. Se unen los puntos *A*, *B* y *C* y obtenemos el triángulo buscado (Fig. 4.41).

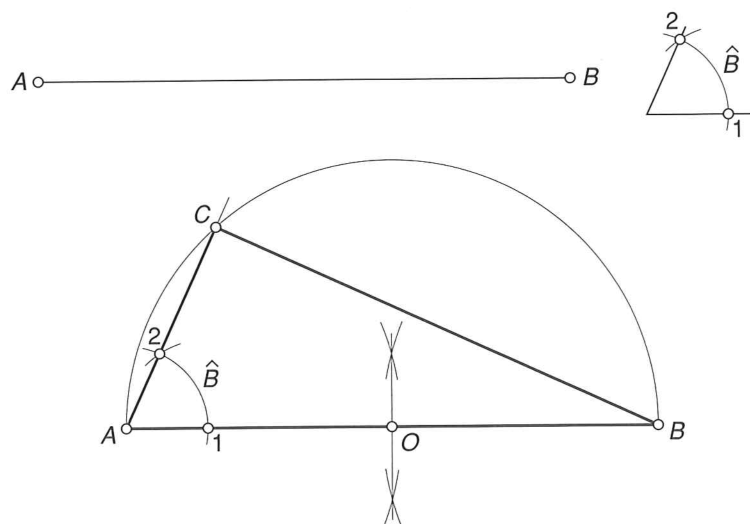


Fig. 4.42. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo contiguo.*

Conociendo la hipotenusa y un ángulo contiguo

1. Se traza un segmento con el valor de la hipotenusa, y se traza una semicircunferencia desde el punto *O*, centro de la hipotenusa, (arco capaz del ángulo recto), y radio *OB*.

2. Desde *B* se dibuja el ángulo dado cuyo lado cortará al arco en el punto *A*, vértice opuesto a la hipotenusa.

3. Se unen los puntos *A*, *B* y *C* y obtenemos el triángulo buscado (Fig. 4.42).

▶▶▶ Construcciones de triángulos equiláteros

El triángulo equilátero tiene los tres lados y los tres ángulos iguales, es decir, es un polígono regular. Por tanto, para su construcción sólo se necesita un dato. En este apartado veremos dos formas de construirlo.

Conociendo su lado

1. Se dibuja un segmento *AB* con el valor del lado dado.

2. Se toman como centro, de manera sucesiva, los vértices *A* y *B*, y con radio *AB*, se trazan dos arcos que determinan el punto *C*, que es el vértice opuesto al lado *AB*.

3. Al unir el punto *C* con *A* y con *B*, se obtiene el triángulo equilátero (Fig. 4.43).

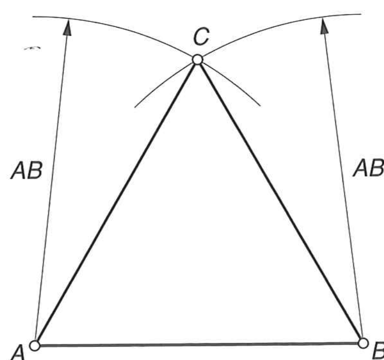
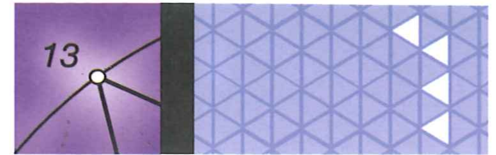


Fig. 4.43. *Construcción de un triángulo equilátero conociendo su lado.*



Conociendo su altura

1. Sobre una recta *r* se toma un punto *O* cualquiera por el que se traza una perpendicular a la recta *r*.
2. Sobre dicha perpendicular se lleva el valor de la altura *h* del triángulo, obteniendo el punto *C*, y se divide en tres partes iguales. Por la división 2 se traza una circunferencia de radio 2*C* que corta a r en *A* y *B*.
3. Para terminar de construir el triángulo sólo hay que unir los vértices *A*, *B* y *C* (Fig. 4.44).

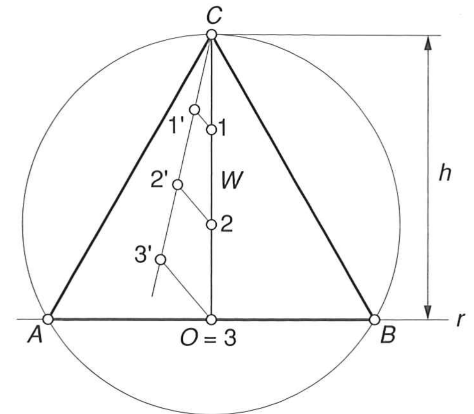


Fig. 4.44. Construcción de un triángulo equilátero conociendo su altura.

▶▶▶ Construcciones de triángulos isósceles

Los triángulos isósceles, al igual que los triángulos rectángulos, pueden construirse conociendo sólo dos de sus datos. La razón es porque tienen dos lados y dos ángulos iguales.

Conociendo la base y el ángulo opuesto

1. Se dibuja un segmento *AB* con el valor de la base del triángulo y se traza su mediatriz.
2. Se traza el arco capaz del ángulo dado, $\hat{C}$, que como se sabe pasa por los puntos *A* y *B*. Además, el arco corta a la mediatriz en el punto *C*, que es el vértice del ángulo opuesto al lado *AB*.
3. Al unir *A* y *B* con *C* queda construido el triángulo (Fig. 4.45).

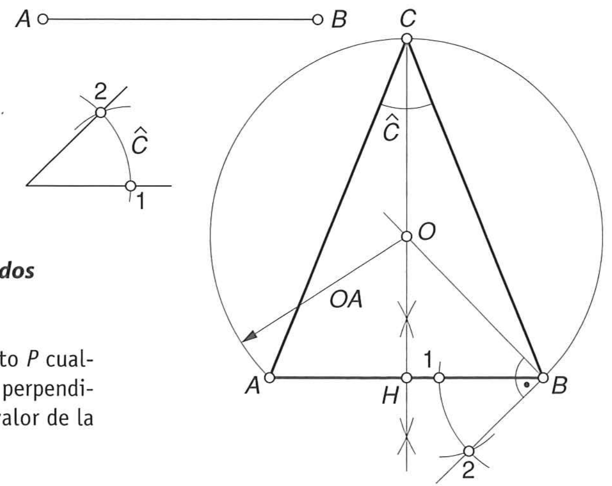


Fig. 4.45. Construcción de un triángulo isósceles conociendo la base y un ángulo opuesto.

Conociendo la base y la altura

1. Se dibuja la base *AB* y se traza su mediatriz, con lo que se obtiene el punto *O*.
2. A partir de *O*, y sobre esta mediatriz, se sitúa la magnitud *h*, altura del triángulo, con la ayuda del compás. De este modo, se obtiene el vértice *C*.
3. Al unir *A* y *B* con *C* queda construido el triángulo (Fig. 4.46).

Conociendo la altura y uno de los lados iguales

3. Se toma sobre una recta *r* un punto *P* cualquiera. A partir de él, se traza una perpendicular a *r* sobre la que se lleva el valor de la altura, *h*, obteniendo el punto *C*.
2. Con centro en *C* y radio *AC* se dibuja un arco que corta a la recta *r* en los puntos *A* y *B*.
3. Al unir *A*, *B* y *C* queda determinado el triángulo (Fig. 4.47).

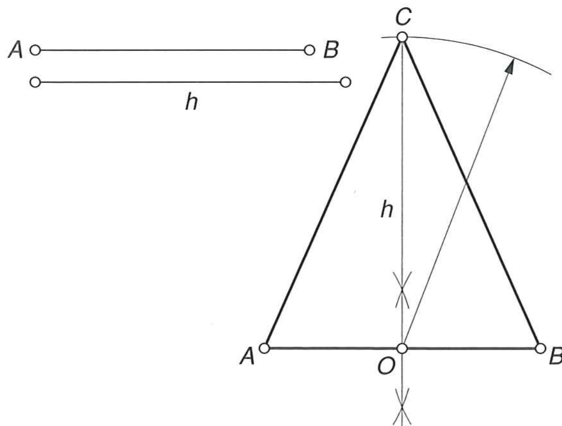


Fig. 4.46. Construcción de un triángulo isósceles conociendo la base y la altura.

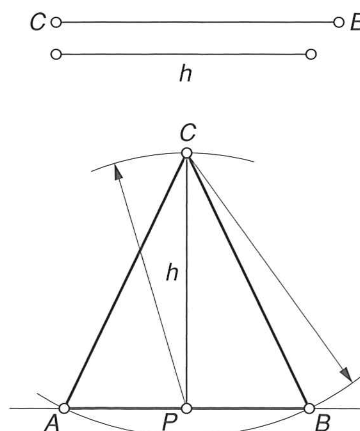


Fig. 4.47. Construcción de un triángulo isósceles conociendo la altura y uno de los lados iguales.

13

4. Polígonos

Actividades con triángulos

Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo un polígono es cóncavo, y cuándo convexo?
2. Denominamos polígono circunscriptible al que puede inscribirse en una circunferencia ¿Esta definición es correcta? Si piensas que no es correcta, expón dónde esta el error y defínela correctamente.
3. Cita las clasificaciones de triángulos que hay.
4. ¿A qué denominamos incentro y a qué ortocentro en un triángulo?
5. ¿Cómo se denomina el punto donde se cortan las medianas de un triángulo?
6. ¿Cómo podemos trazar la recta de Euler en un triángulo?
7. Un triángulo ¿cuántos ángulos obtusos puede tener?
8. Expón la fórmula con la que sabemos qué número de datos necesitamos para poder determinar un triángulo.
9. ¿Cuántos datos necesitamos para construir un triángulo equilátero? ¿Y un triángulo rectángulo? Explica el porqué de manera razonada.
10. ¿Qué relaciones métricas entre los elementos de un triángulo rectángulo nos desvelan los teoremas del cateto y de la altura?

Ejercicios

1. Dibuja un triángulo trazando tres rectas que se corten. Coloca las letras correspondientes a los vértices, lados y ángulos. Posteriormente, determina su baricentro y su circuncentro.
2. Dibuja un triángulo cuyos lados sean: $a = 82$ mm, $b = 69$ mm y $c = 51$ mm.
3. Dibuja un triángulo conociendo los lados $a = 80$, $b = 70$, y el ángulo que comprenden dichos lados, 60°.
4. Dibuja un triángulo conociendo los lados $a = 77$ mm, $b = 58$ mm y el ángulo de 45° opuesto al lado b.
5. Dibuja un triángulo rectángulo conociendo que uno de sus catetos mide 55 mm, y su hipotenusa 80 mm.
6. Dibuja un triángulo rectángulo conociendo que uno de sus catetos mide 78 mm, y el ángulo contiguo 30°.
7. Dibuja un triángulo isósceles conociendo que el valor de su base es de 59 mm, y el ángulo opuesto a la base es de 45°.
8. Dibuja un triángulo equilátero de 67 mm de altura.
9. Dibuja la figura compuesta por tres triángulos, a escala 1:1. Las medidas pueden tomarse directamente de la Fig. 4.48.
10. Observa cómo partiendo de un triángulo equilátero se pueden realizar composiciones plásticas. Realiza la que aquí te presentamos siguiendo los pasos indicados en el dibujo (Fig. 4.49).

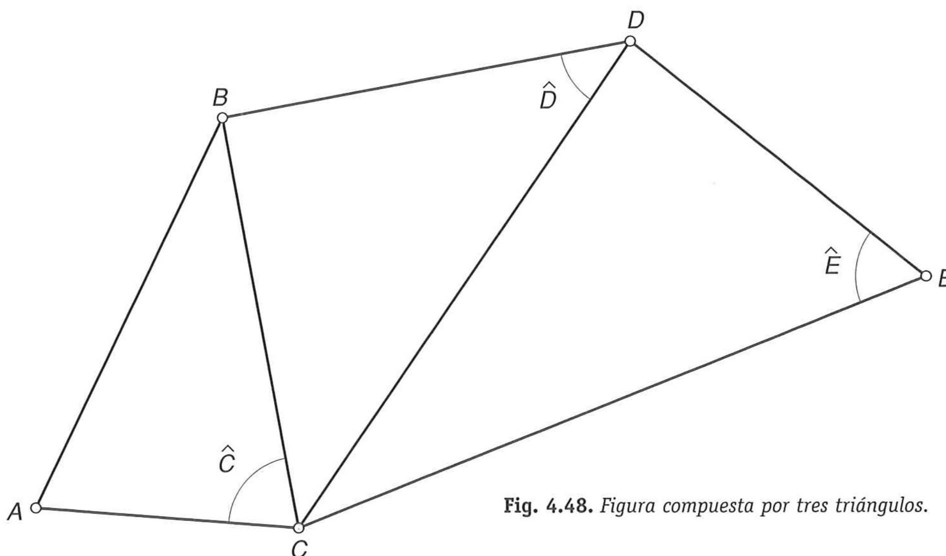


Fig. 4.48. *Figura compuesta por tres triángulos.*

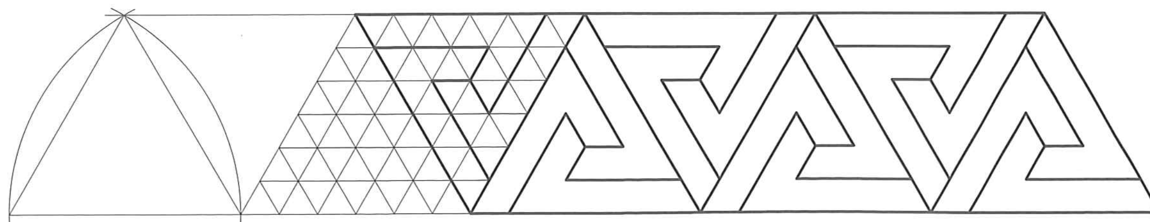


Fig. 4.49. *Composición a base de triángulos equiláteros.*



4.3. Cuadriláteros

A. Definición

Un cuadrilátero es una figura plana y cerrada limitada por cuatro rectas que se cortan dos a dos. Se denominan **vértices** a los puntos de intersección de las rectas, y los segmentos que los unen se llaman **lados**. Por tanto, se trata de polígonos que constan de cuatro lados y cuatro vértices.

Observa en la figura la nomenclatura que se utiliza para designar los vértices, los ángulos y los lados de un cuadrilátero. De igual modo que en el triángulo, sus vértices se designan con letras mayúsculas y sus lados con minúsculas (Fig. 4.50).

Se conoce como **diagonal** de un cuadrilátero la recta que une dos vértices no consecutivos. Los cuadriláteros poseen dos diagonales que los dividen en dos triángulos.

Por tanto, un cuadrilátero esta compuesto por los siguientes elementos: cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos y dos diagonales.

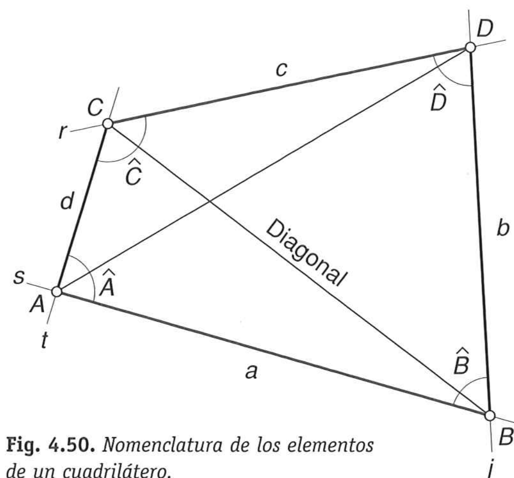


Fig. 4.50. *Nomenclatura de los elementos de un cuadrilátero.*

B. Propiedades

1. Los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre suman 360° (Fig. 4.51).

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

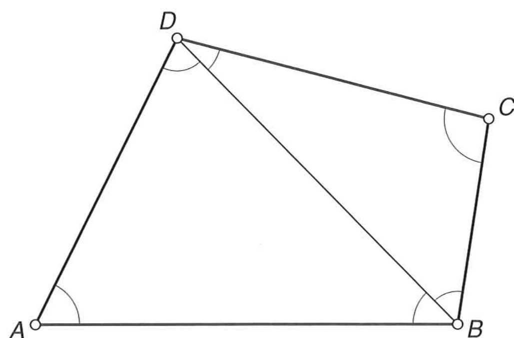


Fig. 4.51. *Demostración gráfica de la Propiedad 1.*

2. Cuando la suma de los lados opuestos de un cuadrilátero coinciden, éste puede circunscribir a una circunferencia, es decir es **circunscriptible** (Fig. 4.52).

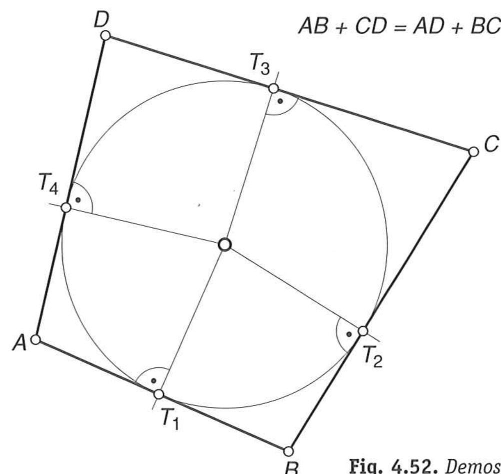


Fig. 4.52. *Demostración de la Propiedad 2.*

3. Cuando los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, éste se puede inscribir en una circunferencia, es decir, es **inscriptible** (Fig. 4.53).

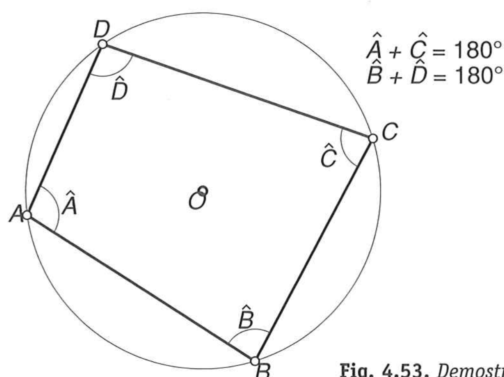


Fig. 4.53. *Demostración de la Propiedad 3.*

4. Si se unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, se obtiene un paralelogramo (Fig. 4.54 de la página siguiente).

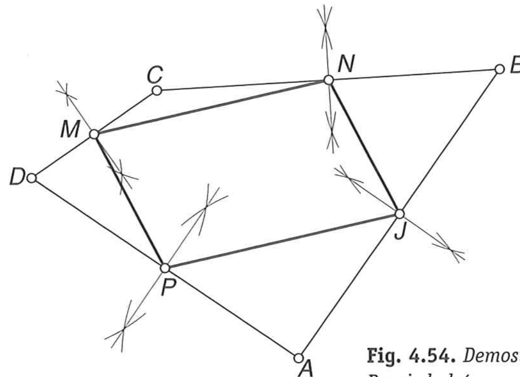


Fig. 4.54. *Demostración de la Propiedad 4.*



C. Clasificación

Teniendo en cuenta el paralelismo de los lados de un cuadrilátero, éstos pueden clasificarse en: **paralelogramos, trapecios** y **trapezoides.**

Paralelogramos

Los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sus lados paralelos dos a dos. Se clasifican a su vez en:

- **Cuadrado:** sus lados son iguales y paralelos dos a dos. Todos sus ángulos son rectos. Sus diagonales son iguales, perpendiculares y se cortan en el punto medio, es decir se bisecan, formando ángulos de 90° (Fig. 4.55).

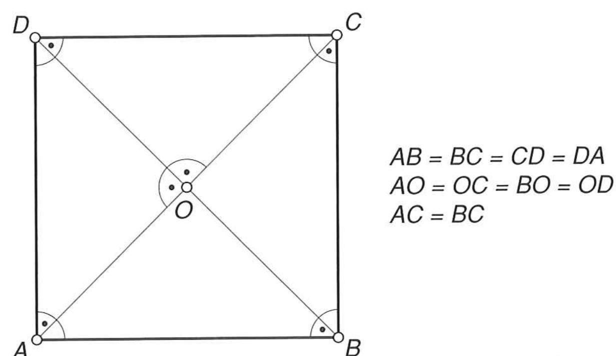


Fig. 4.55. *Cuadrado.*

- **Rectángulo:** sus lados paralelos son iguales entre sí. Todos sus ángulos son rectos. Sus diagonales son iguales, pero no perpendiculares, y al bisecarse forman ángulos diferentes a 90° (Fig. 4.56).

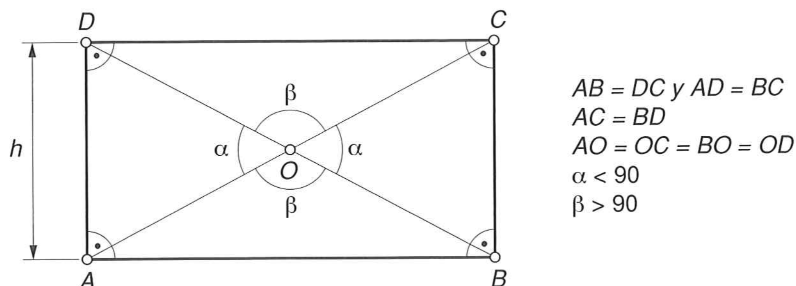


Fig. 4.56. *Rectángulo.*

- **Rombo:** los lados son iguales y paralelos dos a dos. Sus ángulos no son rectos, y los que son opuestos, es decir, los que están uno enfrente de otro, son iguales. Sus diagonales son desiguales, perpendiculares, y al bisecarse forman ángulos de 90° (Fig. 4.57).

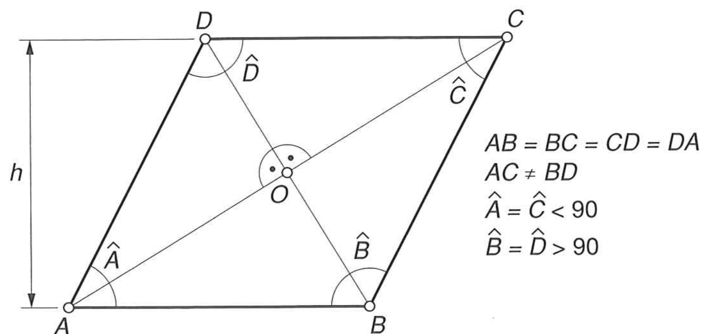


Fig. 4.57. *Rombo.*

- **Romboide:** los lados paralelos son iguales entre sí. Sus ángulos no son rectos, y los ángulos opuestos son iguales. Sus diagonales son desiguales, oblicuas y se bisecan formando ángulos diferentes a 90° (Fig. 4.58).

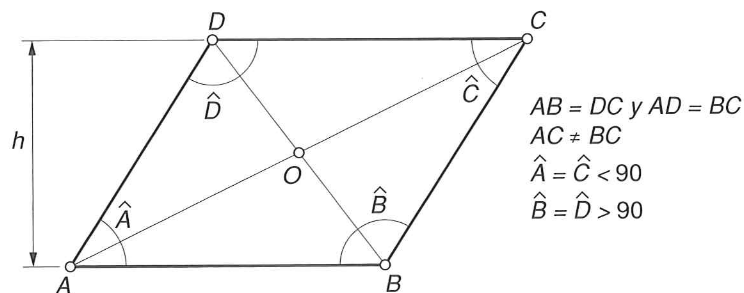
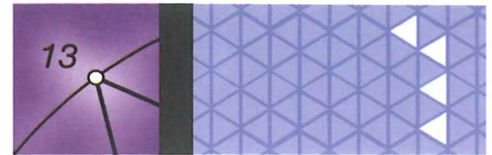


Fig. 4.58. *Romboide.*



Trapecios

Los trapecios son cuadriláteros que tienen dos lados paralelos, a los que se les denomina bases del trapecio. Se clasifican a su vez del modo siguiente:

- **Trapecio rectángulo:** dos de sus lados son paralelos y dos ángulos rectos. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan (Fig. 4.59).

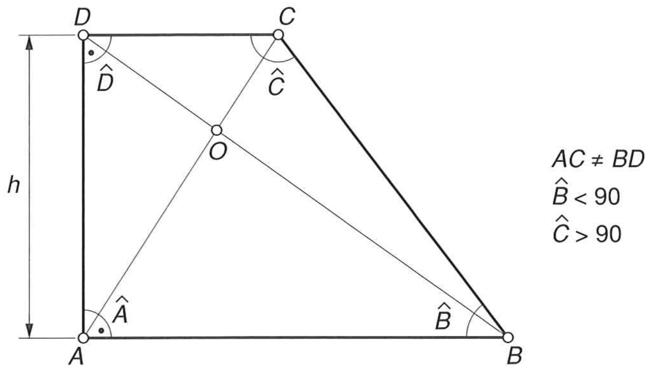


Fig. 4.59. *Trapecio rectángulo.*

- **Trapecio isósceles:** dos de sus lados son paralelos y sus ángulos iguales dos a dos. Las diagonales son iguales, oblicuas y no se bisecan (Fig. 4.60).

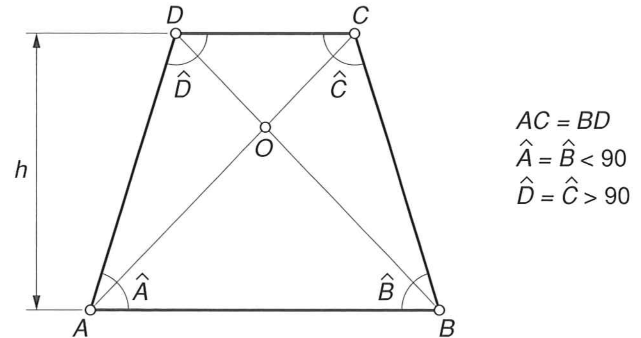


Fig. 4.60. *Trapecio isósceles.*

- **Trapecio escaleno:** dos de sus lados son paralelos y sus ángulos son desiguales. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan (Fig. 4.61).

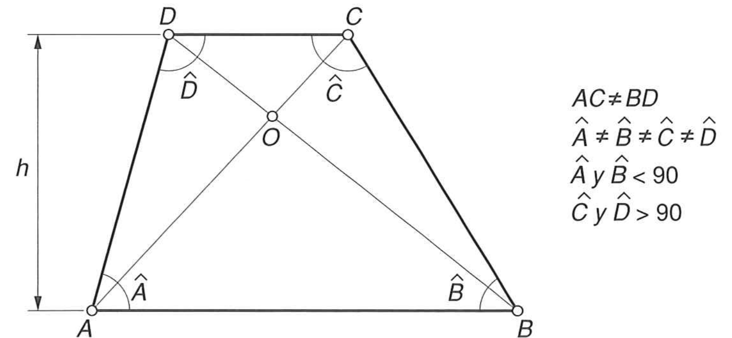


Fig. 4.61. *Trapecio escaleno.*

Trapezoides

Los trapezoides son cuadriláteros que no tienen lados paralelos, y tanto sus lados como sus ángulos son desiguales (Fig. 4.62).

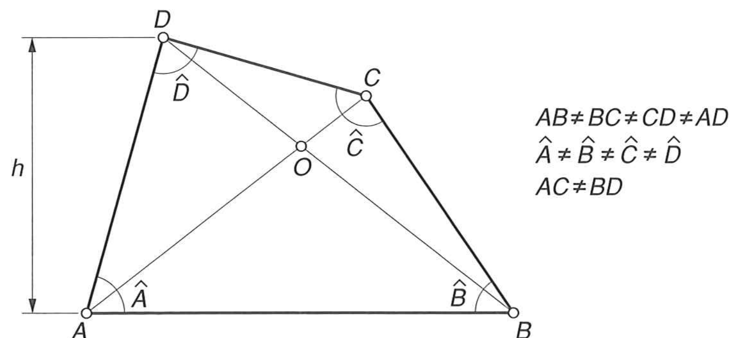


Fig. 4.62. *Trapezoide.*

D. Construcción de cuadriláteros

Si aplicamos la formula $2n - 3 = N$, los datos necesarios para poder construir un cuadrilátero serán: $2 \cdot 4 - 3 = 5$ datos. Sin embargo, en el caso del cuadrado basta con saber el valor del lado, o el de la diagonal, para poder construirlo; esto es debido a que al tener lados y ángulos iguales basta sólo un dato.

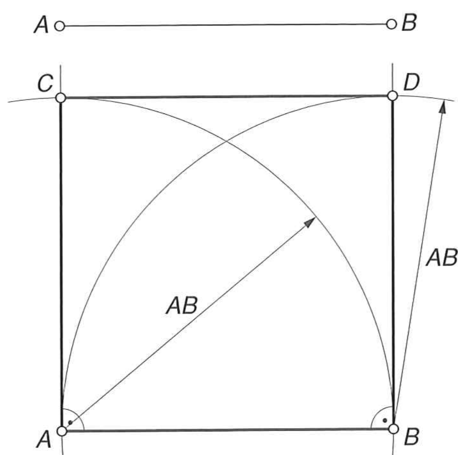


Fig. 4.63. *Construcción de un cuadrado conociendo el lado.*

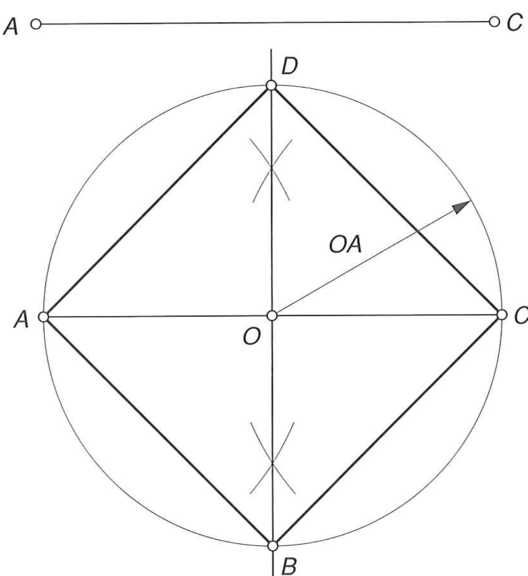


Fig. 4.64. *Construcción de un cuadrado conociendo la diagonal.*

E. Construcciones de paralelogramos

El cuadrado

Al tener sus cuatro lados y ángulos iguales, sólo es necesario para su construcción un dato, por ejemplo el lado, o la diagonal.

Conociendo el lado

1. Se dibuja el lado dado *AB* y se toma como base del cuadrado. Desde dichos puntos se trazan dos perpendiculares.
2. Se hace centro en *A* y en *B*, y con radio igual al lado se trazan dos arcos hasta cortar a las perpendiculares en los puntos *C* y *D*, respectivamente.
3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D* determinando así el cuadrado (Fig. 4.63).

Conociendo la diagonal

1. Se dibuja un segmento con el valor de la diagonal *AC*, y se traza su mediatriz obteniendo el punto *O*.
2. Se traza una circunferencia con centro en *O* y radio *OA*; donde ésta corta a la mediatriz se obtienen los vértices *B* y *D*.
3. Basta con unir *A*, *B*, *C* y *D* para construir el cuadrado (Fig. 4.64).

El rectángulo

Al tener sus lados paralelos e iguales dos a dos, y sus ángulos iguales, sólo es necesario para su **construcción** dos datos.

Conociendo el lado mayor y el menor

1. Se dibuja el lado mayor *AB* y por los puntos *A* y *B* se trazan dos perpendiculares.
2. Con centro en *A* y en *B*, y radio *AC* se trazan dos arcos que cortan a las perpendiculares en los puntos *C* y *D*, respectivamente.
3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el rectángulo (Fig. 4.65).

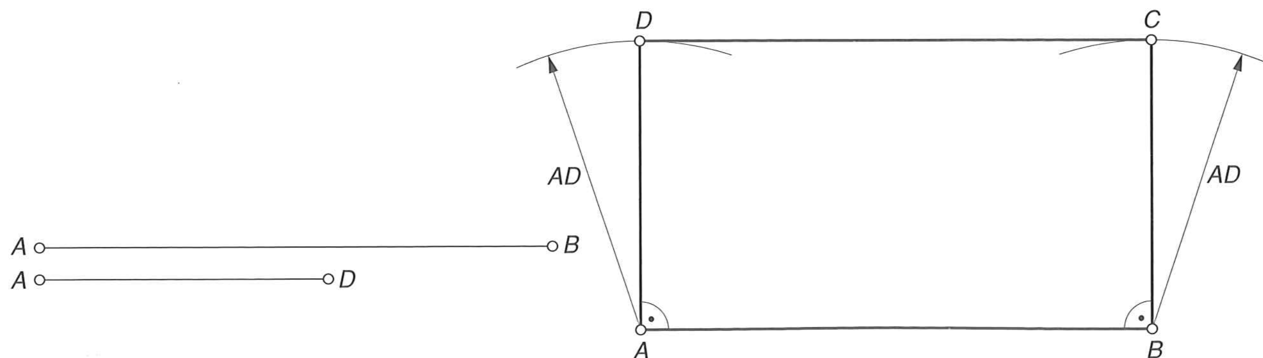


Fig. 4.65. *Construcción de un rectángulo conociendo el lado mayor y el menor.*



Conociendo la diagonal y el lado

1. Se dibuja la diagonal *AC* y se halla su mediatriz, obteniendo el punto *O*. Se traza una circunferencia con centro en *O* y radio *OA*.
2. Con centro en *A* y en *C*, y radio *AB*, se trazan dos arcos que cortan a la circunferencia en *B* y en *D*, respectivamente.
3. Basta con unir *A*, *B*, *C* y *D* para construir el rectángulo (Fig. 4.66).

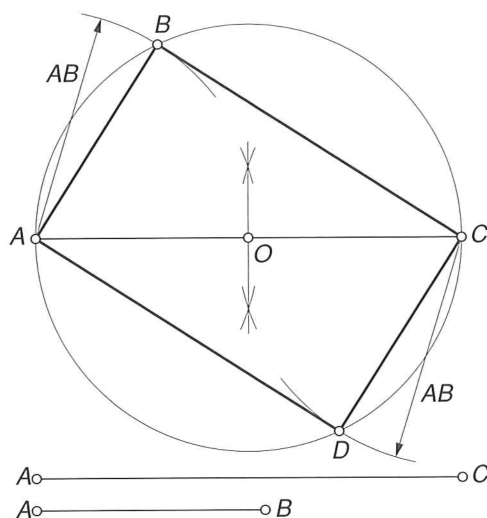


Fig. 4.66. *Construcción de un rectángulo conociendo la diagonal y el lado.*

Conociendo la suma de los lados (mayor y menor) y la diagonal

1. Se dibuja el segmento *AP*, suma de *AB* y *BC*, (*AP* = *AB* + *BC*). Sobre *P* se traza un ángulo de 45°.
2. Con centro en *A* y radio *AC* (valor de la diagonal), se traza un arco que corta al lado del ángulo de 45° en el punto *C*, y desde este punto se traza una perpendicular al segmento *AP*, obteniendo el punto *B*. *A* continuación se toman como centros los puntos *A* y *C*, y con radios *BC* y *AB*, respectivamente, se dibujan dos arcos que se cortan en el vértice *D*.
3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el rectángulo (Fig. 4.67).

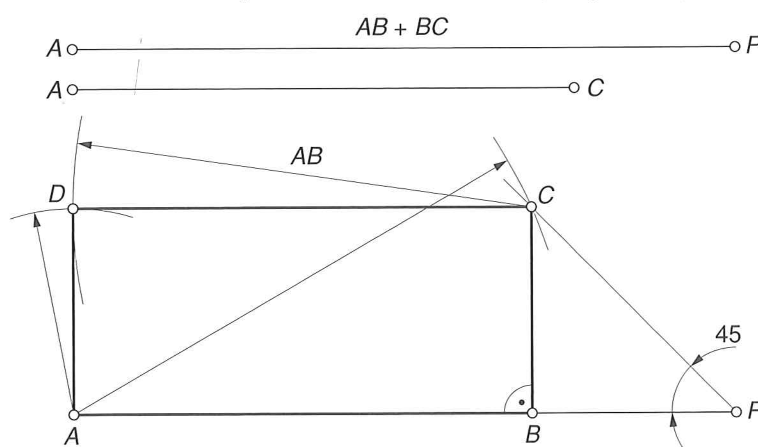


Fig. 4.67. *Construcción de un rectángulo conociendo la suma de los lados y la diagonal.*

▶▶▶ El rombo

Este polígono tiene sus lados iguales y paralelos dos a dos; por ello, es suficiente para su construcción conocer sólo dos datos.

Conociendo sus diagonales

1. Se dibuja la diagonal *AC* y se traza su mediatriz obteniendo el punto *O*.
2. Sobre dicha mediatriz y a partir de *O* se sitúa la semidiagonal *BD*, es decir, *BD*/2 en los dos sentidos, determinando de este modo los puntos *B* y *D*.
3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el rombo (Fig. 4.68).

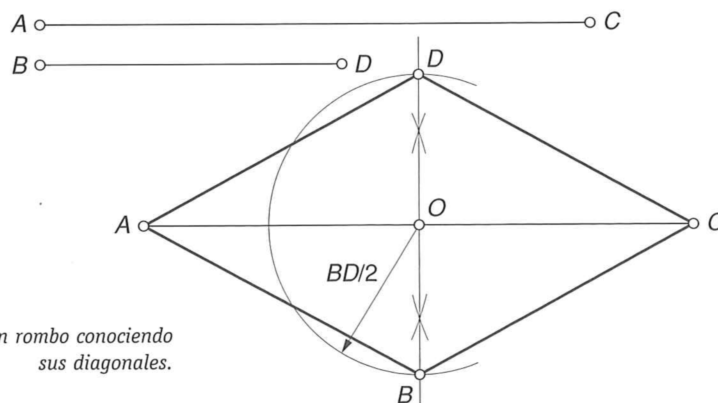


Fig. 4.68. *Construcción de un rombo conociendo sus diagonales.*

Conociendo el lado y un ángulo

1. Se dibuja el lado, AB, y sobre A se traza el ángulo dado $\hat{A}$.
2. Se hace centro en A, y con radio AB se realiza un arco que corta al lado del ángulo en el punto D. Con centro en B y en D, y con el mismo radio AB, se dibujan dos arcos que se cortan en el punto C.
3. Se unen A, B, C y D, determinando así el rombo (Fig. 4.69).

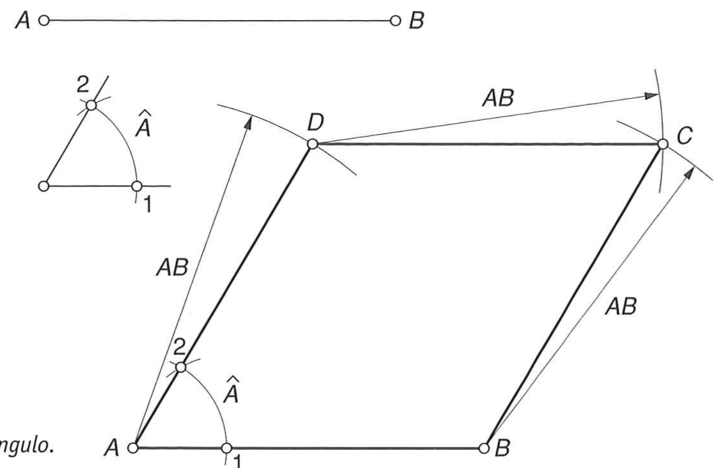


Fig. 4.69. *Construcción de un rombo conociendo el lado y un ángulo.*

▶▶▶ El romboide

Este paralelogramo tiene sus lados y ángulos paralelos dos a dos, de ahí que para su determinación sean necesarios tres datos.

Conociendo los lados (mayor y menor) y un ángulo

1. Se dibuja el ángulo dado $\hat{A}$, y sobre sus lados se llevan los valores de los lados AB y AD. De este modo quedan determinados los vértices B y D del romboide.
2. Con centros en B y en D, y radios AD y AB respectivamente, se trazan dos arcos; donde éstos se corten determinan el vértice C.
3. Se unen A, B, C y D, determinando así el romboide (Fig. 4.70).

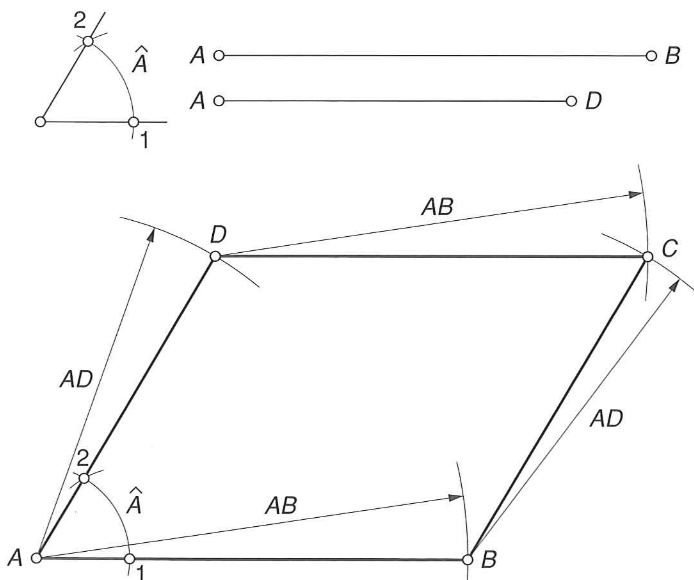


Fig. 4.70. *Construcción de un romboide conociendo sus lados y un ángulo.*

Conociendo los lados (mayor y menor) y la altura

1. Se dibuja el lado AB, y por B se traza una perpendicular llevando a partir de ese punto el valor de la altura h, obteniendo el punto P.
2. Por P se traza una paralela al lado AB. Con centros en A y en B, y radio AD (lado menor) se dibujan dos arcos respectivamente, que cortan a la paralela en los puntos C y D.
3. Se unen A, B, C y D, determinando así el romboide (Fig. 4.71).

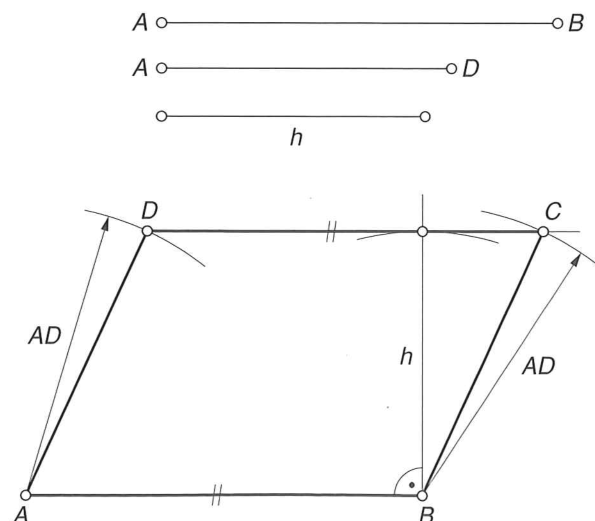


Fig. 4.71. *Construcción de un romboide conociendo los lados y la altura.*



Conociendo los lados (mayor y menor) y la diagonal

1. Se dibuja el lado *AB*. Con centros en *A* y en *B*, y radios *AD* (lado menor) y *BD* (diagonal), respectivamente, se trazan dos arcos; donde éstos se cortan determinan el vértice *D*.

2. Con centros en *D* y en *B*, y radios *AB* y *AD*, respectivamente, se trazan dos arcos; donde se cortan determinan el punto *C*.

3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el romboide (4.72).

Fig. 4.72. *Construcción de un romboide conociendo los lados y la diagonal.*

F. Construcciones de trapecios

Este tipo de paralelogramos, al tener dos lados paralelos, que son sus bases, necesitan cuatro datos para poder ser determinados. Sin embargo, en el caso de los trapecios rectángulos e isósceles, conociendo sólo tres es suficiente.

Trapecios rectángulos

Conociendo las bases y la altura

1. Se dibuja la base mayor *AB*. Por el punto *A* se traza una perpendicular y sobre ella se sitúa la altura *h*, obteniendo el punto *D*.

2. Por *D* se traza una paralela al lado *AB*. Con centro en *D* y radio *DC* (base menor) se traza un arco que corta a la paralela en el punto *C*.

3. Se unen *A*, *B*, *C*, y *D*, determinando de este modo el trapecio (Fig. 4.73).

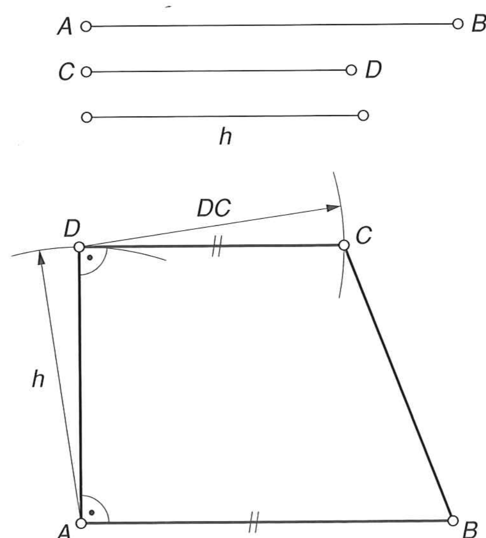


Fig. 4.73. *Construcción de un trapecio conociendo las bases y la altura.*

Conociendo las diagonales y una base

Fíjate en el dibujo y observa cómo este ejercicio se resuelve construyendo dos triángulos rectángulos: *ABD* y *ADC*.

1. Se dibuja el triángulo rectángulo de cateto *AB* e hipotenusa *BD* (diagonal mayor).

2. Se traza el triángulo rectángulo de cateto *AD* e hipotenusa *AC* (diagonal menor), obteniendo de este modo el punto *C* del trapecio.

3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el trapecio rectángulo (Fig. 4.74).

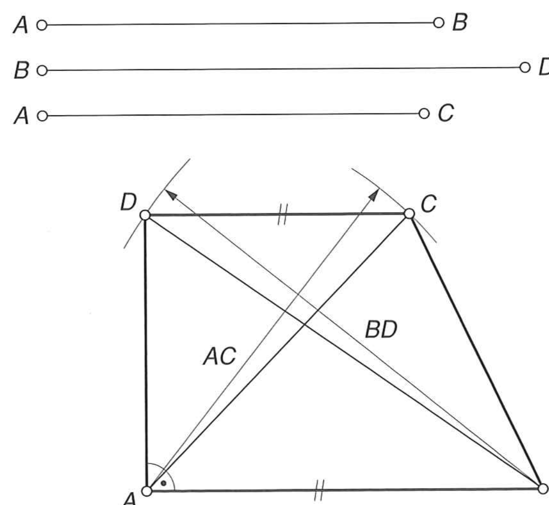


Fig. 4.74. *Construcción de un trapecio conociendo las diagonales y una base.*

Trapecios isósceles

Conociendo las bases y la altura

1. Se dibuja la base mayor *AB* y se traza su mediatriz, determinando el punto *M*. A partir de este punto se lleva la altura *h*, obteniendo así el punto *N* por el que trazamos una paralela a la base *AB*.

2. Se hace centro en *N*, y con un radio igual a la mitad de la base menor, es decir *CD*/2, se realiza un arco que corta a la paralela trazada anteriormente en los puntos *C* y *D*.

3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el trapecio isósceles (Fig. 4.75).

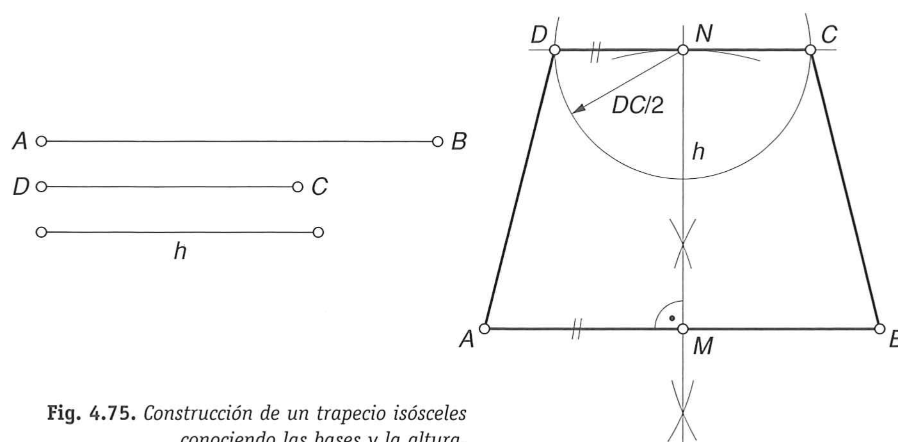


Fig. 4.75. *Construcción de un trapecio isósceles conociendo las bases y la altura.*

Conociendo la base mayor, la altura y un ángulo agudo

1. Se dibuja la base *AB*. A partir de los puntos *A* y *B* se traza el ángulo dado, $\hat{A}$. Se toma un punto cualquiera del segmento *AB*, por ejemplo *M*; a partir de él se traza una perpendicular sobre la que se lleva el valor de la altura *h*, determinando el punto *N*.

2. Se dibuja una paralela por *N* a *AB*; donde ésta corta a los lados de los ángulos anteriormente trazados, quedan determinados los puntos *C* y *D*.

3. Se unen A, B, C y D, determinando así el trapecio isósceles (Fig. 4.76).

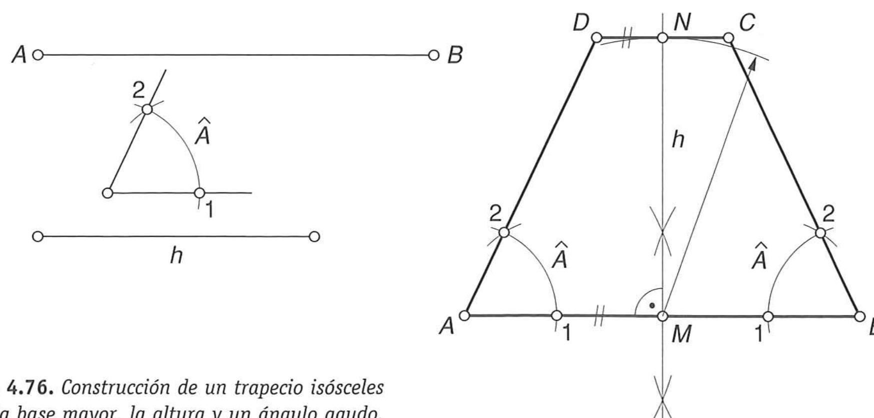


Fig. 4.76. *Construcción de un trapecio isósceles conociendo la base mayor, la altura y un ángulo agudo.*



▶▶▶ Trapecio escaleno, conociendo sus bases y sus diagonales

1. Se dibuja la base mayor *AB* sobre una recta. Se suma a partir del punto *B* la base menor *CD*, determinando el punto *P*.

2. Con centro en *A* y radio *AC* (diagonal menor) se traza un arco, y con centro en *P* y radio igual a la diagonal mayor (*BD*) se traza otro arco que corta al anterior en el punto *C*.

3. A partir de *C* se traza una paralela a la base *AB*, que es cortada en el punto *D* por el arco trazado con centro en *B* y radio *BD* (diagonal mayor).

4. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el trapecio escaleno (Fig. 4.77).

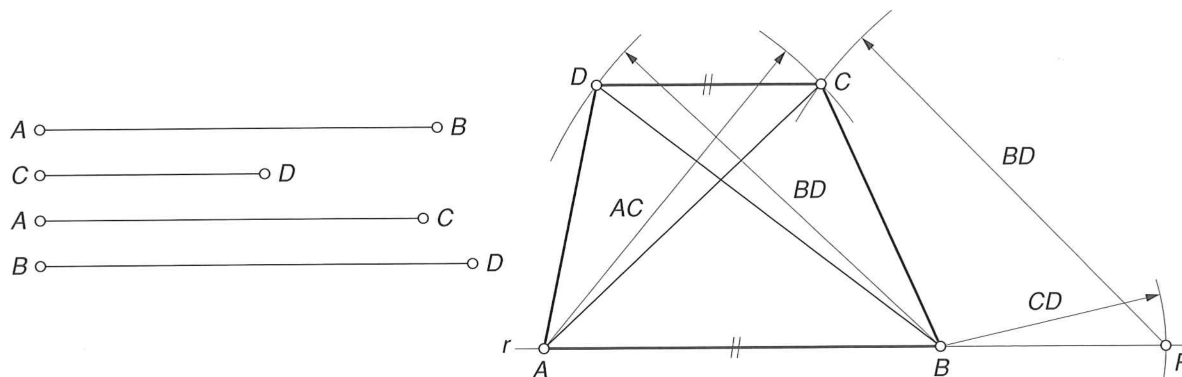


Fig. 4.77. *Construcción de un trapecio escaleno conociendo sus bases y sus diagonales.*

▶▶ G. Construcción de trapezoides

Los trapezoides, al no tener ningún elemento igual (lados, ángulos, diagonales), para su construcción se necesita conocer al menos cinco datos.

Conociendo una diagonal y los cuatro lados

1. Se dibuja la base *AB* (lado mayor). Con centro en *A* y radio *AC* (diagonal) se realiza un arco; con centro en *B* y radio *BC* se traza otro arco que corta al anterior en el punto *C*.

2. Con centro en *A* y radio *AD* se realiza un arco; con centro en *C* y radio *CD* se traza otro arco que corta al anterior en *D*.

3. Se unen *A*, *B*, *C* y *D*, determinando así el trapecio escaleno (Fig. 4.78).

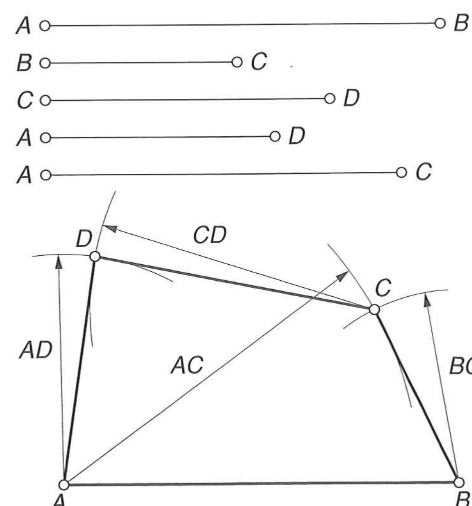


Fig. 4.78. *Construcción de un trapecio escaleno conociendo una diagonal y los cuatro lados.*

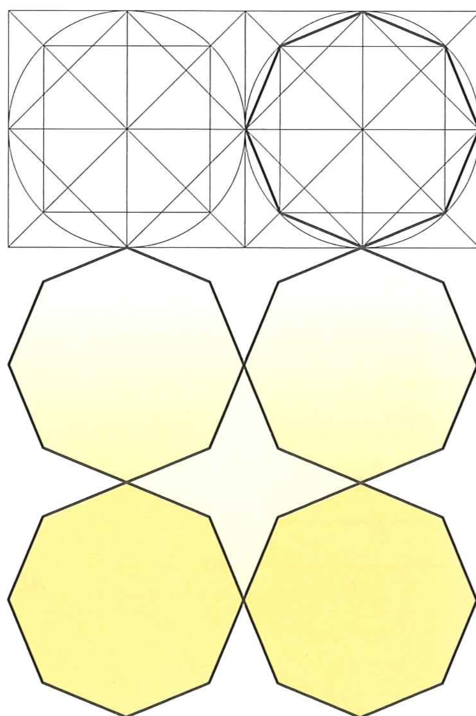
Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es un cuadrilátero?
2. ¿Cuáles son los elementos que configuran un cuadrilátero?
3. Cita las clases de cuadriláteros que hay.
4. Define qué es un paralelogramo.
5. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero?
6. ¿Qué diferencias hay entre un cuadrado y un rombo? ¿Y entre un romboide y un rectángulo?
7. Define qué es un trapecio.
8. ¿En qué se diferencia un trapecio rectángulo de un trapecio isósceles?
9. ¿En que se diferencia un trapecio de un trapezoide?
10. ¿Cuántos datos se han de conocer para dibujar un cuadrilátero? Razona tu respuesta.

Ejercicios

1. Dibuja un cuadrado de 45 mm de lado.
2. Dibuja un cuadrado de 50 mm de diagonal.
3. Dibuja un rectángulo de 80 mm de diagonal y 32 mm de lado.
4. Dibuja un rombo de 60 mm de lado, sabiendo que el valor de uno de sus ángulos es de 60°.
5. Dibuja un romboide conociendo que dos de sus lados valen 75 y 60 mm, y un ángulo 45°.
6. Dibuja un romboide conociendo que dos de sus lados valen 77 y 50 mm, y la diagonal 55 mm.
7. Dibuja un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases valen 70 y 30 mm, respectivamente, y su altura 50 mm.
8. Dibuja un trapecio isósceles sabiendo que sus bases valen 75 y 50 mm, respectivamente, y su altura es de 55 mm.
9. Dibuja un trapezoide sabiendo que sus lados valen: 60, 48, 40 y 50 mm, respectivamente. El valor de una de sus diagonales es de 68 mm.
10. Te presentamos dos composiciones de celosía utilizando el cuadrado como base de su diseño. Dibújalas observando los pasos que se han dado para su construcción (Fig. 4.79).



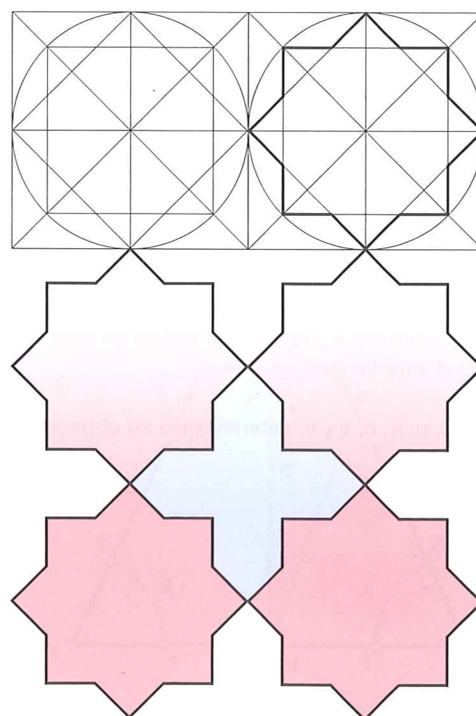


Fig. 4.79. *Dos modelos de celosía a partir de cuadrados.*



4.4. Polígonos regulares convexos

A. Definición

Como se vio anteriormente, un polígono regular es una figura plana delimitada por un número *n* de lados que tiene todos los lados y todos los ángulos iguales.

Según el número de lados se denominan del modo siguiente: **triángulo equilátero** (Fig. 4.80), **cuadrado** (Fig. 4.81), **pentágono** (Fig. 4.82), **hexágono** (Fig. 4.83), **heptágono** (Fig. 4.84) y **octógono** (Fig. 4.85).

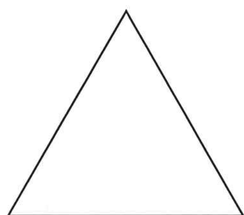


Fig. 4.80. *Triángulo equilátero.*

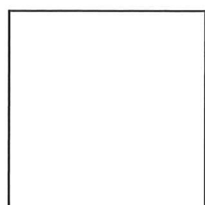


Fig. 4.81. *Cuadrado.*

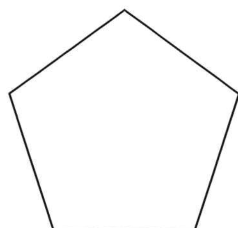


Fig. 4.82. *Pentágono.*

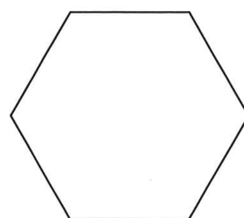


Fig. 4.83. *Hexágono.*

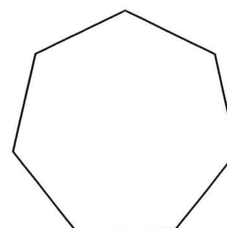


Fig. 4.84. *Heptágono.*

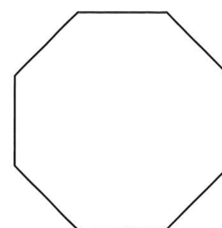


Fig. 4.85. *Octógono.*

B. Notaciones

Observa en la figura la nomenclatura que se utiliza para nombrar vértices, lados, ángulos, centro del polígono, diagonales y apotema en los polígonos regulares:

- **Vértices:** *A, B, C, D; E* ... (Fig. 4.86).
- **Lados:** *AB, CD, EF, MN* ... o bien *a, b, c, d, e* ... (Fig. 4.86).
- **Ángulos:** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ... o α, β, δ, π ... (Fig. 4.86).
- **Diagonales:** Son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Como puede constatarse, el triángulo equilátero no posee ninguna diagonal, y el cuadrado y el pentágono son los únicos polígonos regulares que tienen sus diagonales iguales; en los demás polígonos no todas sus diagonales son iguales (Fig. 4.86).
- **Centro del polígono:** Es el punto interior del polígono (*O*) que equidista de todos sus vértices. Por consiguiente, el segmento que une el centro con cualquiera de los vértices coincide con el radio de la circunferencia circunscrita a él (Fig. 4.87).
- **Apotemas:** son los segmento (*ON* o *ap*) que unen el centro del polígono con el punto medio de cualquier lado. Por tanto, la apotema coincide con el radio de la circunferencia inscrita a dicho polígono (Fig. 4.87).

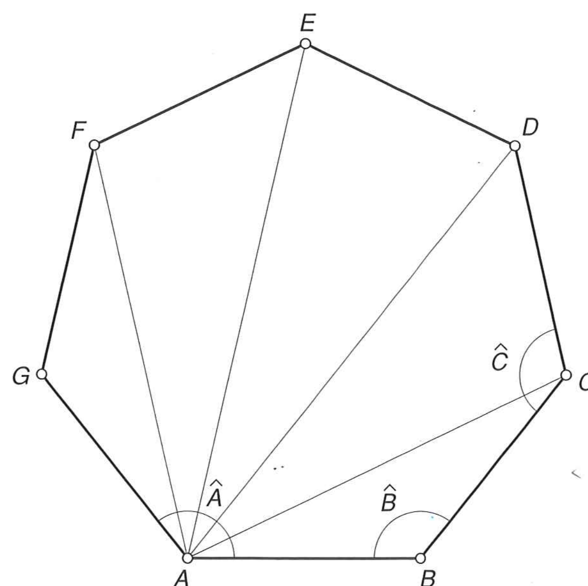


Fig. 4.86. *Notación para polígonos regulares: vértices, lados y ángulos.*

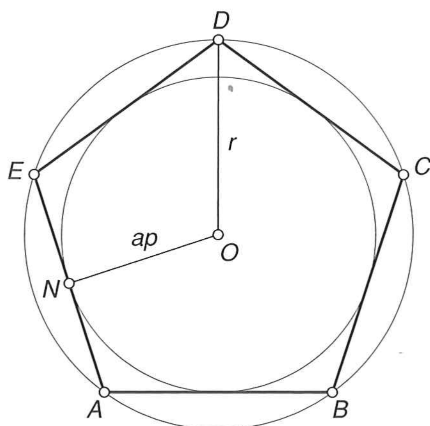


Fig. 4.87. *Notación para polígonos regulares: centro y apotemas.*

C. Propiedades

1. Un polígono se puede descomponer en tantos triángulos (T_s) como lados (l_s) tiene menos dos (Fig. 4.88).

$$T_s = l_s - 2$$

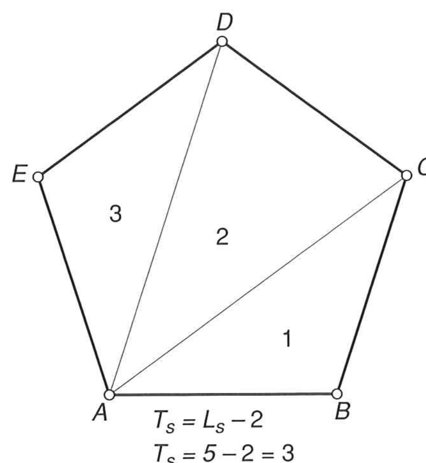


Fig. 4.88. *Propiedad 1 de los polígonos.*

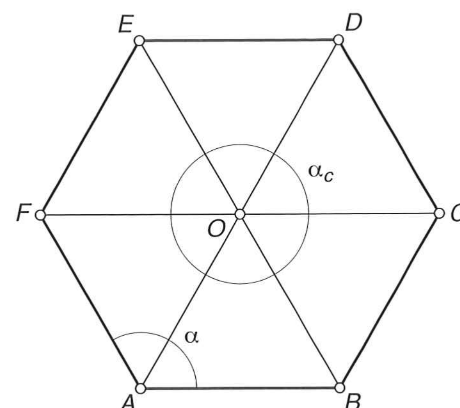


Fig. 4.89. *Propiedad 2 de los polígonos.*

2. La suma de los ángulos interiores de un polígono (s_a) es igual al producto de 180° por el número de lados menos dos (Fig. 4.89).

$$s_a = 180° \, (n - 2)$$

3. La suma de los ángulos externos de un polígono es de 360°.

4. El número de diagonales (*Nd*) de un polígono viene dado por la siguiente fórmula:

$$Nd = (n - 3) \cdot n / 2$$

   siendo *n* el número de lados del polígono (ver Fig. 4.88).

5. El ángulo central (α_c) de un polígono regular se obtiene al dividir 360° entre el número de lados ($n°l$) que lo componen (ver Fig. 4.89).

$$\alpha_c = 360° / n°l$$

D. Construcción de polígonos regulares convexos

Para dibujar un polígono regular se tiene que conocer previamente su número de lados y, además, la magnitud del lado del polígono o el valor del radio de la circunferencia circunscrita a él.

De cualquier modo, los métodos de representación, tanto si se conoce el valor del lado del polígono como si lo que se conoce es el radio de la circunferencia circunscrita a él, son de dos tipos: uno de carácter general, es decir, aplicable a cualquier polígono regular con el número de lados que se desee; y otro particular, para cada polígono en concreto.

Se utilizan métodos particulares, por la sencillez de sus trazados, en la construcción de los siguientes polígonos: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono y octógono. La aplicación del método general se emplea cuando haya que dibujar polígonos con más de ocho lados.



E. Construcción de polígonos regulares inscritos en la circunferencia

Para construir un polígono de esta manera, es suficiente con dividir la circunferencia en tantas partes iguales como lados tenga el polígono. Se unen los puntos de la esa división de forma consecutiva configurando de este modo el polígono propuesto.

Métodos particulares conociendo el radio

División de la circunferencia en 3 y 6 partes iguales. Triángulo equilátero y hexágono

1. El hexágono es el único polígono regular en el que se cumple la igualdad de su lado y del radio de la circunferencia circunscrita a él. Esto facilita su construcción, puesto que si conocemos el valor del lado o del radio que lo circunscribe, podremos construirlo siempre del mismo modo.

2. Se traza una circunferencia con radio $r = OA$, y un diámetro cualquiera, AD.

3. Con centro en los puntos A y D, y radios AO y DO se describen dos arcos, respectivamente, que cortan a la circunferencia en los puntos B, F, y, E, C. Al unir estos puntos entre sí, obtenemos el **Hexágono regular** (Fig. 4.90).

4. Si los puntos anteriormente definidos se unen de manera alterna, es decir, uno sí y otro no, se obtiene el **triángulo equilátero** (Fig. 4.90).

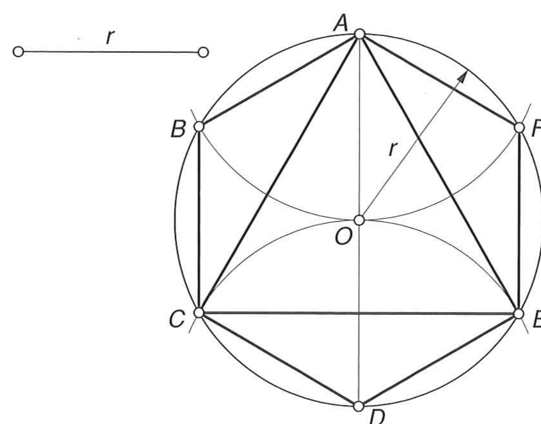


Fig. 4.90. *Hexágono regular y triángulo equilátero. El lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita al mismo.*

División de la circunferencia en 4 y 8 partes iguales. Cuadrado y octógono

1. Se dibuja la circunferencia con el radio r dado y se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí, obteniendo, al cortar éstos a la circunferencia, los vértices del polígono A, B, C y D. Uniendo dichos puntos se determina el **cuadrado.**

2. Para construir el **octógono regular** se trazan las bisectrices de los dos diámetros perpendiculares, que cortan a la circunferencia en cuatro puntos, que unidos junto a los vértices del cuadrado se obtiene el octógono (Fig. 4.91).

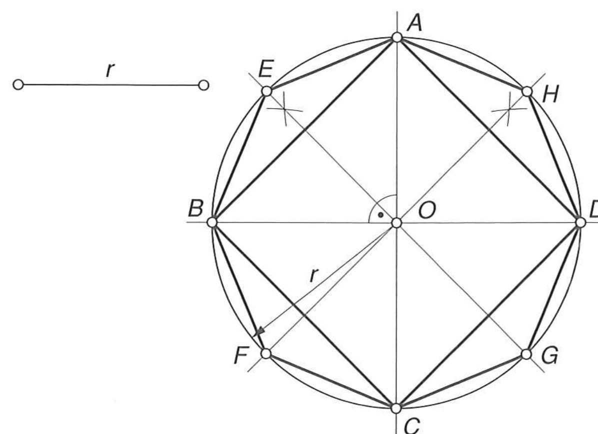


Fig. 4.91. *Cuadrado y octógono regular.*

División de la circunferencia en 5 partes iguales. Pentágono

1. Se traza la circunferencia con el radio *r* dado, y se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí, *AN* y *PJ*. Se hace centro en *H*, punto medio de *OJ*, y radio *HA*, se describe un arco *AG*.

2. El segmento *AG* es el lado del pentágono.

3. A partir del punto *A*, y con radio *AG*, se sitúa sobre la circunferencia el valor del lado, determinando así los vértices *B*, *C*, *D* y *E*, vértices del polígono. Uniendo éstos correlativamente se obtiene el **pentágono regular** (Fig. 4.92).

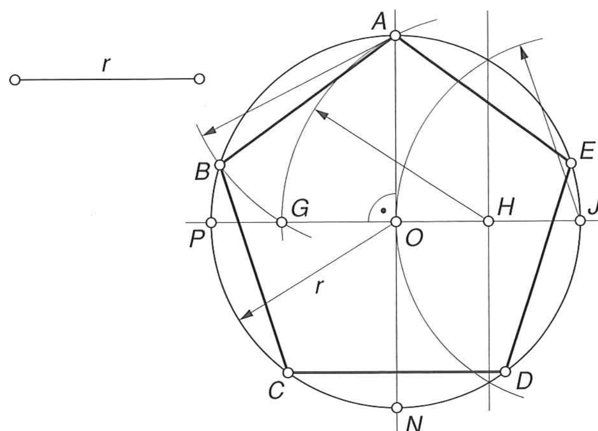


Fig. 4.92. *Pentágono regular.*

División de la circunferencia en 7 partes iguales. Heptágono

1. El lado del heptágono regular inscrito en una circunferencia es igual al semilado del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

2. Por tanto, los pasos iniciales para construir el heptágono son los mismos que en el trazado de un triángulo equilátero. Es decir, se traza un diámetro *AP* y se hace un arco con centro en *P* y radio *PO* para determinar los puntos *M* y *N*.

3. Trazamos la cuerda por ellos definida, y la mitad de ella, *JM*, es el valor del lado del polígono. Bastará con llevar siete veces consecutivas la magnitud de MJ para obtener los vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G* del **heptágono regular** (Fig. 4.93).

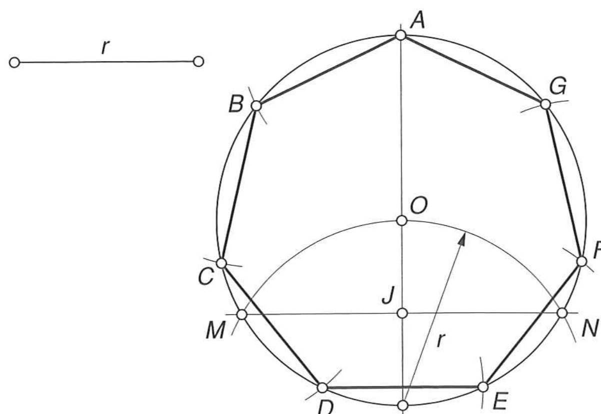


Fig. 4.93. *Heptágono regular.*



División de la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales. Método general (procedimiento aproximado)

Como ejemplo vamos a dividir la circunferencia en nueve partes para construir un eneágono regular.

1. Se dibuja la circunferencia con el radio dado y se traza en ella el diámetro *AN* el cual se divide en tantas partes iguales como lados ha de tener el polígono pedido; en este caso, en nueve.
2. Haciendo centro en *A*, y posteriormente en *N*, con radio *AN* se describen dos arcos que se cortarán en el punto *P*.
3. Se une *P* con la división 2 del diámetro hasta cortar a la circunferencia en el punto *B*. El segmento *AB* será aproximadamente el lado del polígono buscado.
4. Por tanto, a partir de *A* llevamos el valor de *AB* sobre la circunferencia tantas veces como lados tenga el polígono propuesto determinando así los vértices del polígono *A*, *B*, *C*, *D*, etc. Para conseguir finalmente el polígono sólo será necesario unir los vértices antes determinados (Fig. 4.94).

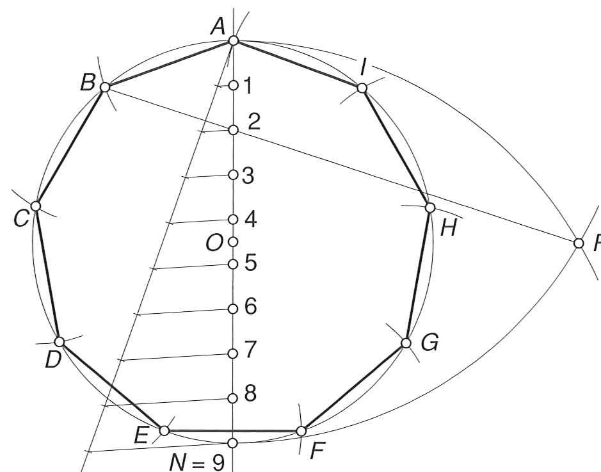


Fig. 4.94. *Método general dividir la circunferencia en un número dado de partes iguales.*

F. Construcción de polígonos regulares conociendo el lado

La construcción del triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono se han desarrollado anteriormente (ver los Apartados *Triángulos*, *Cuadriláteros*, y *División de la circunferencia en seis partes iguales. Hexágono*).

Métodos particulares

Pentágono

1. Se traza el lado dado *AB* y se halla su mediatriz, obteniendo el punto *P*. Se levanta una perpendicular en *B*, y haciendo centro en dicho punto, con radio *BA*, se traza un arco que determina el punto *J* al cortar a la perpendicular trazada antes.
2. Con radio *PJ* y centro en *P* se dibuja un arco que corta en el punto *M* a la prolongación de *AB*. Con centro en *A* y radio *AM* se dibuja un arco que determina sobre la mediatriz el punto *D*.
3. Por último, trazamos arcos con centros en *D*, *A* y *B* y radio igual al lado *AB*. Estos arcos, al cortarse entre sí, determinan los puntos *C* y *E*, vértices del polígono. Uniendo los puntos *C*, *D* y *E* con los extremos *A* y *B* se obtiene el **pentágono regular** (Fig. 4.95).

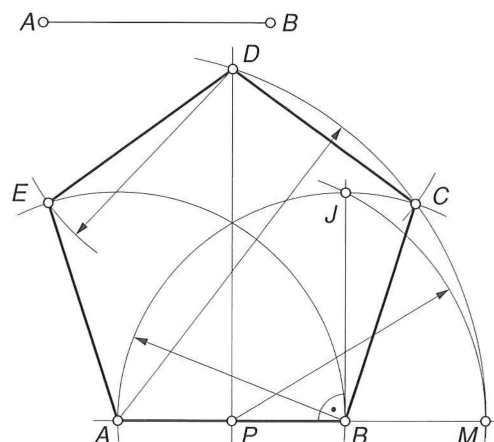


Fig. 4.95. *Trazado del pentágono regular conociendo el lado.*

Heptágono

1. Se sitúa el lado *AB* y se traza una perpendicular por uno de sus extremos, por ejemplo el *B*. Se dibuja también la mediatriz de este lado, y en el extremo *A* y sobre *AB* se construye un ángulo de 30°, prolongando el lado hasta que corte a la perpendicular trazada por *B* en el punto *P*.
2. Con centro en *A* y radio *AP* se describe un arco que corta a la mediatriz de *AB* en el punto *O*, centro de la circunferencia circunscrita al heptágono cuyo radio es el segmento *OA* u *OB*.
3. Sobre la circunferencia se traslada el valor del lado *AB* siete veces, obteniendo los vértices *C*, *D*, *E*, *F* y *G*. Uniendo los mencionados puntos se determina el **heptágono regular** (Fig. 4.96).

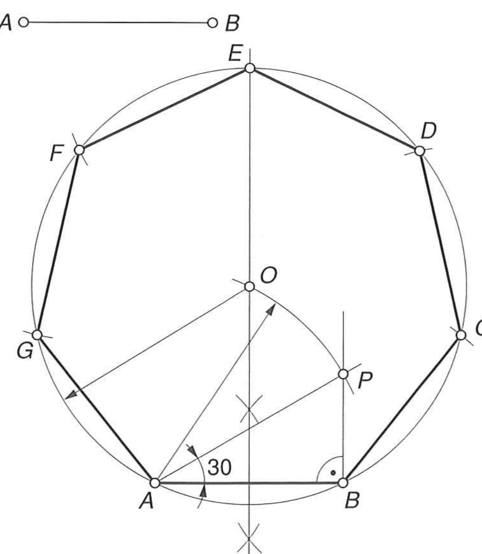


Fig. 4.96. *Trazado del heptágono regular a partir del lado.*

Octógono

1. Con la magnitud *AB*, lado del octógono, se construye un cuadrado con este valor de lado. Se trazan sus diagonales para así determinar el punto *P*, centro de este cuadrado. Con centro en *P* y radio *PA* se traza un arco que corta en *O* a la mediatriz de *AB*.

2. El punto *O* es el centro de la circunferencia circunscrita al octógono y cuyo radio es el segmento *OA* u *OB*. Sobre esta circunferencia se traslada el valor del lado *AB* ocho veces, así que resultan los vértices *C, D, E, F, G* y *H*.

3. Uniendo estos puntos se determina el **octógono regular** (Fig. 4.97).

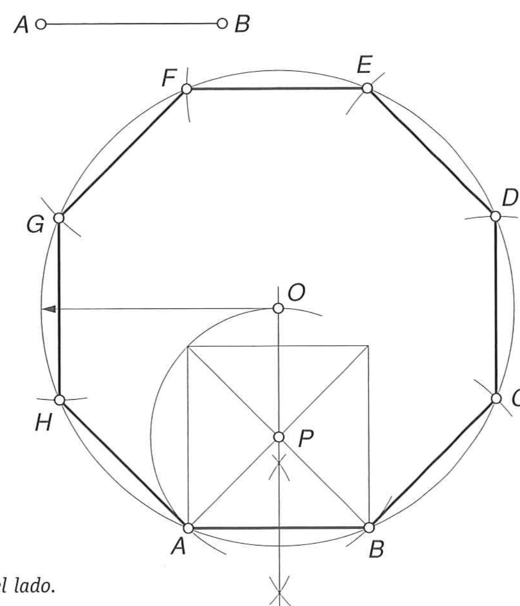


Fig. 4.97. *Trazado del octógono regular a partir del lado.*

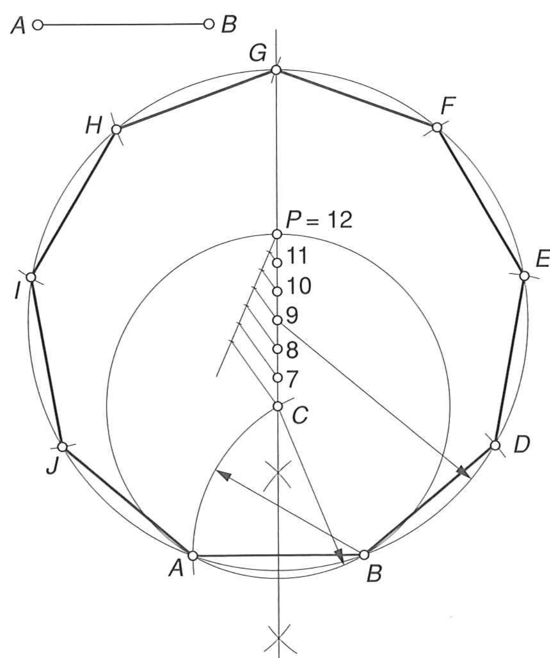


Fig. 4.98. *Método general para trazar un polígono regular a partir del lado.*

▶▶▶ Método general

Para estudiar los diferentes procesos de este método vamos a tomar como ejemplo la construcción de un **eneágono regular** de lado *AB*.

1. Se halla la mediatriz del segmento *AB*. Con centro en *A* y radio *AB* se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto *C* (observa que el punto *C* es el centro del hexágono regular de lado *AB*). Sobre esta recta van a estar situados los centros de las circunferencias de los polígonos.

2. Con centro en *C* y radio *AC* se traza una circunferencia, y, donde ésta corta a la mediatriz, se obtiene el punto *P*.

3. El radio *CP* se divide en seis partes iguales. Hallamos así los puntos 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Cada uno de ellos constituye el centro de la circunferencia circunscrita a los polígonos regulares de 7, 8, 9 ... lados.

4. En nuestro caso, el centro es el punto 9, y el radio, la magnitud A9. Trazamos la circunferencia y, a partir de *A*, llevamos el valor *AB* sobre ella tantas veces como lados tenga el polígono propuesto.

5. Finalmente, se unen los vértices determinados para construir el polígono (Fig. 4.98).



4.5. Polígonos regulares estrellados

A. Definición

Son polígonos cóncavos que tienen forma de estrella, y resultan de trazar en una circunferencia todas las cuerdas de longitud constante cuyos extremos sean vértices no consecutivos del polígono regular convexo inscrito en ella.

Para dibujarlo debemos obtener sobre una circunferencia los vértices de sus puntas, que son los mismos que los de un polígono regular convexo, pero en vez de unirlos de forma consecutiva se hace a intervalos constantes hasta pasar por todos ellos (Fig. 4.99).

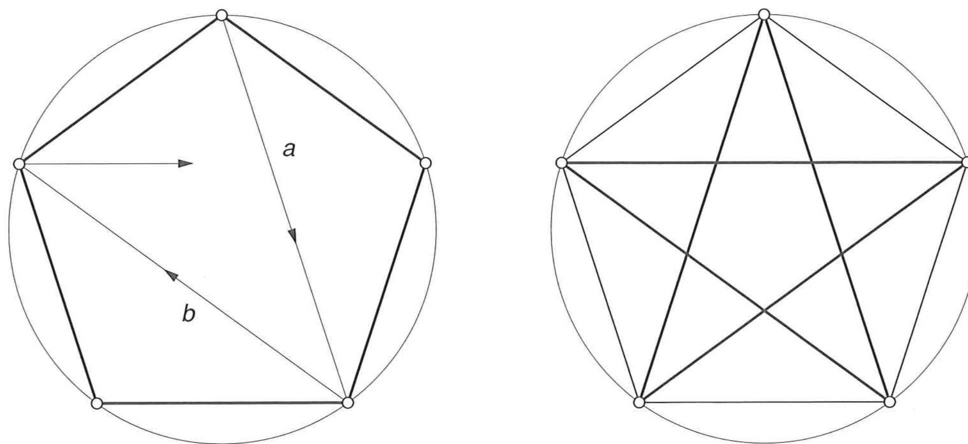


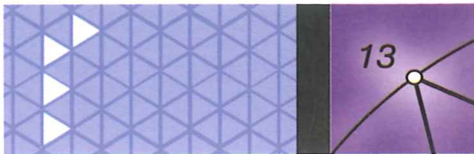
Fig. 4.99. *Trazado de un polígono estrellado a partir de un polígono regular.*

B. Propiedades

Decimos de los polígonos estrellados regulares que tienen **número, genero, paso** y **especie.**

- **Número (n):** es la cantidad de puntas que tiene el polígono.
- **Genero (g):** es el número de cuerdas empleadas para el trazado del polígono. Este número coincide con el de lados del polígono regular convexo inscrito en la circunferencia.
- **Especie (e):** es el número de vueltas que hay que dar a la circunferencia para completar el polígono.
- **Paso (p):** es el número de lados que comprende cada cuerda del polígono regular convexo inscrito en ella.

Por tanto, el **número** es igual al **genero,** y la **especie** siempre coincide con el **paso.**



C. Construcción de polígonos regulares estrellados

Con cada polígono regular convexo se puede dibujar un número determinado de polígonos estrellados, que pueden coincidir en el número de puntas o no. Para calcularlo se divide el número de lados del polígono regular convexo entre dos, y los valores menores del resultado, que no sean divisores del número de lados del polígono regular convexo, indicarán el **paso** de los polígonos estrellados regulares que se pueden construir. Por ejemplo:

Si partimos de un polígono regular convexo de catorce lados, y le aplicamos lo que se acaba de exponer, observamos que $n/2$, en este caso, son 7; por tanto, se podrán dibujar cuatro polígonos estrellados, ya que los valores no divisores de 14 menores de 7 son: 3, 4, 5 y 6. Así, tendremos una estrella de catorce puntas de paso 3 (Fig. 4.100), una de siete puntas de paso 4 (Fig. 4.101), otra de catorce puntas de paso 5 (Fig. 4.102) y una de siete puntas de paso seis (Fig. 4.103).

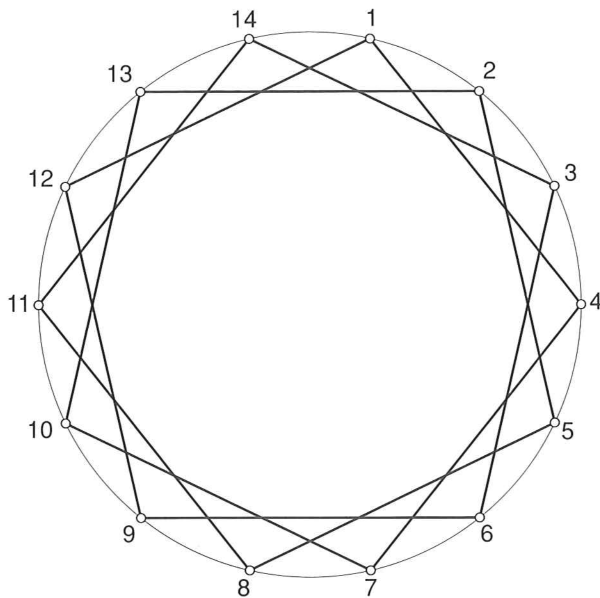


Fig. 4.100. *Estrella de 14 puntas de paso 3.*

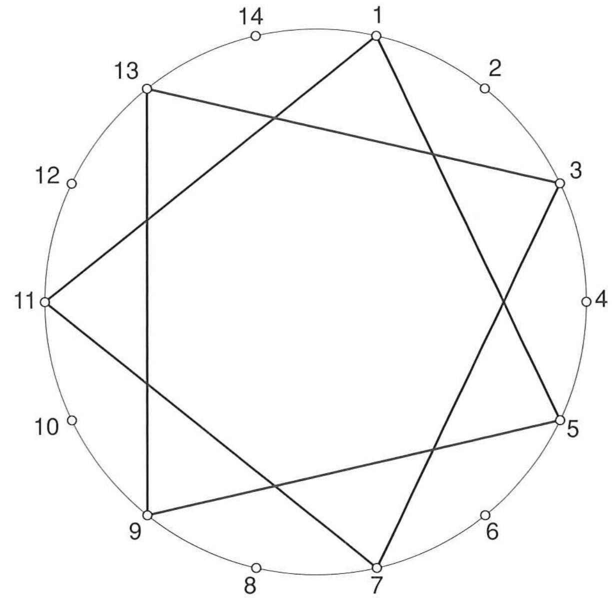


Fig. 4.101. *Estrella de 7 puntas de paso 4.*

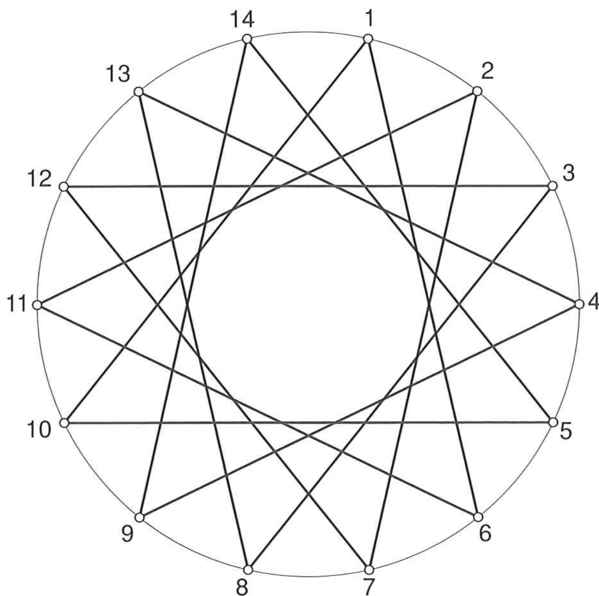


Fig. 4.102. *Estrella de 14 puntas de paso 5.*

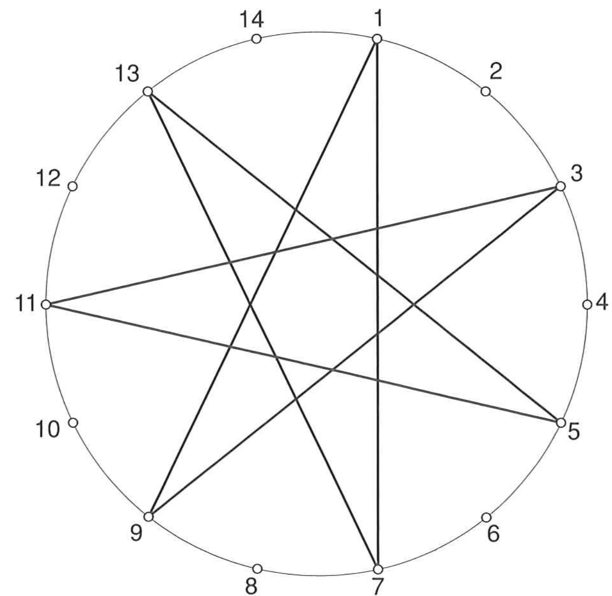


Fig. 4.103. *Estrella de 7 puntas de paso 6.*

7 radio
12 puntas
paso 5



D. Construcción de un polígono estrellado conociendo el lado

La solución a esta propuesta pasa por construir un polígono estrellado con una magnitud de lado cualquiera, el cual servirá de base para, aplicándole el concepto de semejanza, poder de este modo hallar el polígono pedido. Veamos un ejemplo:

Supongamos que queremos construir un polígono estrellado regular de cinco puntas de lado $l = AB$.

Se parte de una circunferencia de centro *O* y radio *r* cualquiera dividida en tantas partes iguales como puntas tenga el polígono estrellado. Se construye dicho polígono *F, G, H, J* y *K,* que tendrá un valor de lado que, generalmente, no corresponda con el dado.

Se establece una homotecia de centro *O*. Para ello, se une *O* con *F, G, H, J* y *K* y se alargan dichos radios. Se prolonga uno de los lados del polígono construido, por ejemplo *FJ*, y a partir del punto *F* se lleva el valor del lado *AB* del polígono pedido, obteniéndose el segmento *FP*.

Por *P* se traza una recta paralela al radio *OF* que corta a la prolongación del radio *OJ* en el punto *A*. Por dicho punto se traza una circunferencia concéntrica que corta a las prolongaciones de los radios en los puntos *B, C, D* y *E*.

Uniendo estos puntos de manera adecuada se construye el polígono regular estrellado pedido (Fig. 4.104).

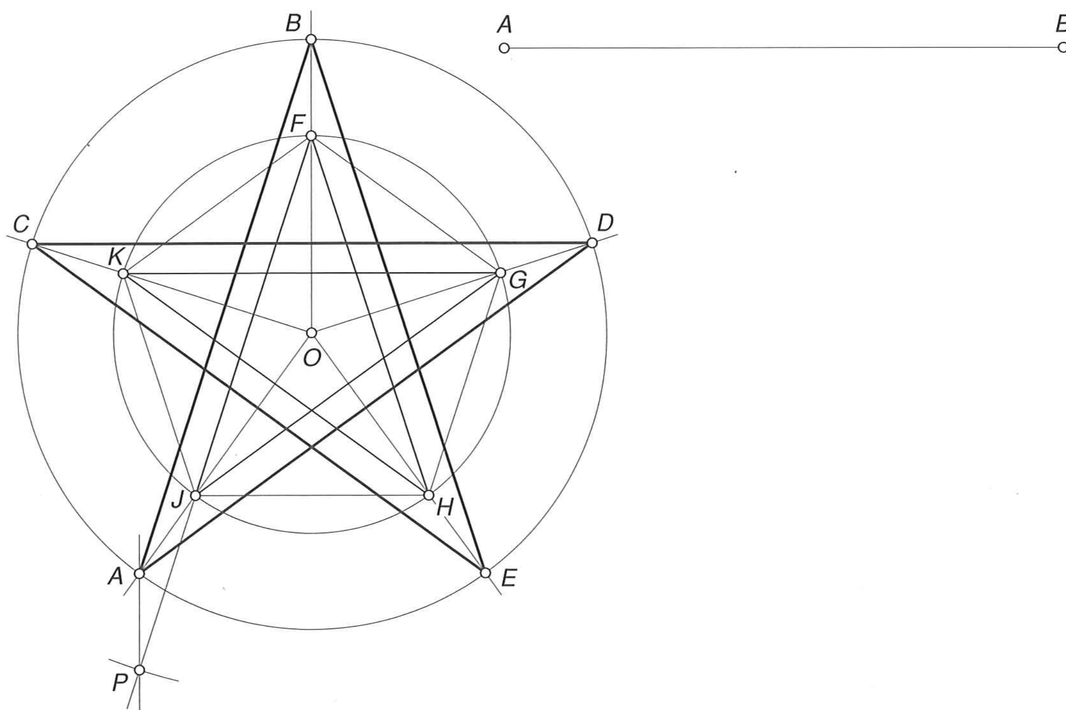


Fig. 4.104. *Construcción de un polígono estrellado a partir del lado.*

Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es un pentágono regular convexo?
2. ¿A qué se denomina en un polígono regular? ¿Y diágonal?
3. ¿En cuantos triángulos se puede descomponer un polígono regular?
4. ¿Qué fórmula se utiliza para saber el número de diagonales que tiene un polígono regular?
5. ¿Cómo averiguamos el valor del ángulo central de un polígono regular?
6. ¿Cuántos datos, como mínimo, son necesarios para poder construir un polígono regular?
7. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos externos de un polígono?
8. ¿Qué fórmula se utiliza para saber la suma de los ángulos interiores de un polígono?
9. ¿Qué es un polígono regular estrellado?
10. Los polígonos regulares estrellados se dice que tienen número, genero, paso y especie. Explica qué significan estos conceptos.

Ejercicios

Dibuja los siguientes polígonos regulares convexos conociendo el valor de su lado. Utiliza para realizar las construcciones sus métodos particulares:

1. Pentágono de 38 mm de lado.
2. Hexágono de 35 mm de lado.
3. Heptágono de 30 mm de lado.
4. Octógono de 25 mm de lado.
5. Utilizando el método general para construir un polígono regular convexo conociendo el lado, dibuja un polígono de 11 lados sabiendo que el valor del lado es de 30 mm.
6. Dibuja los siguientes polígonos regulares convexos inscritos en una circunferencia de 35 mm de radio:
   - Triángulo equilátero y hexágono.
   - Cuadrado y octógono.
   - Pentágono.
   - Heptágono.
7. Utilizando el método general para dividir una circunferencia en partes iguales, dibuja un eneágono regular convexo inscrito en una circunferencia de 40 mm de radio.
8. Realiza las piezas mecánicas representadas en las Figuras 4.105 y 4.106 a $E = 2/1$ tomando las medidas del dibujo.

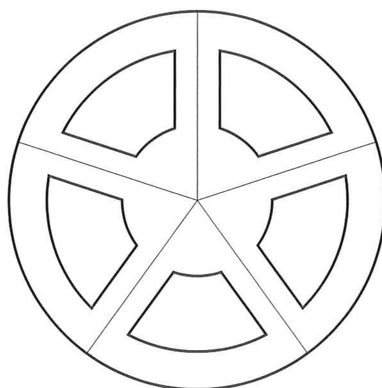


Fig. 4.105. *Volante.*

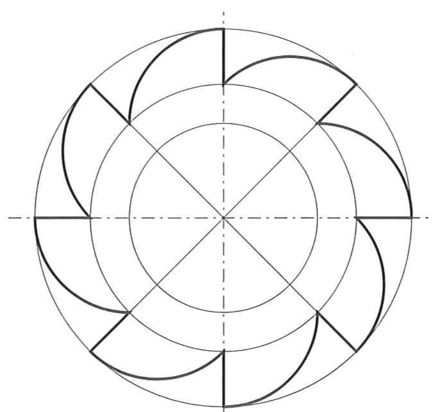


Fig. 4.106. *Rueda trinquete.*

9. Dibuja estos motivos decorativos apoyándote en los esquemas previos que te proporcionamos. Fíjate en que con un mismo esquema de base se pueden generar diferentes diseños. Además de hacer el expuesto, intenta crear alguno propio.

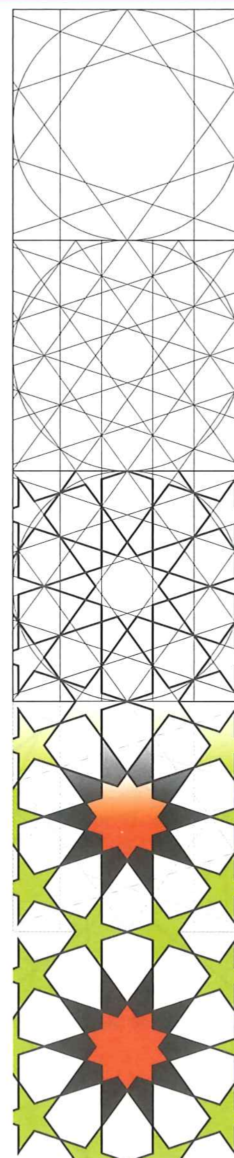
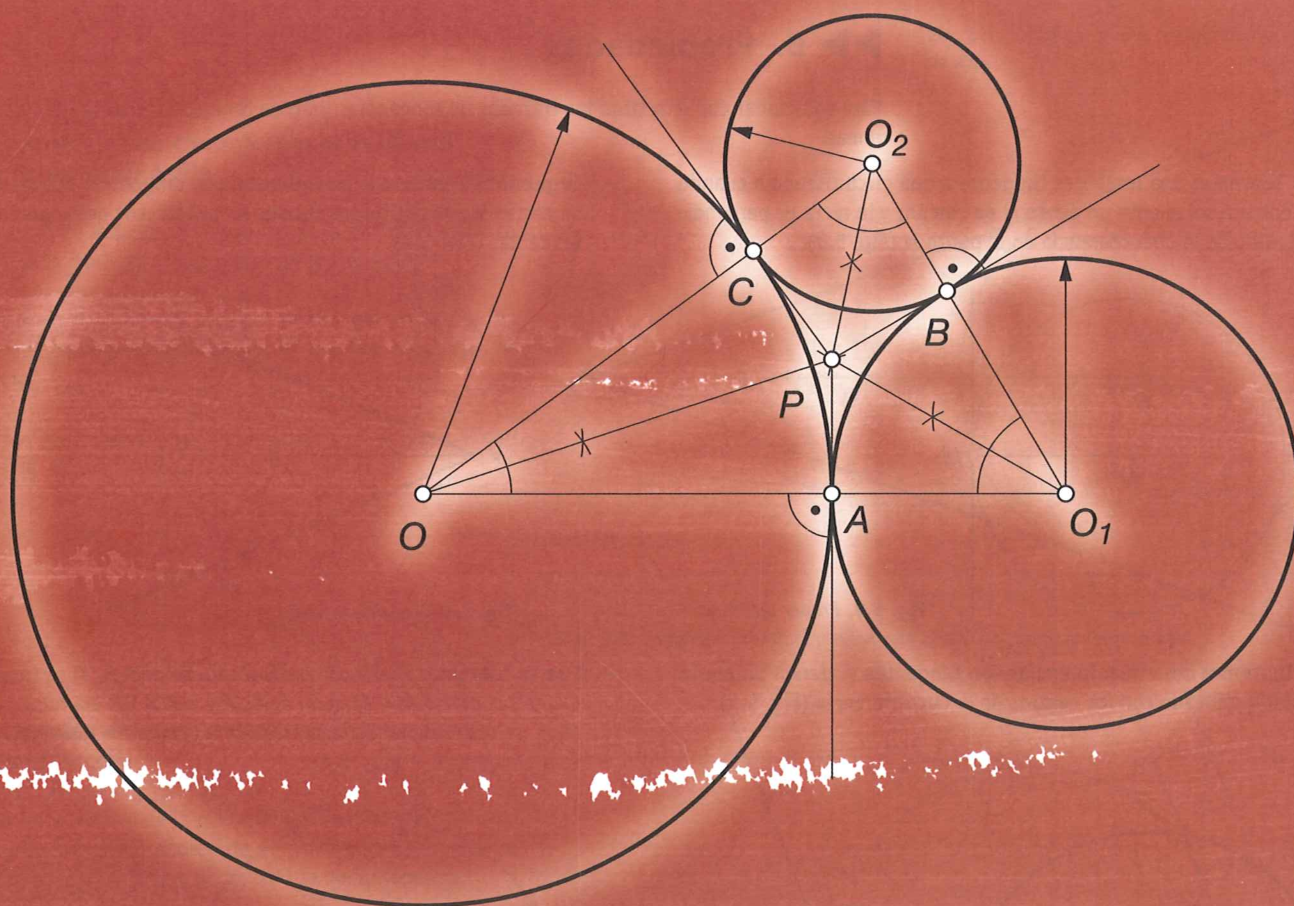


Fig. 4.107. *Motivos decorativos basados en polígonos estrellados.*

05

Tangencias y enlaces



El estudio sobre la teoría de las tangencias y enlaces, tiene una especial importancia en campos tan significativos de la actividad humana como son: la arquitectura, la ingeniería o el diseño, sea éste industrial o gráfico, por su aplicación al trazado de las formas que configuran tanto objetos como imágenes planas.

Una jarra, unos zapatos, una silla, el salpicadero de un vehículo ... son ejemplos de la aplicación de los conceptos de tangencia y enlace de curvas con rectas o de curvas entre sí. Es, por ello, que sean significativo conocer sus propiedades para emplearlas en la resolución de casos concretos en los que se necesiten.



5.1. Tangencias

A. Definición

Se dice que dos figuras planas son tangentes cuando tienen un solo punto en común, al que se conoce como **punto de tangencia.**

Las tangencias pueden producirse entre circunferencias y rectas, entre polígonos y rectas, entre circunferencias y polígonos, etc. Sin embargo, las tangencias más habituales en dibujo técnico son aquellas que se generan entre rectas y circunferencias, y entre circunferencias entre sí (Figs. 5.1 y 5.2).

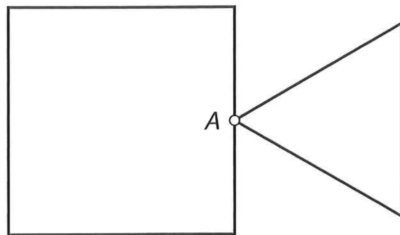


Fig. 5.1. *Tangencia entre dos polígonos.*

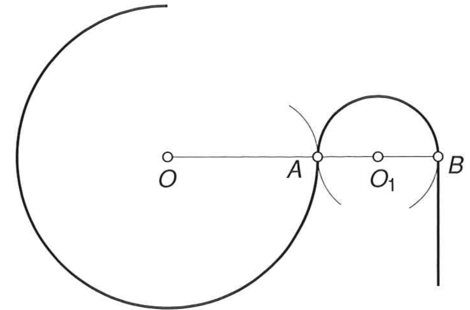


Fig. 5.2. *Tangencias entre dos arcos de circunferencia y una recta.*

B. Propiedades

Para solucionar con exactitud los trazados de tangencias, han de tenerse en cuenta los siguientes teoremas:

- **Primer teorema:** una recta *r* es tangente a una circunferencia cuando tienen entre sí solamente un punto *M* en común, y la recta es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto *M* (Fig. 5.3).

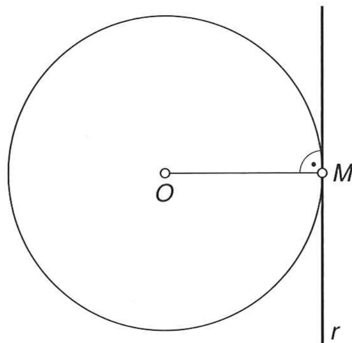


Fig. 5.3. *Primer teorema.*

- **Segundo teorema:** una circunferencia es tangente a dos rectas *r* y *s* que se cortan si su centro está situado en la bisectriz del ángulo que forman las rectas (Fig. 5.4).

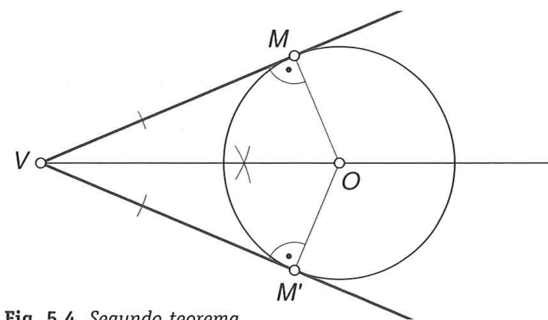


Fig. 5.4. *Segundo teorema.*

- **Tercer teorema:** dos circunferencias son tangentes si tienen un punto en común *N* alineado con los centros de la circunferencia (Fig. 5.5).

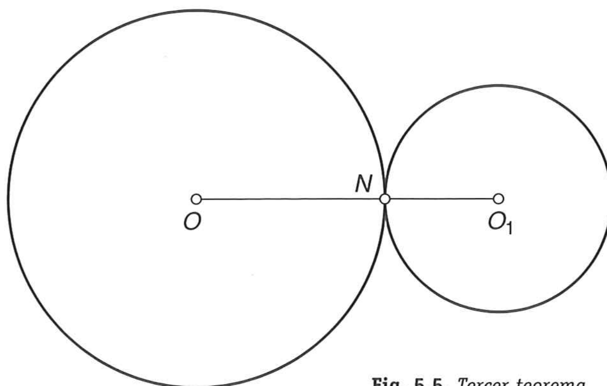


Fig. 5.5. *Tercer teorema.*

- **Cuarto teorema:** En dos circunferencias tangentes, si se traza un par de diámetros paralelos y se unen mediante rectas los extremos opuestos de ellos, se observa que dichas rectas de unión están alineadas con el punto de tangencia *M* (Fig. 5.6).

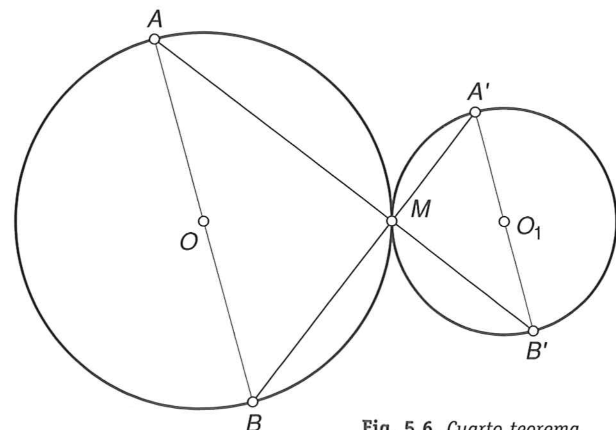
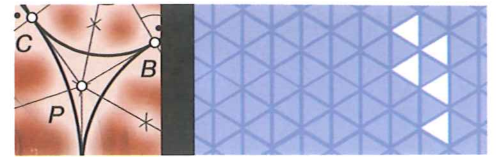


Fig. 5.6. *Cuarto teorema.*



C. Construcción de tangencias entre rectas y circunferencias

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de tangencias más utilizados en dibujo técnico.

Tangente a una circunferencia en un punto de ella

1. Se traza el radio que une los puntos *O* y *P*, siendo este último punto por donde se ha de trazar la recta tangente a la circunferencia.

2. A continuación, se dibuja por el punto *P* la recta perpendicular al radio, que es la recta tangente *r* buscada (Fig. 5.7).

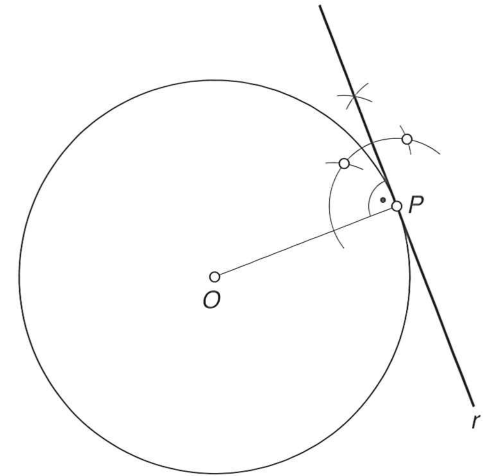


Fig. 5.7. *Tangente a una circunferencia en un punto de ella.*

Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella

1. Se une el punto *P* dado con el centro de la circunferencia, *O*, y se dibuja la mediatriz, obteniéndose así el punto *H*.

2. Con centro en *H* y radio *HO*, se traza un arco que corta a la circunferencia dada en los puntos *M* y *M'*, que son los puntos de tangencia.

3. Las rectas de tangencia *r* y *s* resultan de unir el punto *P* con *M* y *M'* (Fig. 5.8).

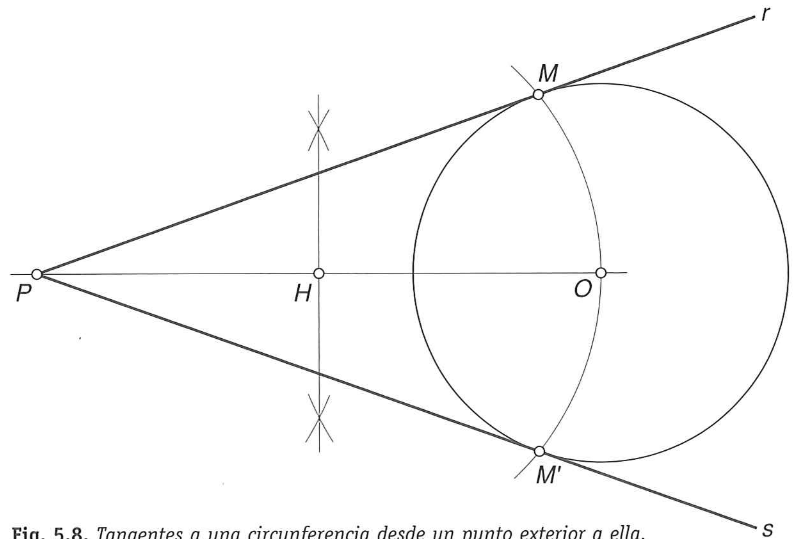


Fig. 5.8. *Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella.*

Tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección

1. Se traza por el centro de la circunferencia una recta *t* perpendicular a la dirección *d* dada. Esta perpendicular determina los puntos *M* y *N* de tangencia al cortar a la circunferencia.

2. Las rectas tangentes *r* y *s* son las paralelas a la dirección *d* que contienen a los puntos de tangencia *M* y *N*. (Fig. 5.9).

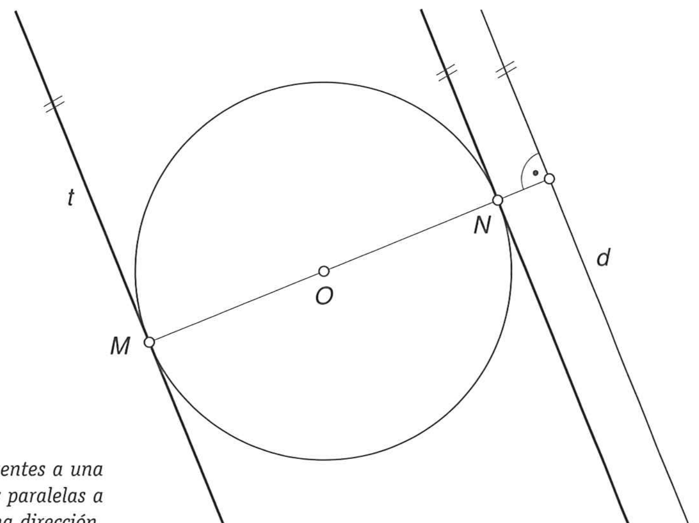
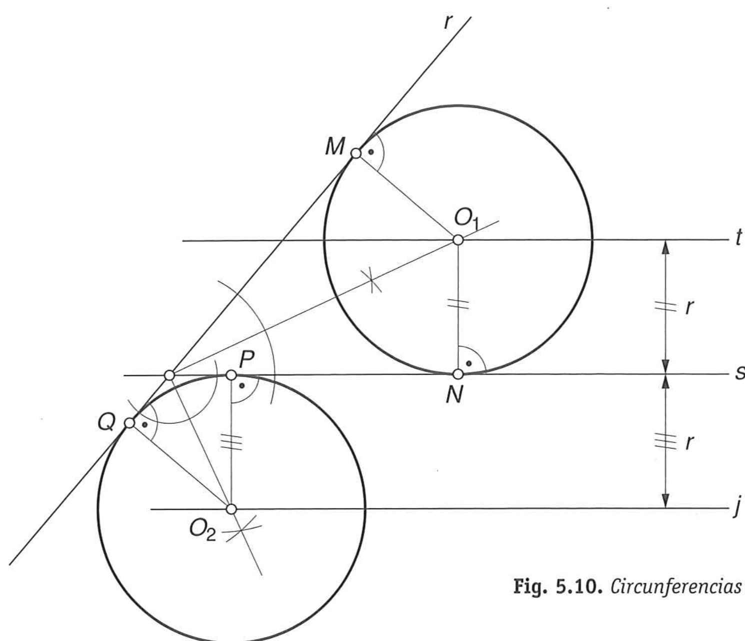


Fig. 5.9. *Tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección.*





▶▶▶ Circunferencia de radio conocido tangente a dos rectas convergentes

1. Se dibujan las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas *r* y *s*. Como puede observarse, hay dos ángulos diferentes; por tanto, se podrán dar dos soluciones a este problema.

2. Se trazan dos rectas, *t* y *j*, paralelas a una de las rectas dadas, tanto por la parte superior como por la inferior, y, separadas de ella, la medida del radio *r* conocido. Las intersecciones de *t* y *j* con las bisectrices determinan los centros O_1 y O_2 de las circunferencias que se han de trazar.

3. Los puntos de tangencia son *M* y *N*, *P* y *Q*, respectivamente, que se hallan dibujando los radios perpendiculares a las rectas *r* y *s* (Fig. 5.10).

Fig. 5.10. *Circunferencias de radio conocido tangentes a dos rectas convergentes.*

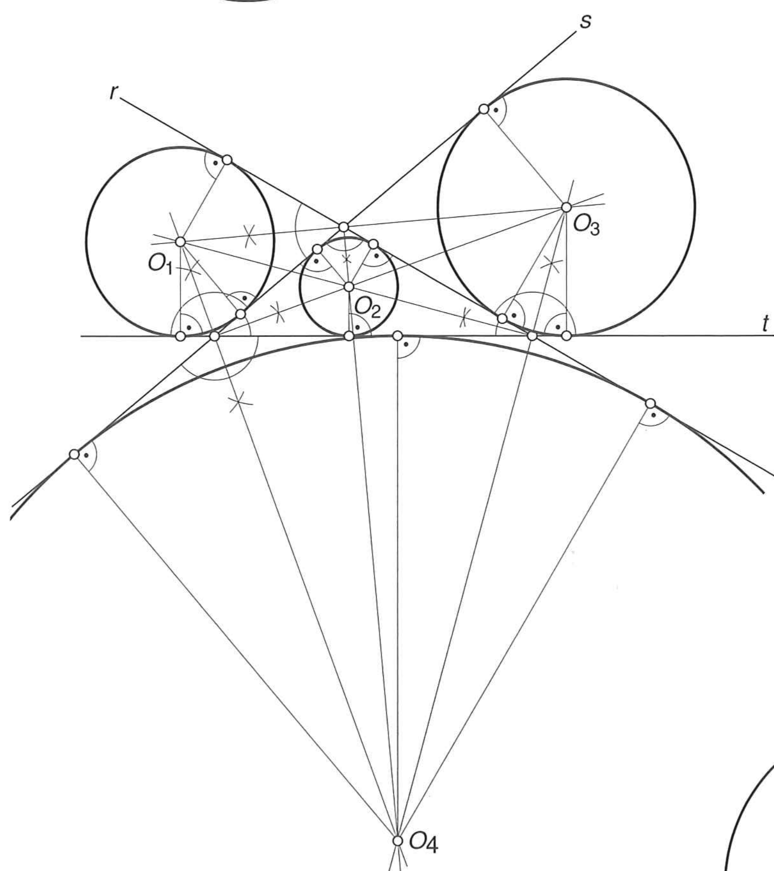


Fig. 5.11. *Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan a dos.*

▶▶▶ Circunferencia tangente a tres rectas que se cortan dos a dos

1. Los centros de las circunferencias tangentes a las rectas *r*, *s* y *t*, se encuentran en la intersección de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse entre sí.

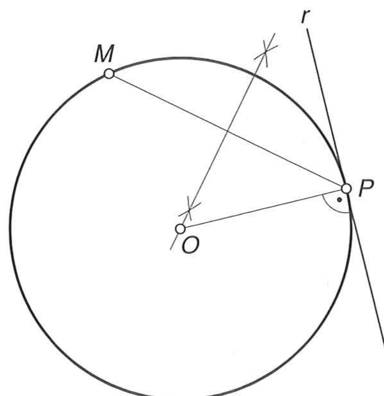
2. Por tanto, en este caso, existen cuatro posibles soluciones. Al cortarse las bisectrices se obtienen los centros O_1, O_2, O_3 y O_4 de las circunferencias tangentes.

3. Los puntos de tangencia se determinan trazando, por los centros hallados, rectas perpendiculares a *r*, *s* y *t* (Fig. 5.11).

▶▶▶ Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a una recta en otro punto, también dado

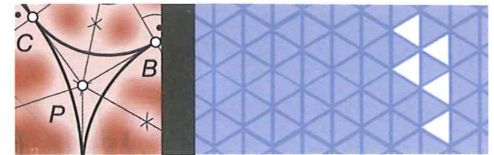
1. Sea el punto dado *M*, y *P* el punto de la recta *r* dada.

2. Puesto que *M* y *P* tienen que ser puntos de la circunferencia que se desea trazar, su centro tiene que encontrarse en la mediatriz de *MP*.



3. Al ser *P* el punto de tangencia en la recta *r*, el centro *O* de la circunferencia se sitúa donde la perpendicular trazada desde *P* a *r* corta a la mediatriz *MP* (Fig. 5.12).

Fig. 5.12. *Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a una recta en otro punto, también dado.*



▶▶▶ Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias conocidas de distinto radio

1. Se unen los puntos O_1 y O_2 y se halla el punto medio de $O_1 O_2$, denominado H. Se traza una circunferencia concéntrica a la de mayor radio que sea igual a la diferencia entre los radios mayor y menor.

2. Con centro en H y radio HO_1, se traza un arco hasta cortar a la circunferencia auxiliar en M y M'. Se une O_1 con M y M', resultando así los puntos U y V.

3. Se dibujan por O_2 dos radios paralelos a O_1V y O_1U para determinar los puntos S y T. Al unir V con T y U con S, se trazan las rectas tangentes r y l (Fig. 5.13).

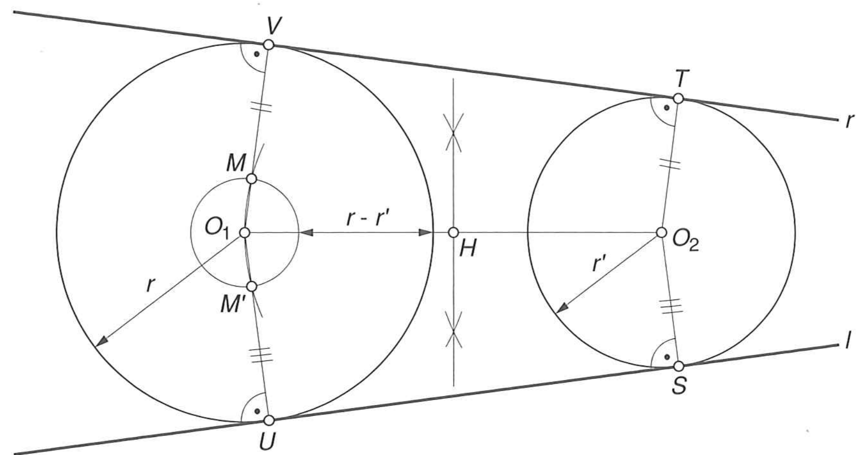


Fig. 5.13. *Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias conocidas de distinto radio.*

▶▶▶ Rectas tangentes interiores a dos circunferencias conocidas y de distinto radio

1. Se unen los puntos O_1 y O_2 y se determina el punto medio de O_1O_2, que es H. Se traza una circunferencia de radio igual a r más r' y con centro en O_1.

2. Se halla otra circunferencia con radio HO y centro en H, que corta a la anterior en los puntos M y M'.

3. Se unen los puntos M y M' con O_1, con lo que se obtienen los puntos V y U en las circunferencias. Se dibujan por O_1 dos radios O_1V y O_1U, trazados en sentido contrario para conseguir los puntos S y T.

4. Basta con dibujar las rectas que contienen, respectivamente, a U y T, y a V y S, para llegar a las rectas tangentes r y l (Fig. 5.14).

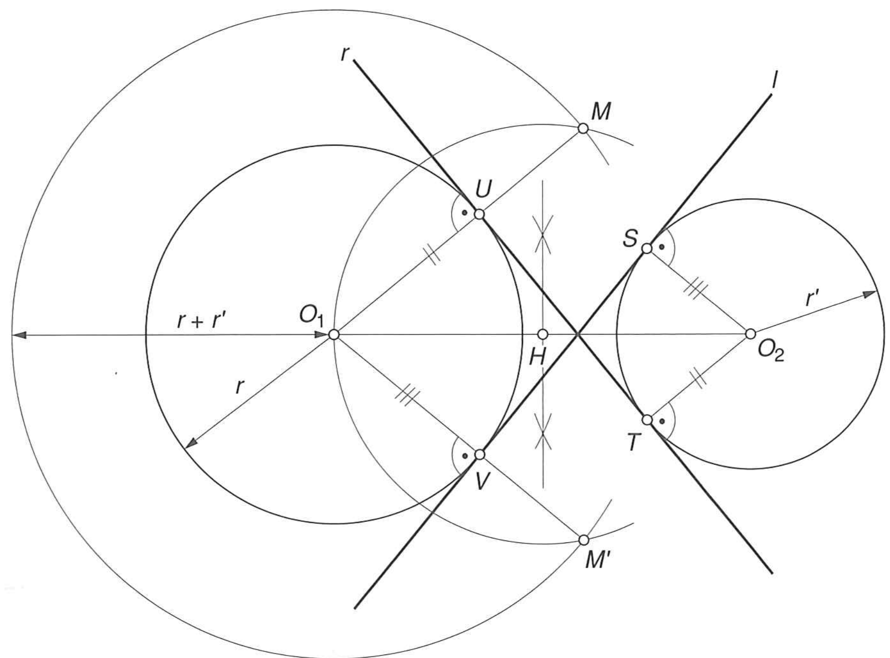


Fig. 5.14. *Rectas tangentes interiores a dos circunferencias conocidas y de distinto radio.*

▶▶ D. Construcción de tangencias entre circunferencias

Las circunferencias tangentes pueden ser de dos tipos: interiores y exteriores: En las primeras, la distancia de sus centros es igual a la diferencia de sus radios; y en las segundas, la distancia de sus centros es igual a la suma de sus radios.

▶▶▶ Circunferencia de radio *r* tangente exterior a otra circunferencia conocida de centro O_1 en el punto *P*

1. Se prolonga un radio de la circunferencia dada, O_1, que contenga al punto P. Se le suma el radio r conocido a partir de P y se determina el centro, O_2, de la circunferencia buscada.

2. Finalmente, se traza la circunferencia que se busca con centro en O_2 y radio O_2P (Fig. 5.15).

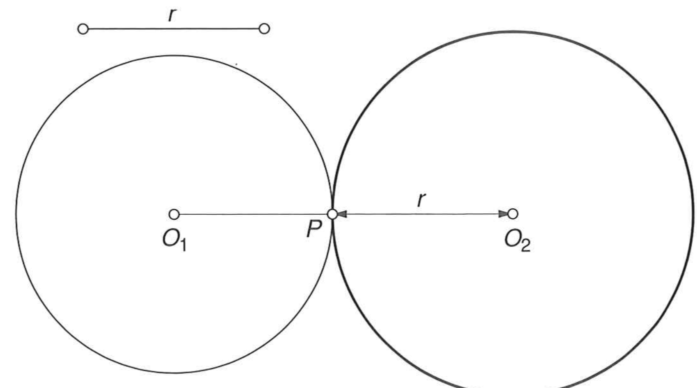


Fig. 5.15. *Circunferencia tangente exterior a otra conocida en un punto.*



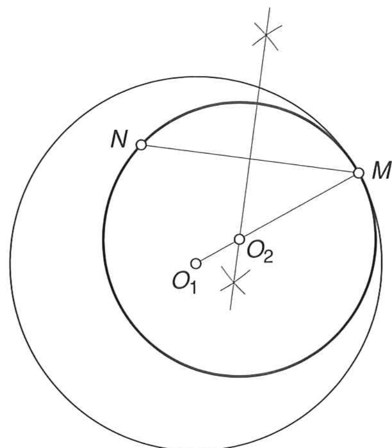


Fig. 5.16. *Circunferencia tangente a otra dada en un punto y que pasa por otro interior a ella.*

Circunferencia tangente a otra conocida en un punto *M* y que pasa por otro punto interior *N*

1. Al ser *M* y *N* puntos de la misma circunferencia, su centro está en la mediatriz de *MN*.

2. Se une O_1 con *M* y, donde corta a la mediatriz, se obtiene el centro O_2 de la circunferencia, que se dibuja con radio O_2N (Fig. 5.16).

Circunferencia de radio *r* conocido, tangente a otra circunferencia y a una recta *s* dada

1. Se traza un arco con centro en O_1 y que tenga como radio la suma del radio de la circunferencia dada más el radio *r* conocido.

2. Se traza una recta paralela a la dada que diste de ésta la medida del radio *r* que se conoce. La intersección de esta paralela con el arco es el centro O_2 de la circunferencia buscada, y los puntos *M* y *N* son los puntos de tangencia (Fig. 5.17).

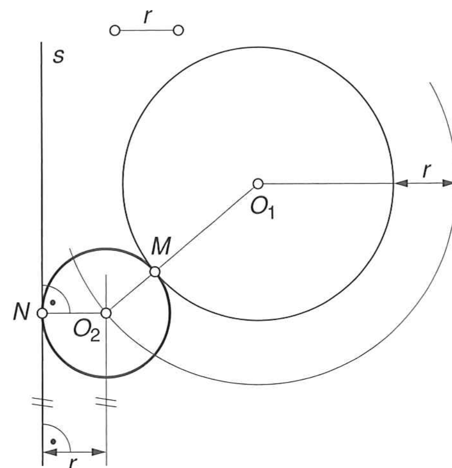


Fig. 5.17. *Circunferencia de radio conocido tangente a otra circunferencia y a una recta.*

Circunferencias tangentes dos a dos, conociendo sus centros

1. Se unen los centros O_1, O_2 y O_3 conocidos de las circunferencias, determinando un triángulo.

2. Se hallan las bisectrices de los vértices del triángulo, obteniendo el punto *P*. Se trazan perpendiculares *r*, *s* y *t* a los lados del triángulo, que contengan al punto *P;* de este modo se determinan los puntos de tangencia *A*, *B* y *C* y el radio de cada una de las circunferencias (Fig. 5.18).

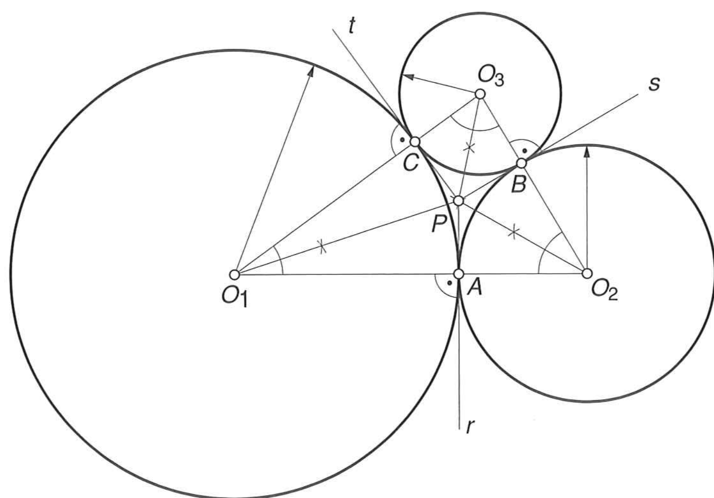


Fig. 5.18. *Circunferencias tangentes dos a dos.*

Circunferencia de radio *r* conocido, tangente y exterior a dos circunferencias dadas

1. Desde O_1 y O_2 se trazan arcos cuyo radio sea igual a la suma del radio conocido *r* y el respectivo de la circunferencia dada, es decir, *s* + *r* y *t* + *r*. Al cortarse estos arcos, queda determinado el centro O_3 de la circunferencia que hay que trazar. Uniendo O_3 con O_1 y O_2 resultan los puntos *M* y *N* de tangencia.

2. Se dibuja la circunferencia pedida, con centro en O_3 y radio *r* (Fig. 5.19).

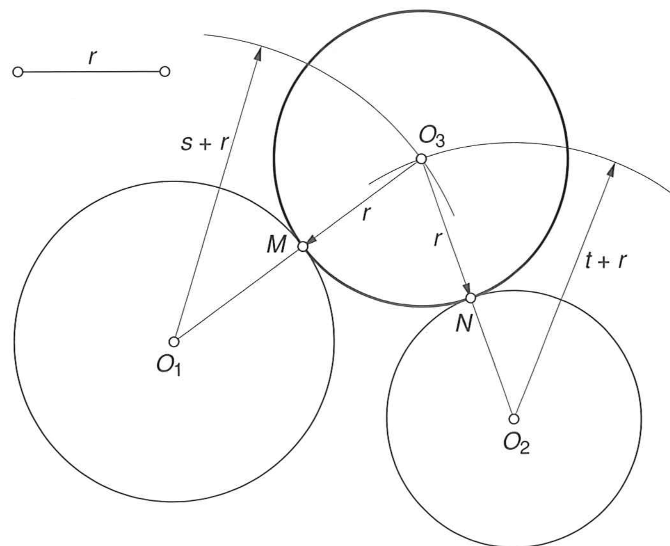
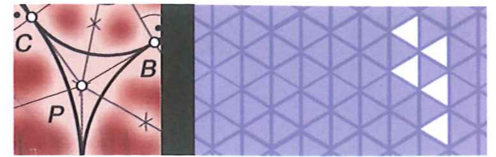


Fig. 5.19. *Circunferencia tangente y exterior a dos circunferencias dadas.*



▶▶▶ Circunferencia de radio *r* conocido, tangente interior a dos circunferencias dadas

1. El proceso es parecido al trazado anterior. En este caso, se hace centro en O_1 y se traza un arco con $r - s$.

2. Trazamos otro arco con centro en O_2 y radio $r - t$. Al cortarse ambos en O_3, queda determinado el centro de la circunferencia pedida. Los puntos *M* y *N* se obtienen uniendo O_3 con O_1 y O_2.

3. Por último, se traza la circunferencia que se busca con centro en O_3 y radio *r*.

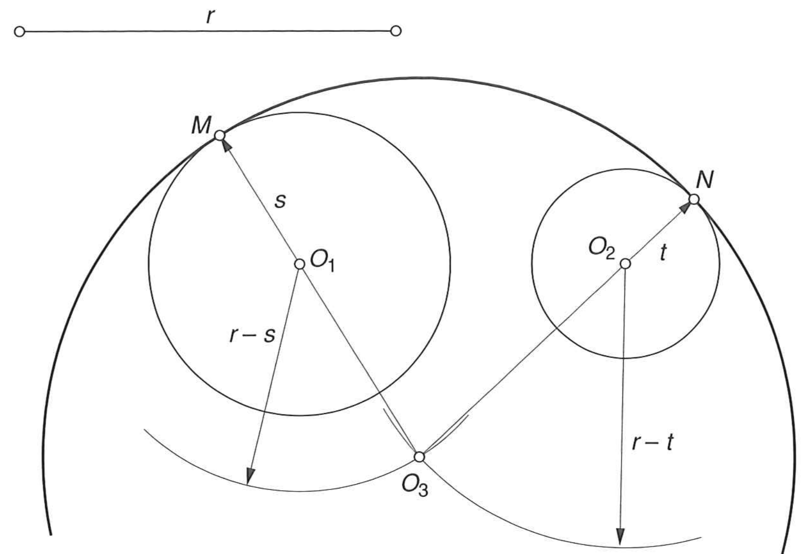


Fig. 5.20. *Circunferencia tangente e interior a dos circunferencias dadas.*

▶▶▶ Arco de circunferencia de radio r conocido, tangente a dos circunferencias dadas que corta la línea que une sus centros

1. Con centro en O_1, se dibuja un arco de radio $r - s$, y se toma como centro O_2; se traza otro arco de radio $r + t$ que corta al anterior, lo que determina un punto O_3, que es el centro del arco que se pide.

2. Al unir O_3 con O_2 y con O_1 se obtienen los puntos *M* y *N* de tangencia.

3. Por último, se traza el arco que se quiere determinar con centro en O_2 y radio *r* (Fig. 5.21).

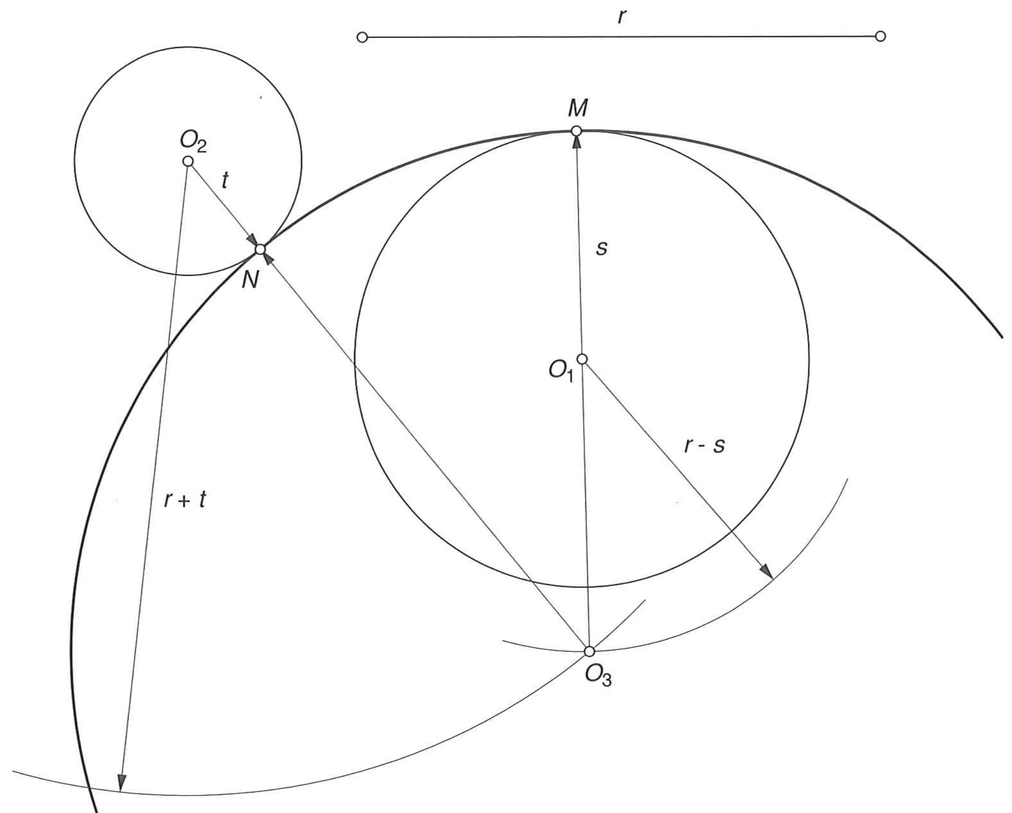
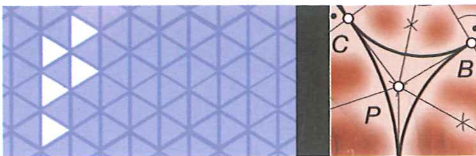


Fig. 5.21. *Arco tangente a dos circunferencias que corta la línea que une sus centros.*



5.2. Enlaces

A. Definición

La unión armónica entre curvas y rectas o de curvas entre sí se denomina **enlace,** y esta unión debe producirse por tangencia.

B. Construcción de enlaces

El modo de operar es el siguiente:

a) Se determinan los puntos de tangencia del problema planteado.

b) Se traza la línea de enlace entre los puntos de tangencia. De este modo el conjunto de líneas, rectas y curvas o curvas entre sí, aparece como una sola línea continua y armónica.

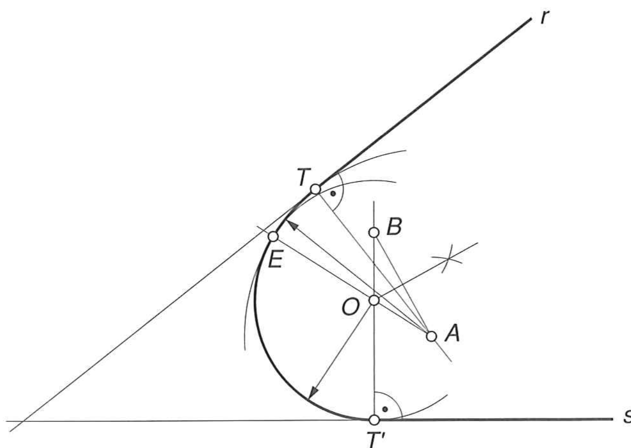


Fig. 5.22. *Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio, conociendo los puntos de tangencia.*

Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio, conociendo los puntos *T* y *T'* de tangencia

1. Se trazan perpendiculares por los puntos *T* y *T'* de tangencia dados a las rectas *r* y *s*, señalando sobre ellas los puntos *A* y *B* de manera arbitraria, pero siendo igual el segmento *AT* que el *BT'*.

2. Se toma el punto *A* como centro de uno de los dos arcos que van a unir las dos rectas. Por tanto, con centro en *A* y radio *AT* se traza un arco.

3. Se dibuja el segmento *AB* y donde su mediatriz corta al segmento *BT'* se encuentra el centro *O* del otro arco buscado.

4. Con centro en *O* y radio *OT'* se traza otro arco que corta al anterior en el punto *E* de tangencia entre ambos arcos. Este punto se encuentra situado en la recta que une los centros de dichos arcos (Fig. 5.22).

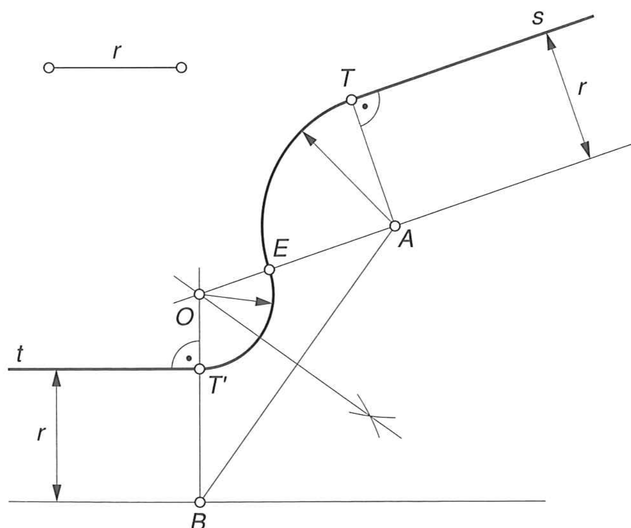


Fig. 5.23. *Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos de sentido contrario.*

Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos de sentido contrario, conociendo los puntos de tangencia *T* y *T'* y el radio *r* de uno de los arcos

1. Se trazan perpendiculares por los puntos de tangencia *T* y *T'* dados a las rectas *s* y *t*. Con una distancia igual a *r*, se trazan paralelas a *s* y a *t*, determinando los puntos *A* y *B*, como se indica en la figura.

2. Se dibuja el segmento *AB* y, donde su mediatriz corta a la prolongación de *T'B* queda determinado *O*, centro de uno de los arcos buscados. Se une *A* con *O*, y con centro en *A* y radio *AT* se describe un arco hasta cortar al segmento *OA* en el punto *E*, punto de enlace de los arcos buscados.

3. Con centro en *O* y radio *OT'*, se realiza un arco hasta el punto *E*, determinando de este modo el enlace pedido (Fig. 5.23).



▶▶▶ Enlace de dos rectas paralelas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio conociendo los puntos *T* y *T'* de tangencia

1. Se trazan por los puntos de tangencia *T* y *T'* perpendiculares a las rectas dadas *r* y *s*. Se traza el segmento *TT'* y se halla su mediatriz obteniendo el punto *A*.

2. Por *A* se traza una recta paralela a las rectas *r* y *s*. Con centro en *A* y radio *AT* se describe un arco que corta a la paralela en el punto *E*, punto de tangencia de los dos arcos que unen las rectas *r* y *s*.

3. Por el punto E se traza una paralela a la mediatriz de *TT'* que corta a las perpendiculares trazadas desde *T* y *T'* a las rectas *r* y *s*, respectivamente, en los puntos O_1 y O_2, centros de los arcos buscados (Fig. 5.24).

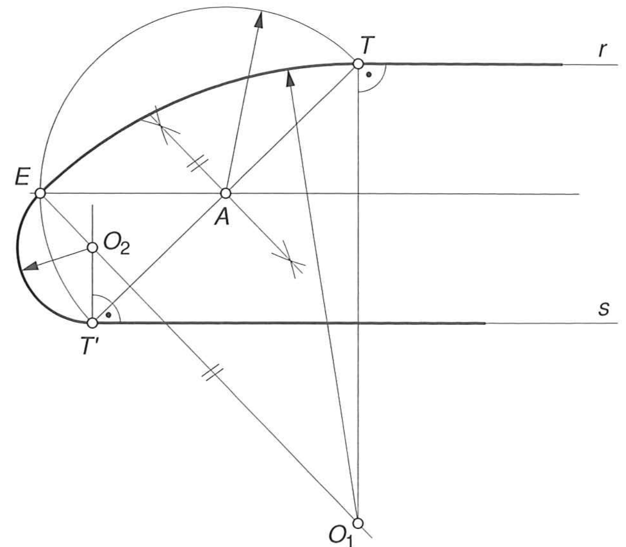


Fig. 5.24. *Enlace de dos rectas paralelas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio.*

▶▶▶ Enlace de un arco de radio conocido y una recta *s* dada, mediante un arco del mismo sentido y de radio *r*

1. Se toma un punto *P* cualquiera de la recta *s*, y a partir de él se traza una perpendicular a *s*. Sobre la perpendicular, y a partir de *P* se lleva la magnitud de *r*, obteniendo así el punto *Q*; a partir de él se traza una paralela a la recta *s*.

2. Se resta al radio *r'*, radio del arco conocido, el radio *r* del arco de unión. Se toma como medida esta diferencia para trazar un arco con centro en O_1 que corta a la paralela en O_2, centro del arco buscado. Se une O_1 con O_2 para determinar *E*, punto de enlace de los dos arcos.

3. Con centro en O_2 y radio O_2E, se traza el arco solución hasta unir con *A*, punto éste hallado al trazar la perpendicular desde O_2 a la recta *s* (Fig. 5.25).

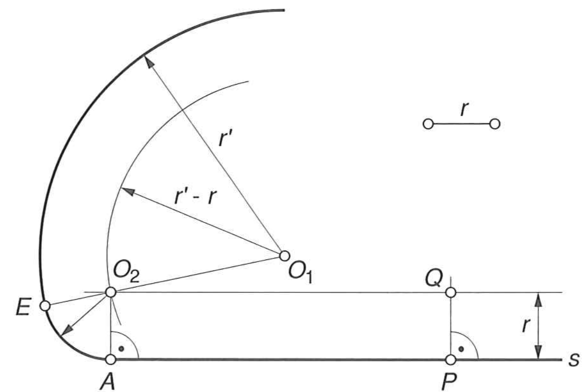


Fig. 5.25. *Enlace de un arco y una recta mediante un arco del mismo sentido.*

▶▶▶ Enlace de dos arcos, conociendo sus radios, que se cortan en sentido contrario mediante un arco de radio *r"*

1. Los centros de los arcos conocidos son los puntos O_1 y O_2 y sus radios *r* y *r'*, respectivamente. Se resta a *r* el radio *r"*, radio del arco de enlace buscado, tomando la medida resultante como radio se traza desde O_1 un arco.

2. Se suma a *r'* el radio *r"* y, con el valor del resultado como radio, se traza desde O_2 otro arco. El punto O_3 queda determinado al cortarse los arcos realizados desde O_1 y O_2.

3. Se une O_3 con O_1 y O_2, respectivamente, y se obtienen los puntos *T* y *T'*, que son los puntos de tangencia en el enlace. Para terminar, se hace centro en O_3 y, con radio O_3T, se traza un arco desde *T* hasta *T'*, para determinar el enlace pedido (Fig. 5.26).

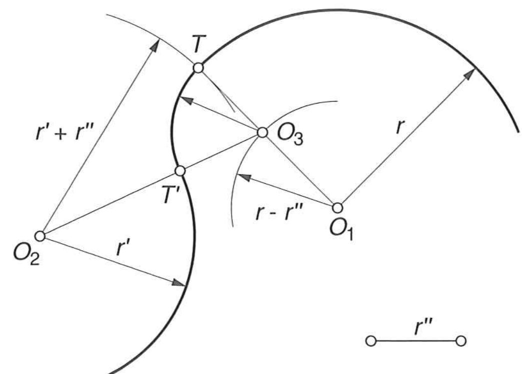


Fig. 5.26. *Enlace de dos arcos que se cortan en sentido contrario.*



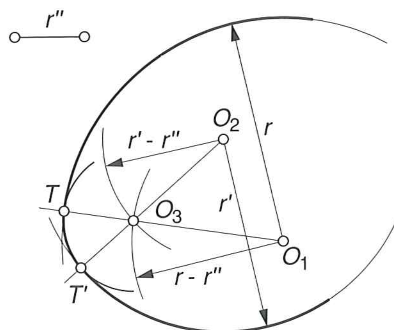


Fig. 5.27. *Enlace de dos arcos que se cortan en el mismo sentido.*

▶▶▶ Enlace de dos arcos, conociendo sus radios, que se cortan en el mismo sentido, mediante un arco de radio r''

1. La construcción de este problema es similar al expuesto anteriormente; de hecho, este Apartado es igual a su primero (véase en la Figura 5.27).

2. Se resta a *r'* el radio *r''*, radio del arco de enlace buscado, tomando la medida resultante como radio se traza desde O_2 un arco. El punto O_3 queda determinado al cortarse los arcos realizados desde *01* y O_2.
3. Se une O_3 con O_1 y O_2, respectivamente, y se obtienen los puntos *T* y *T'* que son los puntos de tangencia en el enlace. Para terminar se hace centro en O_3 y, con radio O_3 *T*, se traza un arco desde *T* hasta *T'*, para determinar el enlace pedido (Fig. 5.27).

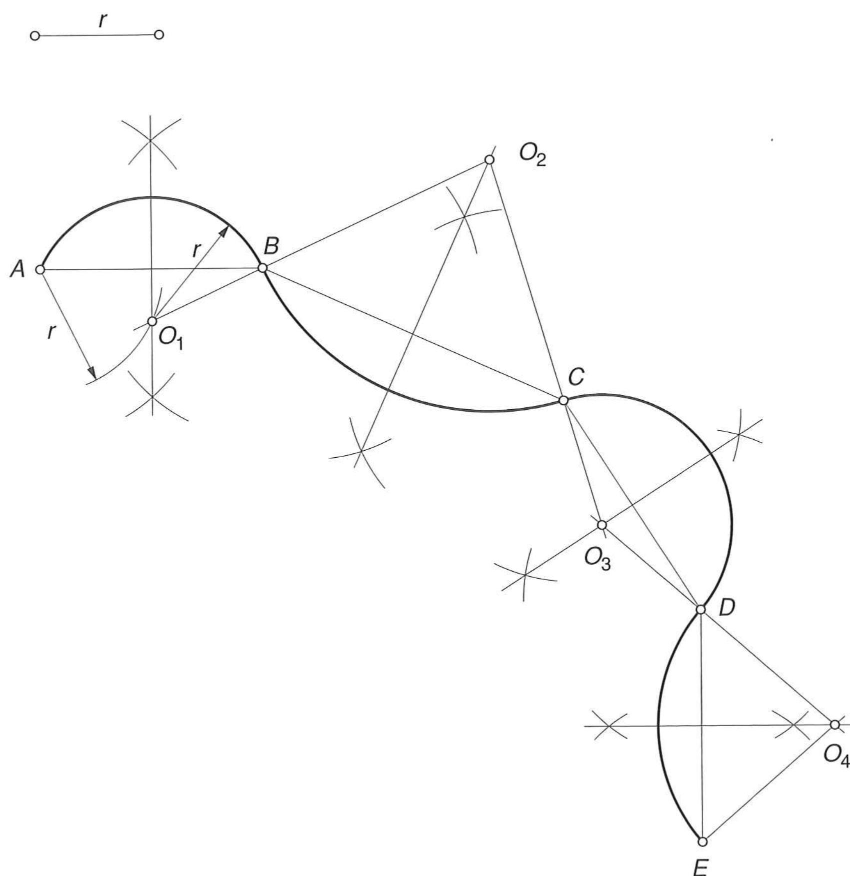


Fig. 5.28. *Enlace de arcos tangentes que envuelven una línea poligonal.*

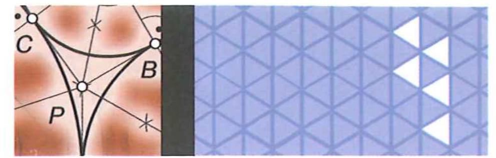
▶▶▶ Enlace de una serie de arcos tangentes entre sí que envuelven una línea poligonal dada

Se parte del conocimiento de donde están los puntos *A*, *B*, *C*, etc., y el valor del radio *r* que tiene el arco *AB*.

1. Se halla la mediatriz del segmento *AB*; con centro en *A* y radio *r* se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto O_1. Después, con centro en O_1 y radio *r* se traza un arco que une los puntos *A* y *B*.

2. Se unen los puntos *B* y *C* y se halla la mediatriz del segmento que corta a la recta O_1B en el punto O_2. Con centro en O_2, se traza el arco *BC*.

3. Se unen los puntos *C* y *D*, y se traza la mediatriz del segmento *CD* que corta a la recta O_2C en el punto O_3. Con centro en O_3 se traza el arco *CD*, y así sucesivamente (Fig. 5.28).



5.3. Molduras y arcos

A. Definición

Las **molduras** son adornos que se utilizan principalmente en obras de arquitectura. Se suelen poner a lo largo de las fachadas de edificios entre la unión de dos elementos arquitectónicos, o incluso dentro de sus estancias. Por ejemplo, en la unión de las paredes con el techo de las habitaciones, alrededor de las ventanas y puertas, etc. En algunas ocasiones sirven también como elemento de refuerzo.

La moldura, por tanto, consiste en una banda en relieve con un perfil uniforme que se repite sucesivamente. Las Figuras 5.29 a 5.32 muestran la construcción de las molduras más comunes.

Fig. 5.29. *Corona.*

Fig. 5.30. *Escocia.*

Los **arcos** son también construcciones arquitectónicas de configuración generalmente curva que cubre el vano de un muro o la luz entre pilares, mandando a éstos las cargas de la edificación que hay encima del vano. Las Figuras 5.33 a 5.36 recogen la construcción de varios arcos utilizados en arquitectura.

Las construcciones de molduras y de arcos que te presentamos en esta página están basadas en la utilización de enlaces, que se han llevado a cabo partiendo del trazado de circunferencias tangentes. Recuerda que los enlaces se pueden realizar con arco de circunferencia y recta, o con arcos de circunferencia.

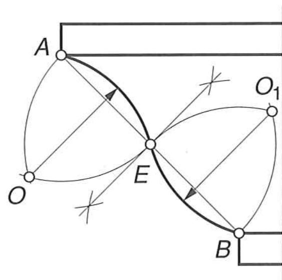


Fig. 5.31. *Gola.*

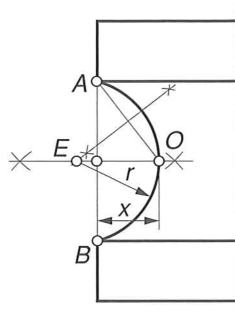


Fig. 5.32. *Gorguera.*

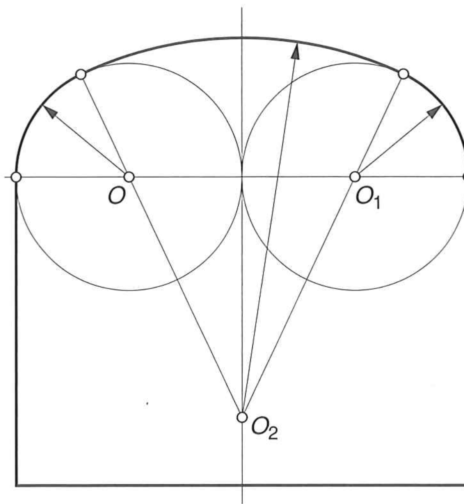


Fig. 5.33. *Arco carpanel.*

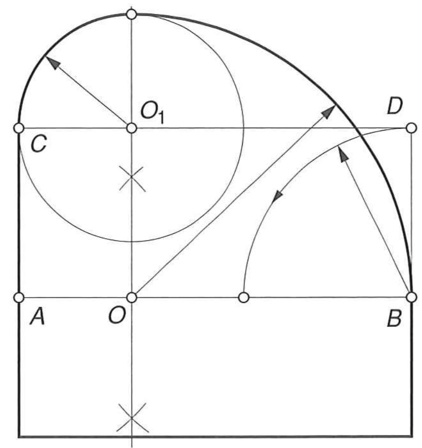


Fig. 5.34. *Arco rampante.*

En estos ejemplos de molduras y arcos, el punto de tangencia entre dos circunferencias se produce en el cambio de una curva a otra. Fíjate cómo están construidos los diferentes ejemplos, son muy sencillos sus trazados; intenta reproducirlos con precisión y limpieza.

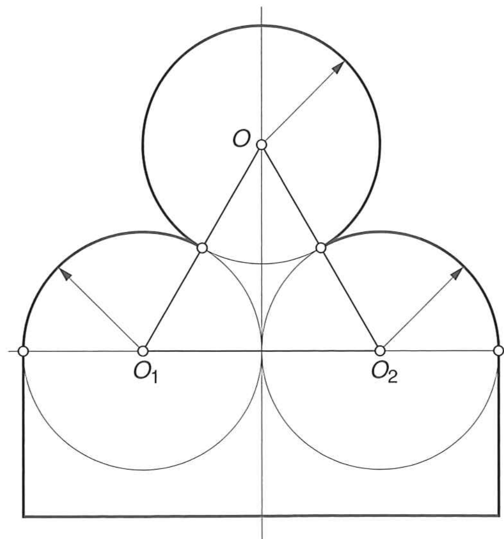


Fig. 5.35. *Arco trebolado.*

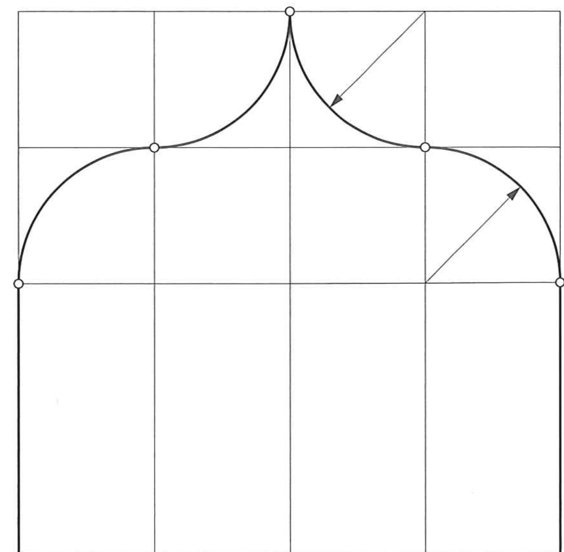


Fig. 5.36. *Arco flamígero o conopial.*

Cuestiones

Responde de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo se dice que dos figuras planas son tangentes?
2. Define tres teoremas para solucionar con exactitud los trazados de tangencias.
3. Explica el proceso de construcción, de manera escrita y gráfica, de cómo trazar un arco de circunferencia de radio *r* conocido, tangente a dos circunferencias dadas que cortan la línea que une sus centros.
4. Una vez estudiados los contenidos de esta Unidad, ¿qué es un enlace?
5. ¿Cómo se opera para construir enlaces?
6. Explica el proceso de construcción, de manera escrita y gráfica, de cómo enlazar una línea poligonal mediante una serie de arcos tangentes entre sí que la envuelvan.
7. ¿Qué es una moldura? Enuncia dos ejemplos, y comenta de manera escrita y gráfica su construcción.
8. Un arco es un elemento arquitectónico ¿Cómo lo definirías?

   Enuncia dos ejemplos, y comenta de manera escrita y gráfica su construcción.

Ejercicios

1. Dibuja las circunferencias tangentes a tres rectas cualesquiera que se cortan dos a dos.
2. Dadas dos circunferencias cuyos centros distan 70 mm y sus radios tienen un valor de 30 y 19 mm, respectivamente, dibuja las rectas tangentes exteriores a dichas circunferencias.
3. Partiendo de los datos del ejercicio anterior, traza rectas tangentes e interiores a las circunferencias dadas.

Todos los ejercicios propuestos a continuación se realizaran a escala 2:1 en una hoja de papel blanco formato A4.

4. Pieza mecánica (Fig. 5.37).

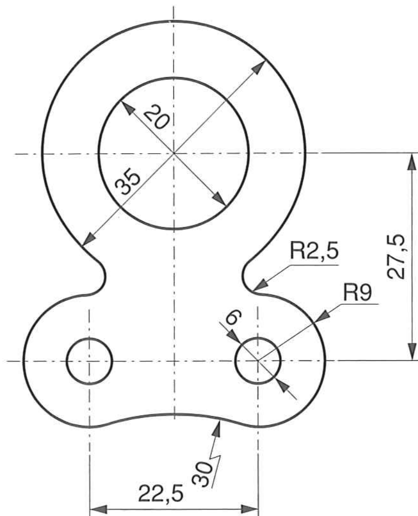


Fig. 5.37. *Ejercicio 7, pieza a dibujar.*

5. Pieza mecánica (Fig. 5.38).

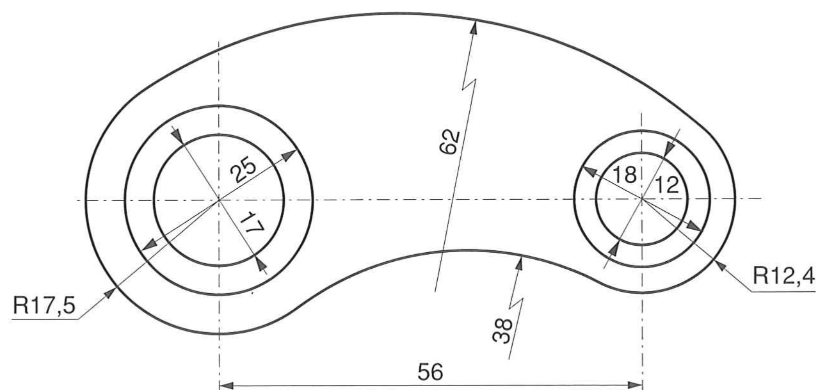


Fig. 5.38. *Ejercicio 4, pieza a dibujar.*

6. Pieza mecánica (Fig. 5.39).

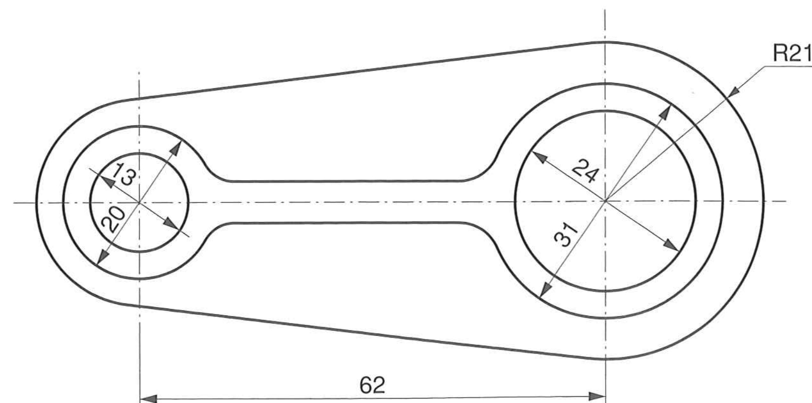
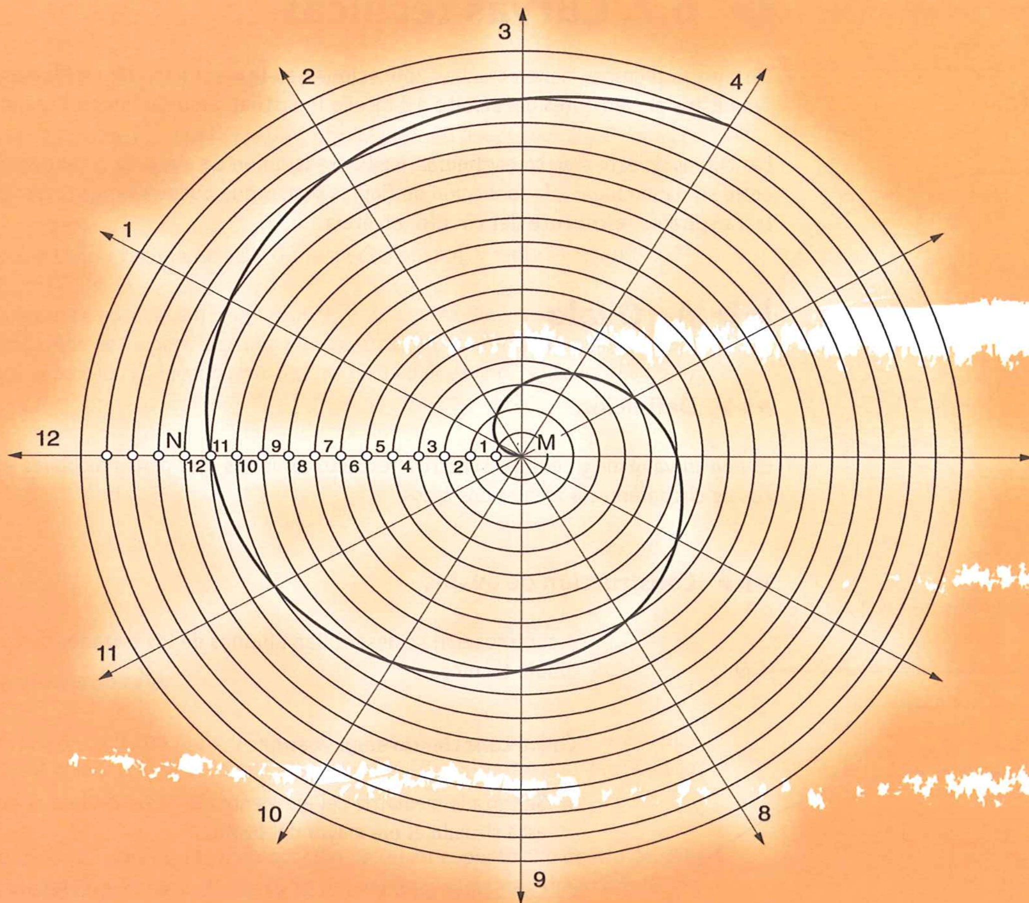


Fig. 5.39. *Ejercicio 5, pieza a dibujar.*

06

Curvas geométricas



En la actualidad, una parte importante de los objetos que se fabrican están realizados bajo algún tipo de forma curva geométrica.

Si prestamos atención a nuestro entorno, nos damos cuenta de que en muchos de los objetos que nos rodean están presentes las curvas técnicas y las curvas cónicas. Por ejemplo, desde la forma de parábola que algunos ojos de puente tienen, hasta la forma de ovalo u ovoide con que se han diseñado ciertas cucharas.

La naturaleza también contribuye a crear este tipo de formas; los meandros de algunos ríos, o el viento al modelar las arenas de los desiertos dan testimonio de este tipo de figuras geométricas.



6.1. Curvas geométricas

Se define a una línea como **curva geométrica** cuando se aparta constantemente de la dirección recta sin formar ángulos, y la trayectoria de los puntos que la forman es continua y, además, cumple una determinada norma.

Existen dos grupos de curvas geométricas: las denominadas **planas** y las **alabeadas.**

Una curva recibe el nombre de **plana** cuando todos sus puntos están situados en un mismo plano; y curva **alabeada** cuando cuatro de sus puntos no se encuentran en el mismo plano.

Dependiendo de la forma que tengan de generarse, las **curvas planas** se dividen en **curvas técnicas** y **curvas cónicas,** que poseen propiedades específicas y distintas entre sí.

6.2. Curvas técnicas

Las curvas técnicas tienen muchas aplicaciones en la resolución de problemas de dibujo técnico, ya sean éstos provenientes del ámbito del diseño industrial, arquitectónico o gráfico.

Las curvas de este tipo se configuran mediante la unión de arcos de circunferencia que son tangentes entre sí, dando lugar a la formación de figuras planas que pueden ser cerradas: **óvalo, ovoide;** o abiertas: **espirales, evolvente del círculo**, etcétera.

A. Óvalo

Definición

Es una curva plana y cerrada, simétrica respecto a sus dos ejes perpendiculares y formada por cuatro arcos de circunferencia iguales dos a dos.

Construcción de óvalos

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de óvalos más utilizados en dibujo técnico.

Óvalo conociendo el eje menor

1. Se traza la mediatriz del eje menor *CD,* obteniéndose el punto *O*. En la mediatriz está situado el eje mayor del óvalo.

2. Con centro en *O* y radio *OC* se dibuja una circunferencia que corta al eje mayor en los puntos O_1 y O_2; se unen estos puntos con *C* y *D* prolongando dichas rectas.

3. Con radio *CD* y centro en *C* y *D*, respectivamente, se trazan dos arcos que determinan los puntos *P* y *P'*, *Q* y *Q'*, puntos de tangencia entre los arcos que forman el óvalo.

4. Por último, con centro en O_1 y en O_2, y radio O_1P, se trazan los otros dos arcos para unir *P* con *Q*, y P' con *Q'*; de este modo queda determinado el óvalo. (Fig. 6.1)

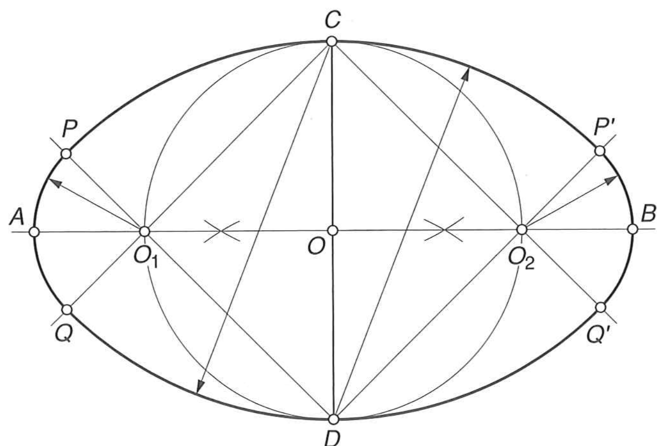


Fig. 6.1. *Óvalo conociendo el eje menor.*



Óvalo conociendo el eje mayor (primer procedimiento)

1. Se divide el eje mayor AB en tres partes iguales, determinando así los puntos O y O_1. Con centro en estos puntos y radio igual a 1/3 de AB, por ejemplo OA, se trazan dos circunferencias que se cortan en los puntos O_2 y O_3.

2. Se unen mediante rectas los puntos O y O_1 con O_2 y O_3, obteniendo así los cuatro puntos de tangencia: P y P', y Q y Q'.

3. Con centro en O_2 y O_3 respectivamente y radio O_3P, se realizan dos arcos hasta unir los puntos P con P' y Q con Q'. De este modo queda resuelto el óvalo pedido (Fig. 6.2).

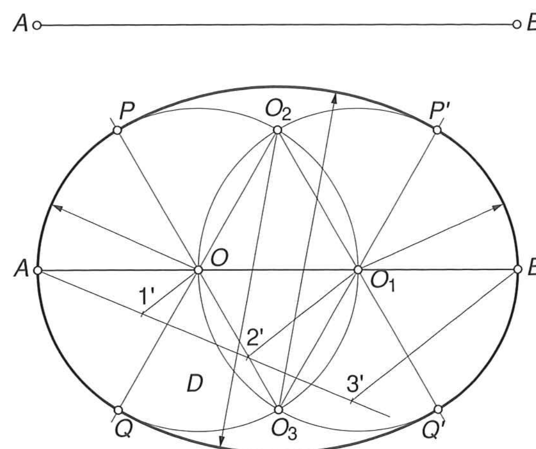


Fig. 6.2. *Óvalo conociendo el eje mayor, primer procedimiento.*

Óvalo conociendo el eje mayor (segundo procedimiento)

1. Se divide el eje mayor AB en cuatro partes iguales, obteniendo así los puntos O y O_1 que corresponden a los puntos 1 y 3 en el eje dividido. Se trazan dos circunferencias con centro en O y O_1, respectivamente, y radio igual a 1/4 de AB, es decir, OA.

2. Se trazan dos arcos con centro también en O y O_1, respectivamente, y radio igual a OO_1.

3. Donde los arcos se cortan se encuentran los puntos O_2 y O_3, centros de los arcos mayores del óvalo. Para hallar los puntos de tangencia se unen los centros O_2 y O_3 con los otros centros O y O_1, y a partir de aquí se procede de igual manera que se hizo en el ejercicio anterior (Fig. 6.3).

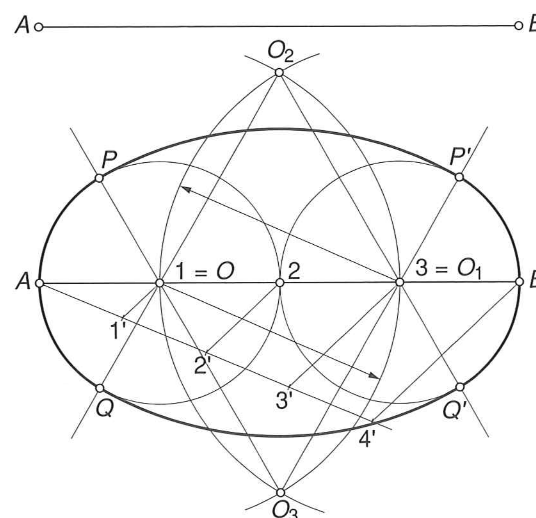


Fig. 6.3. *Óvalo conociendo el eje mayor, segundo método.*

Óvalo óptimo conociendo los dos ejes

1. Se traza un arco de centro en O con radio OA que corta a la prolongación de CD, eje menor, en el punto P. Se une A con C, y se describe un arco de radio CP con centro en C hasta cortar el segmento AC en V.

2. Se dibuja la mediatriz de AV, que corta la prolongación de OD en el punto M o dentro del propio segmento, y al semieje mayor en el punto N. Se determinan los puntos simétricos de M y N respecto a los ejes del óvalo, M' y N'.

3. Se unen los puntos M y M' con N y N', respectivamente, y se trazan los arcos de centro M' y M con radio $M'D$ y MC, obteniéndose los puntos Q y Q' y P y P'.

4. Por último, se dibujan los arcos de centro N y N' con radio NA y $N'B$ hasta los puntos de tangencia anteriormente trazados: Q y Q', y P y P'; de esta manera se consigue construir el óvalo (Fig. 6.4).

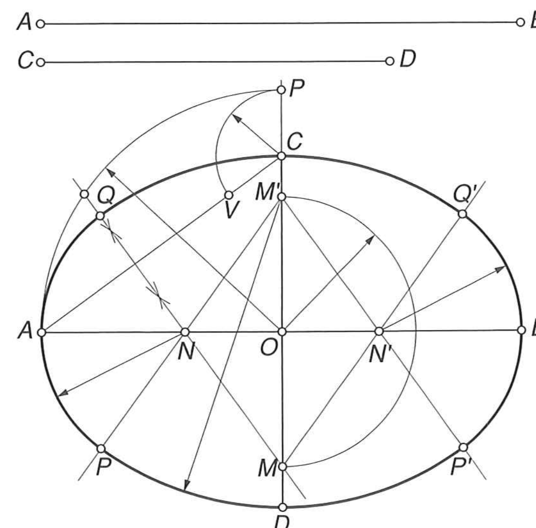


Fig. 6.4. *Óvalo óptimo conociendo los dos ejes.*

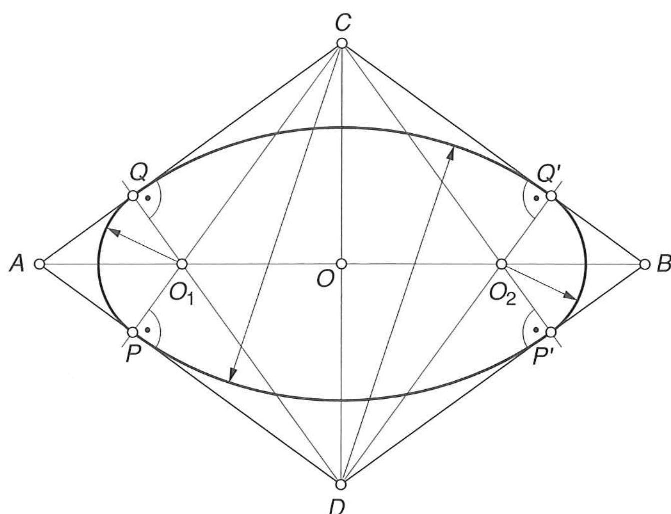


Fig. 6.5. *Óvalo inscrito en un rombo.*

Óvalo inscrito en un rombo.

1. Se parte de un rombo cualquiera $ABCD$. Desde los vértices de los ángulos de mayor valor del rombo, se trazan rectas perpendiculares a los lados opuestos a ellos, que cortan al eje mayor determinando los puntos O_1 y O_2, y a los lados del rombo en P y P', y Q y Q'.

2. Los puntos C, D, O_1 y O_2 son los centros de los cuatro arcos que forman el óvalo pedido.

3. Con centro en C y D respectivamente y radio CP, se trazan dos arcos hasta unir P con P', y Q con Q'. Del mismo modo, con centro en O_1 y O_2, se trazan dos arcos hasta unir P con Q y P' con Q', terminando así de construir el óvalo (Fig. 6.5).

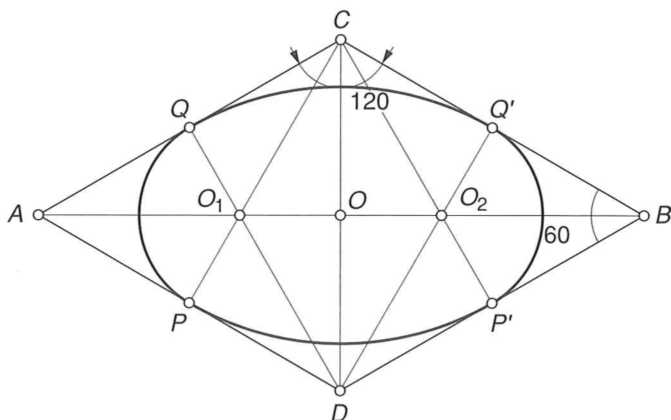


Fig. 6.6. *Óvalo isométrico.*

Óvalo isométrico

En el caso de que los ángulos mayores del rombo donde se ha de inscribir el óvalo valgan 120°, y por tanto los menores 60°, el óvalo inscrito en él se llama **isométrico.** Su construcción se realiza de igual manera que en el caso descrito anteriormente.

La razón de adoptar este nombre viene dada porque esta figura se utiliza en dibujo isométrico para sustituir, de manera aproximada, a la elipse que tenga el mismo valor de ejes que el óvalo (Fig. 6.6).

▶▶ B. Ovoide

▶▶▶ Definición

El **ovoide** es una curva plana y cerrada, simétrica sólo respecto a su eje mayor, y formada por cuatro arcos de circunferencia, de los que dos son iguales y los otros dos son desiguales.

▶▶▶ Construcción de ovoides

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de ovoides más utilizados en dibujo técnico.

Ovoide conociendo el eje menor

1. Se dibuja la mediatriz del eje conocido AB, obteniendo el punto O. Con centro en O y radio OA, se traza una circunferencia que corta a la mediatriz en el punto P.

2. Se unen los puntos A y B con P, obteniendo las semirectas r y s. Se trazan dos arcos con radio AB y centro en los puntos A y B, obteniéndose así los puntos M y M'.

3. Con centro en P y radio PM o PM', se describe el último arco que configura el ovoide pedido (Fig. 6.7).

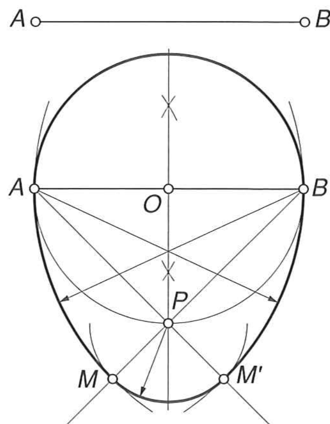
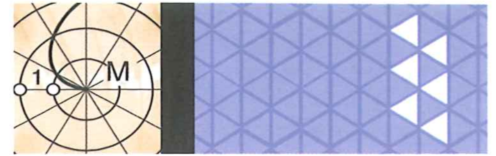


Fig. 6.7. *Ovoide conociendo el eje menor.*



Ovoide conociendo el eje mayor

1. Se divide el eje mayor *AB* en seis partes iguales, y por la segunda división se traza una perpendicular al eje. Se hace centro en esa misma división, es decir en la 2, y con radio 2-6, se describe un arco que determina los puntos *P* y Q.

2. Se unen *P* y *Q* con el punto 5, quinta división de AB. Se hace centro en el punto 2 y con radio *2P* o *2Q* se dibuja una semicircunferencia, obteniendo sobre el segmento *PQ* los puntos *H* e *I*. Con centro en *P* y *Q*, respectivamente, y radio *PI*, se trazan los arcos que determinan los puntos *M* y *N*.

3. Por último, con centro en el punto 5, y con radio 5*M*, se traza un arco para terminar de construir el ovoide pedido (Fig. 6.8).

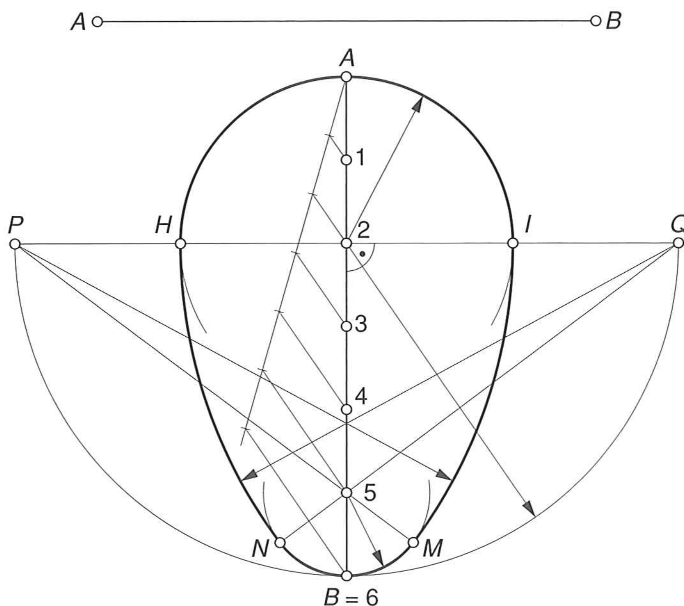


Fig. 6.8. *Ovoide conociendo el eje mayor.*

Ovoide conociendo los dos ejes

1. Se toma el eje menor *CD* y se traza su mediatriz, obteniéndose el punto *O*. Con centro en él y radio *OC*, se dibuja una circunferencia que corta a la mediatriz en los puntos *A* y *J*. Desde *A* y sobre dicha mediatriz, se lleva el valor del eje mayor *AB*, quedando de esta manera situados los ejes del ovoide.

2. Con centro en *J* y radio *JB*, se dibuja una circunferencia. A partir de *C* y sobre *CD* se lleva la magnitud JB obteniendo el punto *M*. Se determina la mediatriz de *MJ*, obteniéndose el punto *N* sobre el segmento *OD*.

3. Se halla el simétrico de *N* sobre *CO*, obteniéndose el punto *N'*. Se unen los puntos *N* y *N'* con *J*, determinándose los puntos de tangencia *Q* y *Q'*.

4. Por último, con centro en *N* y *N'* respectivamente, y radio *NC*, se trazan los arcos hasta unir *C* con *Q* y *D* con *Q'*, *con lo que se* obtiene el ovoide buscado (Fig. 6.9).

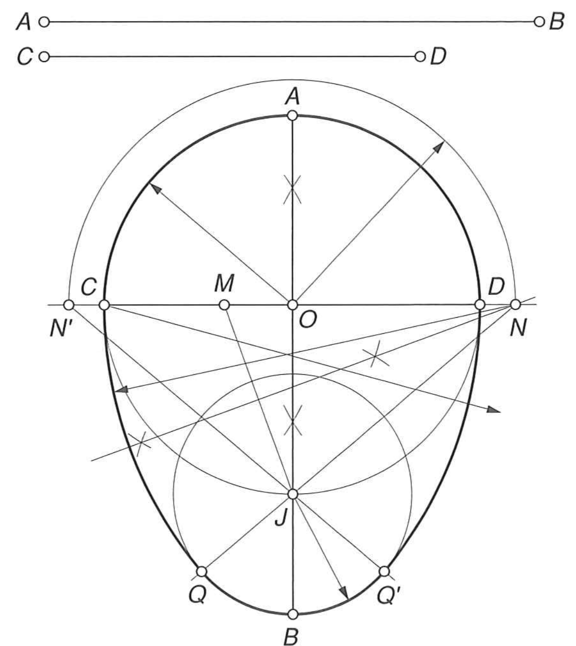


Fig. 6.9. *Ovoide conociendo los dos ejes.*

C. Espiral

Definición

La **espiral** es una curva plana, abierta y continua que se configura en expansión por un punto que se desplaza de manera uniforme a lo largo de una recta, estando ésta fija en un punto por el cual gira con un valor angular constante. Una espiral se define por los siguientes elementos:

Paso: es la distancia longitudinal con que se desplaza un punto de la curva en una vuelta completa. Es decir, es la distancia entre dos espiras consecutivas.

Espira: es la parte de la curva descrita en cada vuelta.

Núcleo: es a partir de donde se genera, en expansión, la espiral. Los núcleos pueden ser lineales si los centros están situados en una línea, o poligonales si son los vértices del polígono los centros que generan la curva.

Radios vectores: son la prolongación, bien de la línea donde están situados los centros del núcleo, o bien de los lados del polígono que hace de núcleo.



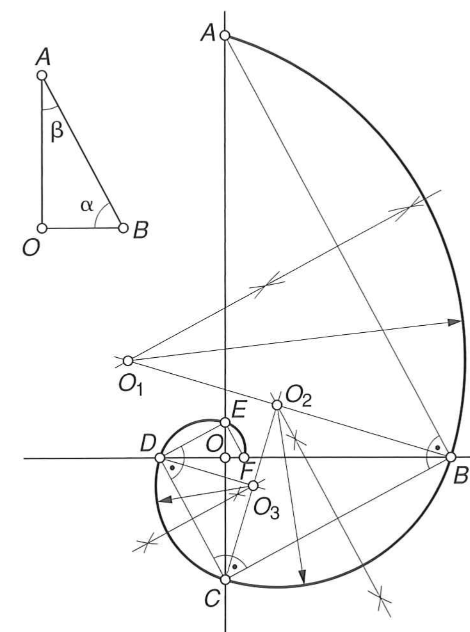


Fig. 6.10. *Espiral logarítmica.*

▶▶▶ Construcción de espirales

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de espirales más utilizados en dibujo técnico.

Espiral logarítmica

1. En esta curva se comprueba que el movimiento de traslación no es uniforme, sino que sigue una progresión geométrica, de tal modo que el paso es variable.

2. Para su construcción se trazan dos ejes perpendiculares entre sí, obteniéndose el punto *O* donde se cortan. Se traza un triángulo rectángulo *ABO*, cuyos catetos formen con la hipotenusa los ángulos que se quieren dejar constantes durante el recorrido del punto generador. Partimos del triángulo escogido *ABO*.

3. Por el punto *B* se traza una perpendicular a la hipotenusa *AB*, lo que determina sobre el otro eje el punto *C* por el que, a su vez, se traza otra perpendicular al segmento *BC*, obteniéndose el punto *D* sobre el otro eje, y así sucesivamente.

4. Se trazan las mediatrices de los segmentos que contienen los puntos *A, B, C, D*, etc., y donde éstas corten a las bisectrices de los ángulos rectos que forman la línea poligonal definida por ellos, se obtienen los centros O_1, O_2, O_3, etc., de los diferentes arcos de circunferencia que configuran la espiral. Descritos éstos con sus radios particulares O_1A, O_2B, O_3C, etc., y unidos convenientemente, dan como consecuencia la construcción de la espiral como puede apreciarse en la Figura 6.10.

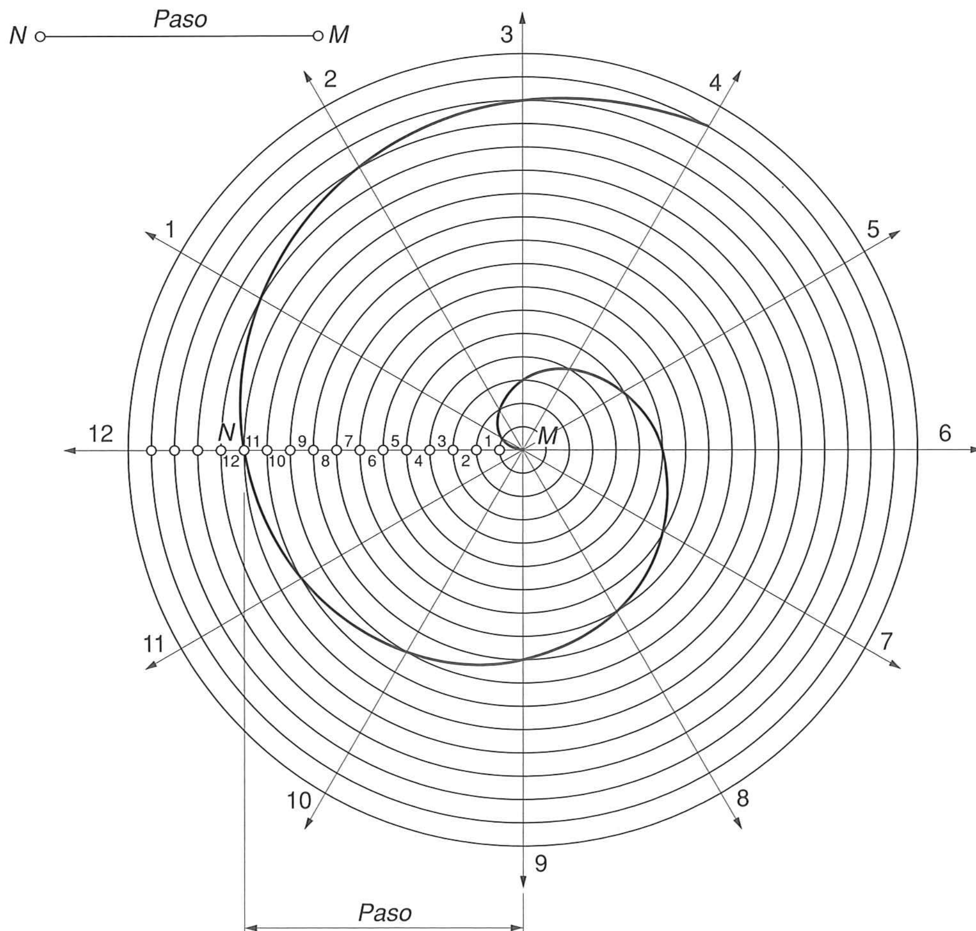
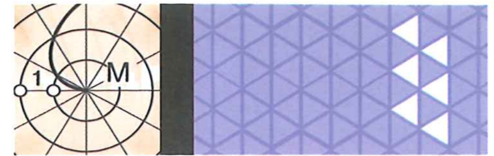


Fig. 6.11. *Espiral de Arquímedes.*

Espiral de Arquímedes conociendo el paso MN

1. Se divide el segmento *MN* en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo doce. Con centro en *M* y con radios *M*1, *M*2 ..., hasta *M*12, se trazan circunferencias.

2. Se divide la circunferencia en doce partes iguales y se trazan los respectivos radios. La intersección de dichos radios con los arcos correspondientes determinan los diversos puntos que configuran la espiral, puntos que, unidos con trazo continuo, determinan la curva pedida (Fig. 6.11).



C. Voluta

Definición

Se denomina **voluta** a la curva plana, abierta y continua compuesta por arcos de circunferencia, tangentes entre sí, siendo los centros de los arcos los vértices de un polígono básicamente regular.

Construcción de volutas

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de volutas más utilizados en dibujo técnico.

Volutas de núcleo triangular, cuadrada y hexagonal

1. La construcción de este tipo de volutas es muy sencillo: basta con fijar la posición de sus centros y la longitud del radio inicial. Observa, en las Figuras 6.12, 6.13 y 6.14, cómo en el dibujo, de cada una de ellas, los trazados para su construcción se repiten a partir de la primera vuelta, y sus arcos se desarrollan de forma paralela.

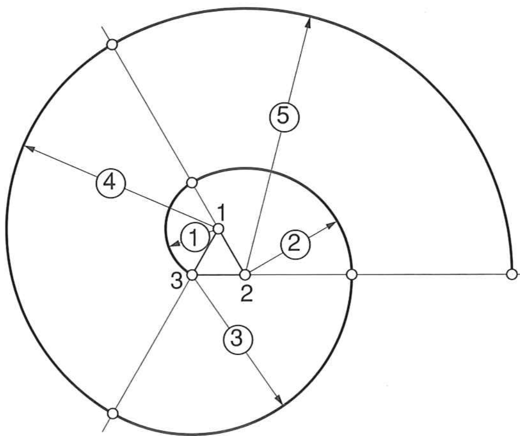


Fig. 6.12. *Voluta de núcleo triangular.*

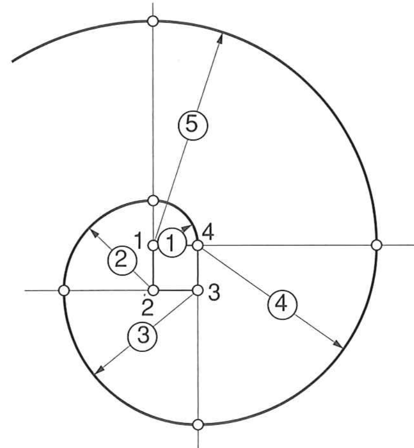


Fig. 6.13. *Voluta de núcleo cuadrangular.*

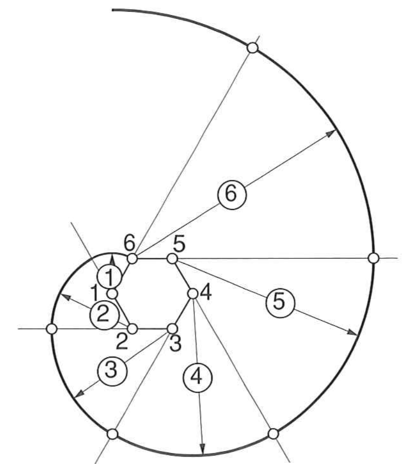


Fig. 6.14. *Voluta de núcleo hexagonal.*

Voluta jónica

1. Se parte de una circunferencia cuya longitud es igual al paso con el que se quiere construir la voluta. Se inscribe un cuadrado *ABCD* en ella, y sobre él se trazan paralelas a los lados por los puntos medios de éstos, obteniéndose los puntos 9, 10, 11 y 12.

2. Se dividen los segmentos 9-11 y 10-12 en seis partes iguales, y se numeran de la manera indicada en la Figura 6.15. Se dibujan las diagonales del cuadrado prolongándolas; en ellas están los puntos de tangencia de la voluta.

3. Con centro en 1 y radio 1*A*, se traza un arco hasta la diagonal determinándose el punto *E*; con centro en 2 y radio 2*E*, se traza otro arco hasta cortar a la siguiente diagonal en el punto F, y así sucesivamente (Fig. 6.15).

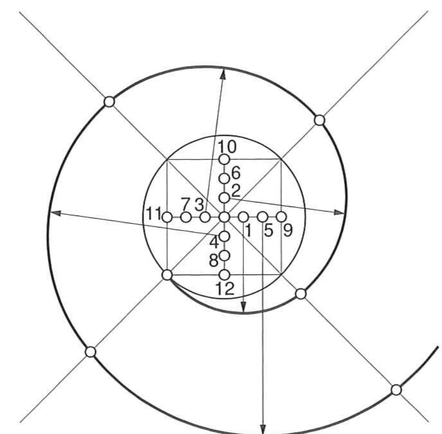


Fig. 6.15. *Voluta jónica.*

Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es una curva geométrica? Clasifícalas.
2. ¿Qué es un óvalo?
3. Dibuja un óvalo óptimo conociendo sus dos ejes, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
4. Dibuja un óvalo isométrico inscrito en un rombo, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
5. ¿Qué es un ovoide?
6. Dibuja un ovoide conociendo sus dos ejes, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
7. ¿En qué se diferencia un óvalo de un ovoide?
8. ¿Qué es una espiral? Describe cómo se generan las espirales, y qué elementos la configuran.
9. Dibuja una espiral logarítmica explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
10. ¿Qué es una voluta?
11. ¿Qué característica tienen en común el óvalo, el ovoide y la espiral?

Ejercicios

1. Dibuja un óvalo sabiendo que su eje menor mide 37 mm.
2. Dibuja un óvalo sabiendo que su eje mayor mide 65 mm.
3. Dibuja un óvalo óptimo sabiendo que sus ejes miden 67 mm, y 53 mm respectivamente.
4. Dibuja un ovoide sabiendo que su eje mayor mide 67 mm.
5. Dibuja un ovoide sabiendo que sus ejes miden 67 mm, y 53 mm respectivamente.
6. Dibuja una espiral de Arquímedes sabiendo que su paso mide 40 mm.
7. Dibuja una voluta de núcleo hexagonal, sabiendo que el lado del hexágono mide 12 mm.
8. Dibuja una voluta jónica sabiendo que la circunferencia cuya longitud es igual al paso tiene un radio de 18 mm.
9. Dibuja a escala 1:1 la llave de dos bocas de la Figura 6.16.
10. Fíjate en cómo están realizadas las espirales de las Figuras 6.17 y 6.18. Intenta reproducirlas averiguando cuáles han sido sus procesos de construcción.

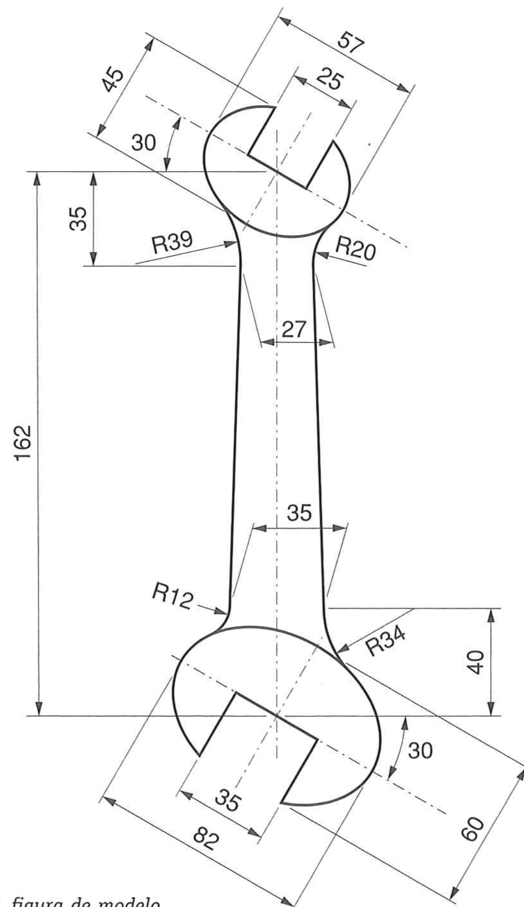


Fig. 6.16. *Ejercicio 9, figura de modelo.*

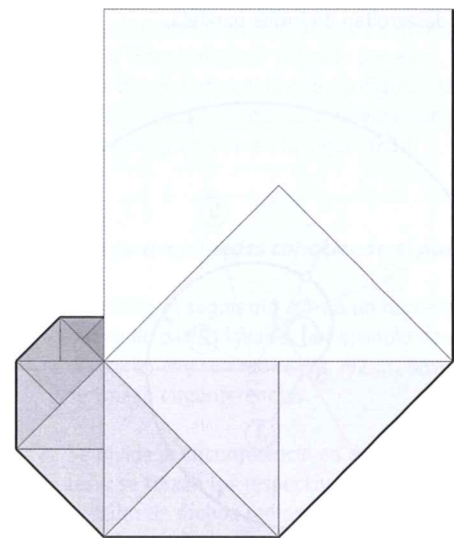


Fig. 6.17. *Ejercicio 10, primera figura de modelo.*

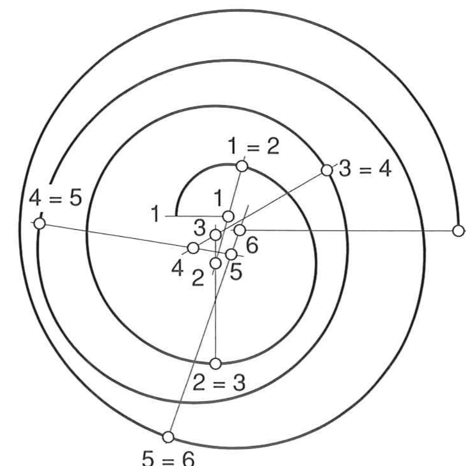
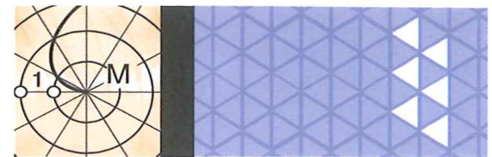


Fig. 6.18. *Ejercicio 10, segunda figura de modelo.*



6.3. Curvas cónicas

Las **curvas cónicas** se obtienen al seccionar un cono de revolución con un plano secante. Un cono de revolución es un cuerpo geométrico que puede considerarse engendrado por una línea recta denominada **generatriz,** que se mueve fija en un punto (centro de generación o **vértice** del cono), alrededor de un **eje** y con una dirección circular denominada **directriz.** (Fig. 6.19).

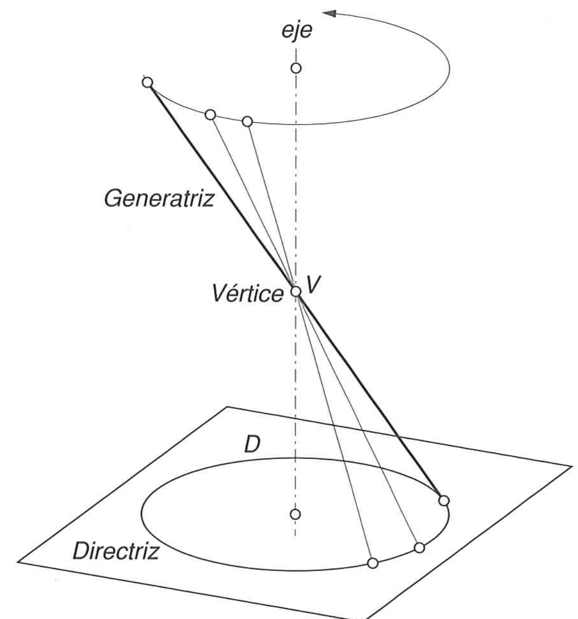


Fig. 6.19. *Elementos de un cono de revolución.*

A. Clasificación de las curvas cónicas

La posición del plano secante respecto del eje del cono posibilita diferentes tipos de curvas. Además de la circunferencia, que se genera cuando el plano secante (o plano sección) es perpendicular al eje del cono, son figuras cónicas la elipse, la parábola y la hipérbola.

Si el plano sección es oblicuo y corta todas las generatrices del cono, la sección es una **elipse.** Es decir, $\alpha < \beta$ (Fig. 6.20).

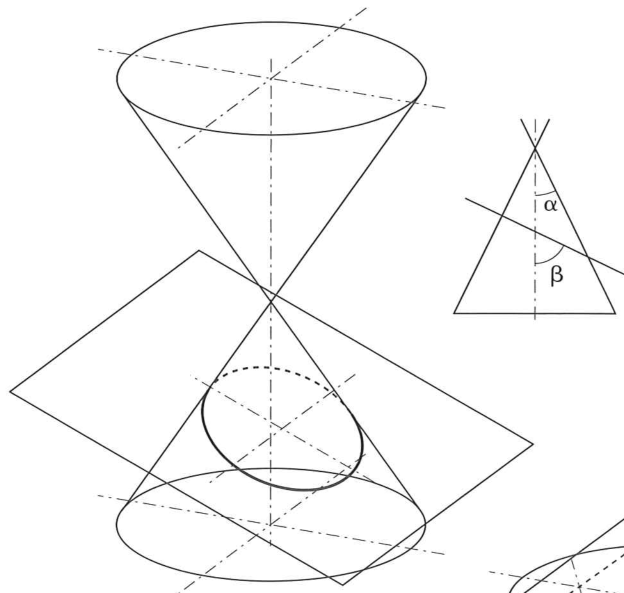


Fig. 6.20. *Elipse.*

Si el plano sección es paralelo u oblícuo al eje y corta al cono, la sección es una **hipérbola.** Es decir, $\alpha > \beta$ (Fig. 6.21).

Si el plano sección es oblicuo al eje y paralelo a una de las generatrices del cono, la sección es una **parábola.** Es decir, $\alpha = \beta$ (Fig. 6.22).

Es conveniente apuntar que las curvas cónicas, exceptuando la circunferencia, ya estudiada, se construyen por medio de la obtención de puntos que configuran la curva, y que posteriormente hay que unirlos, bien a mano alzada o mediante la utilización de plantillas de curvas.

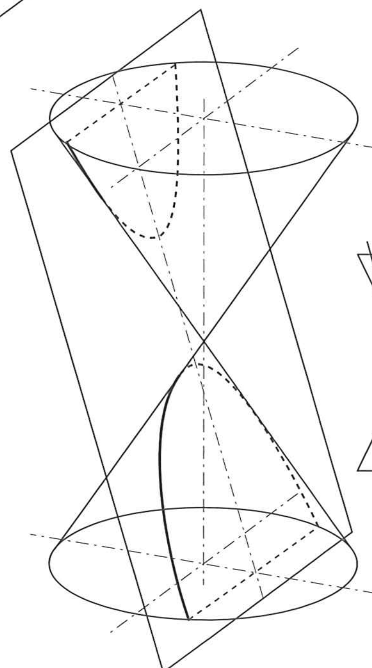


Fig. 6.21. *Hipérbola.*

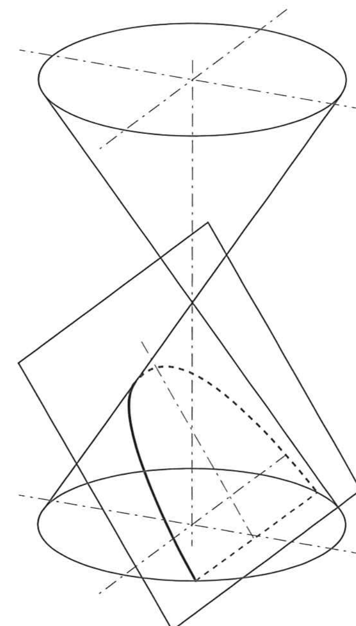


Fig. 6.22. *Parábola.*

B. Elementos de las curvas cónicas

Veamos los elementos más importantes que componen las curvas cónicas y que son necesarios para su construcción:

- **Focos:** son los puntos F y F′ de contacto de las esferas inscritas en el cono con el plano secante que genera las secciones cónicas, y están situados en el eje de simetría. La elipse y la hipérbola tienen dos focos, y la parábola tiene sólo uno.
- **Vértices:** son los puntos extremos de los ejes de la curva.
- **Ejes:** con este término se denomina a los **ejes de simetría** de la curva. Tanto la elipse como la hipérbola tienen dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí. La parábola tiene solamente uno.
- **Centro:** es el punto donde se cortan los ejes de simetría, y por tanto el centro de la curva.
- **Directrices:** son las rectas de intersección que realiza el plano secante (que genera la curva cónica) con los planos que contienen a las circunferencias tangentes de las esferas con el cono.
- **Circunferencia principal:** es el lugar geométrico de las proyecciones de los focos sobre las rectas tangentes a la cónica. El centro de esta circunferencia es el centro de la elipse o de la hipérbola, y el radio es igual a la mitad de su eje mayor. En el caso de la parábola, el radio es infinito.
- **Circunferencia focal:** es el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco respecto de las rectas tangentes a la cónica. El centro de estas circunferencias son los focos, y los radios son la longitud del eje mayor, en el caso de la elipse y la hipérbola; en la parábola, el radio es infinito.

C. Elipse

Es una curva plana y cerrada, lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos F y F', es constante e igual al eje mayor AB.

$$PF + PF' = AB$$

Elementos de la elipse

Los elementos más significativos que configuran la elipse son los siguientes (Fig. 6.23):

- **Ejes:** tiene dos ejes AB y CD perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto O, centro de la elipse. El eje mayor se denomina eje real o principal, y el eje menor, secundario o virtual. Esta curva es simétrica con respecto a dichos ejes.
- **Focos:** denominados como F y F', están situados en el eje real, y se hallan haciendo centro en uno de los extremos del eje virtual C o D, y radio igual al semieje real.
- **Distancia focal:** es la distancia que existe entre los dos focos.
- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto cualquiera de la elipse con los focos.
- **Circunferencia principal:** es la que se determina haciendo centro en O, centro de la elipse, y radio igual al semieje mayor.
- **Circunferencia focal:** la elipse tiene dos circunferencias focales. Para dibujarlas, se toma como radio el eje real y centro F y F', respectivamente.

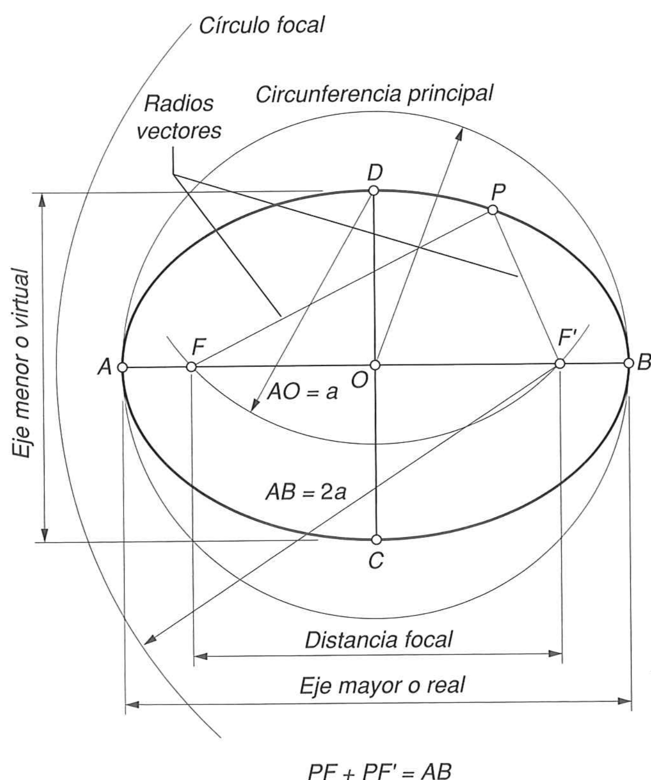
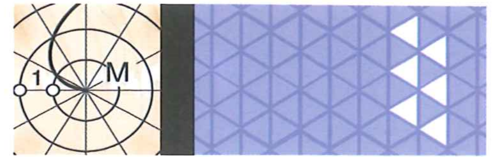


Fig. 6.23. *Elementos de la elipse.*



La nomenclatura más utilizada en geometría para denominar a los ejes y la distancia focal, es la siguiente:

- **Eje mayor o real** = $AB = 2a$; semieje mayor o real a.
- **Eje menor o virtual** = $CD = 2b$; semieje menor o virtual = b.
- **Distancia focal** = $FF' = 2c$.

▶▶▶ Construcción de la elipse

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de la elipse más utilizados en dibujo técnico.

Elipse conociendo sus dos ejes. Por puntos

1. Se trazan dos rectas perpendiculares obteniendo en su corte el punto *O*. Sobre ellas se sitúan los ejes de la elipse $A = 2a$ y $CD = 2b$. Con centro en *C* o *D* y radio *OA*, se traza un arco que corta al eje real en los puntos *F* y *F'*, focos de la curva.
2. Se divide en un número de partes la distancia focal 1, 2, 3, etc. Con centro en *F* y radio 1*A*, se trazan dos arcos; con radio 1*B* y centro en *F'*, se trazan otros dos arcos que cortan a los dos anteriores en *E* y *F*, puntos de la elipse.
3. Con centro en *F* y radio 2*A*, se vuelven a trazar dos arcos; con radio 2*B* y centro en *F'*, se trazan otros dos arcos que cortan a los anteriores en los puntos *G* y *H*, otros dos puntos de la curva. Repetimos esta operación tomando otros puntos 3, 4, etc., del eje real para seguir hallando puntos de la elipse y, finalmente, se unen los puntos determinados manualmente o con plantillas, con lo que se obtiene la elipse pedida (Fig. 6.24).

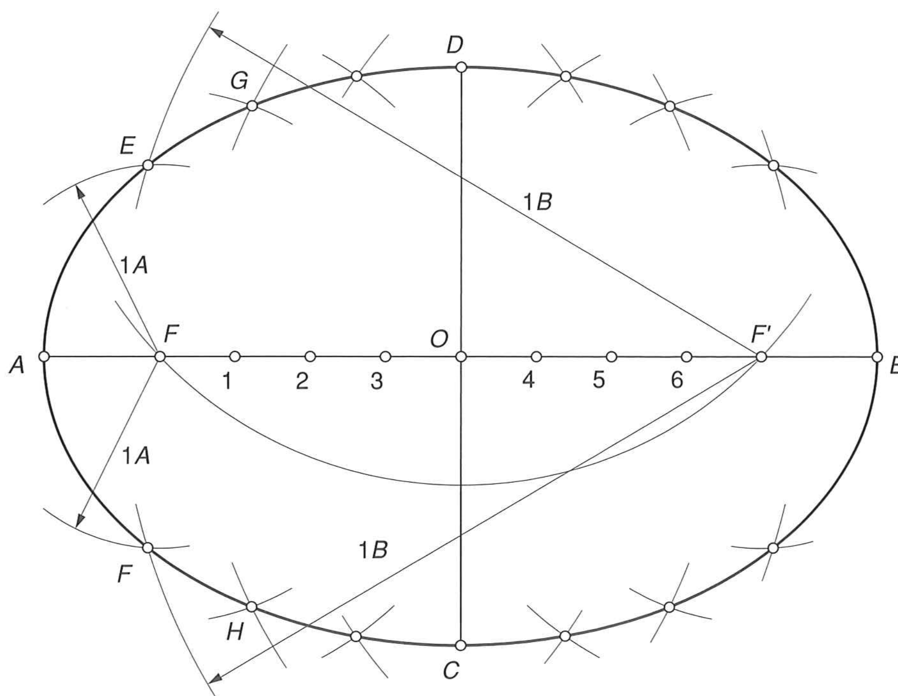


Fig. 6.24. *Construcción de la elipse por puntos.*

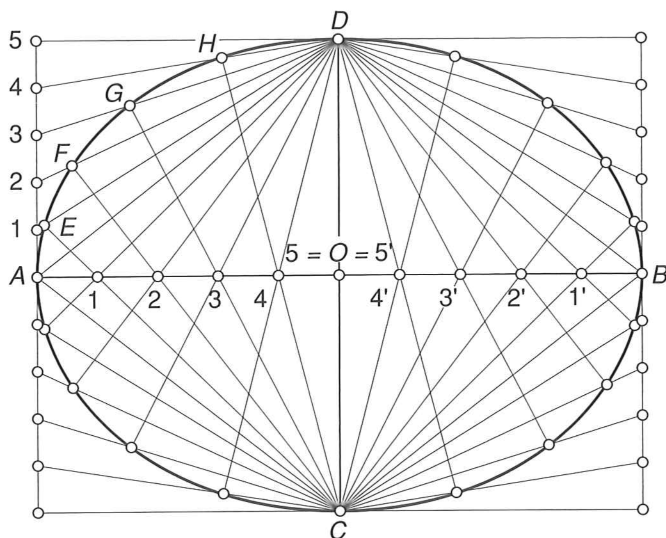


Fig. 6.25. *Construcción de la elipse por haces proyectivos.*

Elipse conociendo los dos ejes. Por haces proyectivos

1. Se dibuja un rectángulo de lados igual al valor de los ejes de la elipse. Se trazan los ejes dentro de dicho rectángulo. Se dividen los segmentos *OA* y *AE* en el mismo número de partes, e iguales en cada segmento. En este caso cinco.

2. Las intersecciones de los rayos *C*1, *C*2, *C*3 y *C*4 con los rayos *D*1, *D*2, *D*3 y *D*4 respectivamente, determinan distintos puntos de la elipse *E*, *F*, *G* y *H*.

3. Observa que los puntos de la curva en los otros tres cuadrantes de la elipse se han obtenido aplicando el mismo método. Por último, sólo queda unir esos puntos para completar la elipse (Fig. 6.25).

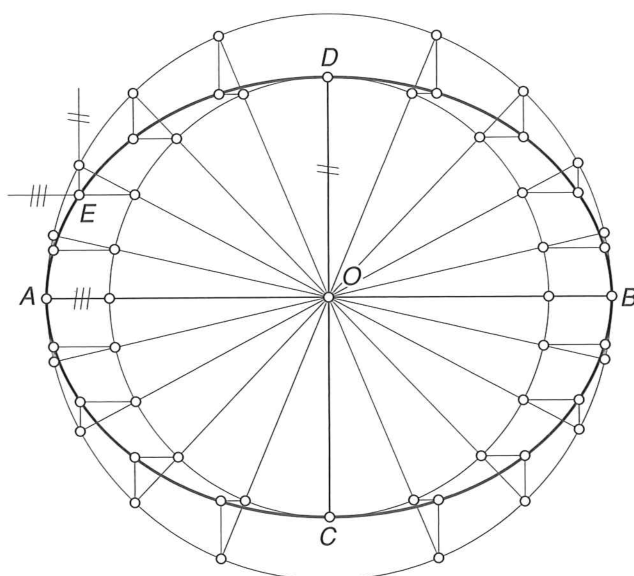


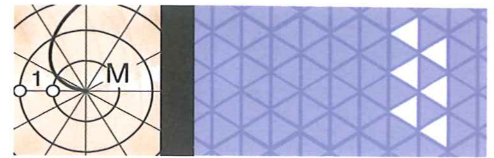
Fig. 6.26. *Construcción de la elipse por afinidad.*

Elipse conociendo sus dos ejes. Por circunferencias concéntricas o afinidad

1. Se dibujan dos circunferencias concéntricas de radios iguales a los valores de los semiejes mayor y menor. Se trazan distintos radios de las dos circunferencias.

2. Por los extremos de los radios de la circunferencia mayor, se trazan rectas paralelas al eje menor. Por los extremos de los radios de la circunferencia menor, se trazan paralelas al eje mayor.

3. Los puntos de intersección de las respectivas paralelas determinan puntos de la elipse buscada (Fig. 6.26).



Elipse conociendo sus dos ejes. Método de la tira de papel

1. Éste es un método sencillo y rápido para trazar elipses. El procedimiento está basado en la definición de elipse. Consiste, por tanto, en marcar sobre una tira de papel, con trazos pequeños, la longitud del semieje mayor *AO* y la del semieje menor *CO*.

2. Se hace coincidir el punto N sobre el semieje mayor *AO* de la elipse que se va a dibujar, y el punto F sobre el semieje menor *CO*, siendo *M* un punto de la elipse. Repitiendo este procedimiento se consiguen nuevos puntos, tantos como se deseen.

3. No hay que olvidar que los puntos *N* y *F* de la tira de papel han de coincidir siempre sobre los ejes de la elipse que se quiere dibujar. Por último, sólo resta unir los puntos hallados de forma manual o con plantillas para determinar la curva (Fig. 6.27).

Fig. 6.27. *Construcción de la elipse por el método de la tira de papel.*

Elipse conociendo dos diámetros conjugados

Dado un diámetro cualquiera *JK* de una elipse, su conjugado *MN* es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas a *JK*. Se puede observar en la Figura 6.28 que la cuerda *EF*, paralela al diámetro *JK*, es cortada en *P*, que es su punto medio, por el diámetro *MN*.

1. Se parte de los diámetros conjugados *AB* y *CD*. Se dibuja una circunferencia de diámetro igual al mayor de los diámetros conjugados *AB*. Sobre ella se traza otro diámetro *C′D′* perpendicular a *AB*.

2. Se divide *AB* en *n* partes, por ejemplo seis, y se trazan por ellas paralelas a *CD* y *C′D′*. Se trazan los segmentos que unen los puntos *C′* con *C*, y *D′* con *D*.

3. Donde las cuerdas cortan a la circunferencia, se trazan paralelas a *D′D* y *C′C* que cortan a las paralelas al diámetro conjugado *CD* en los puntos *E* y *E′*, *F* y *F′*, etc., y así sucesivamente; así se determinan los puntos de la elipse buscada (Fig. 6.29).

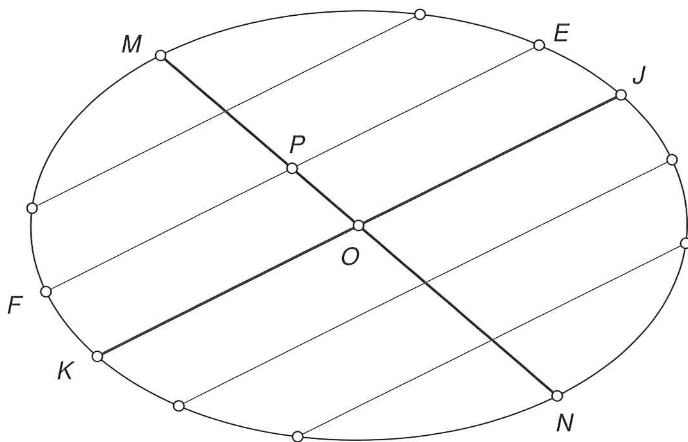


Fig. 6.28. *Diámetros conjugados de una elipse.*

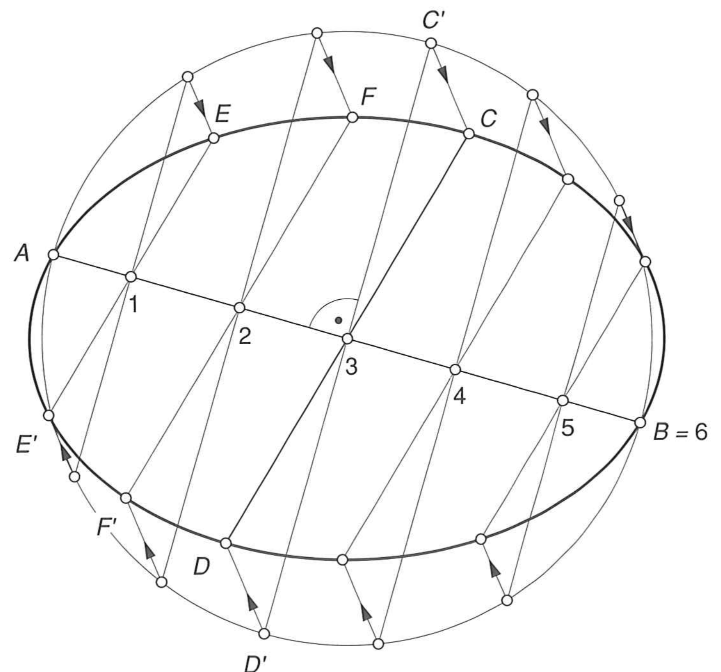


Fig. 6.29. *Elipse conociendo dos diámetros conjugados.*

Determinación de los ejes de una elipse conociendo dos diámetros conjugados

1. Se parte de los diámetros conjugados *AB* y *CD*. Por *D* se traza una perpendicular al diámetro *AB*, llevando a partir de *D* el semidiámetro a cada lado, es decir, *OA* = *DP* = *DQ*.

2. Se une el punto *O* con *P* y *Q*, y se halla la bisectriz del ángulo *POQ*; esta recta contiene al eje mayor de la elipse. Por *O* se traza una perpendicular al eje mayor; esta recta contiene al eje menor. Y por *D* se traza una paralela; donde ésta corte al segmento *OP* se obtindrá el punto *J*.

3. *OJ* es el valor del semieje menor y *JP* el del semieje mayor. Se traslada estas magnitudes a partir de *O* a ambos lados de los ejes, y quedan determinados *MN* y *EF*, ejes de la elipse buscada. (Fig. 6.30)

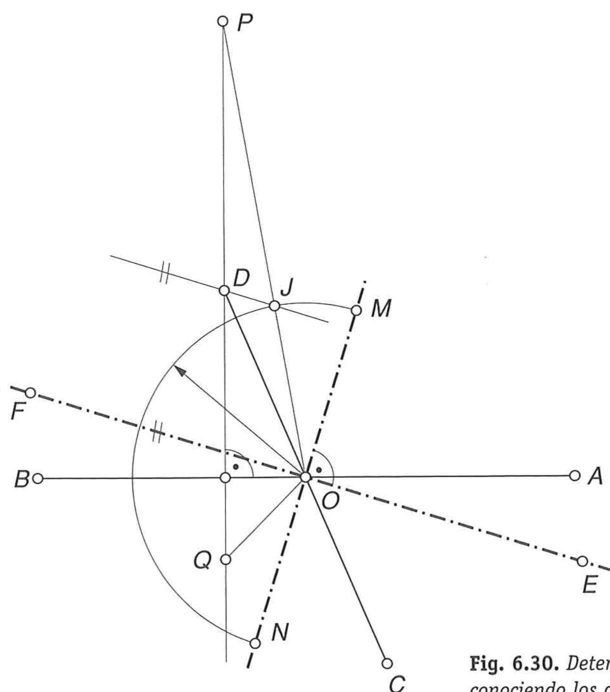
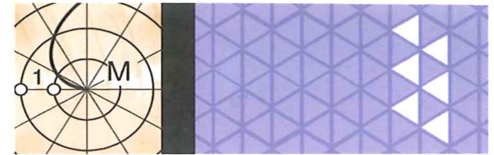


Fig. 6.30. *Determinación de los ejes de una elipse conociendo los diámetro s conjugados.*



D. Hipérbola

La hipérbola es una curva plana y abierta, lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos *F* y *F'*, es constante e igual al eje real *AB*, es decir, a la distancia entre los vértices *V* y *V'*.

$$PF - PF' = AB$$

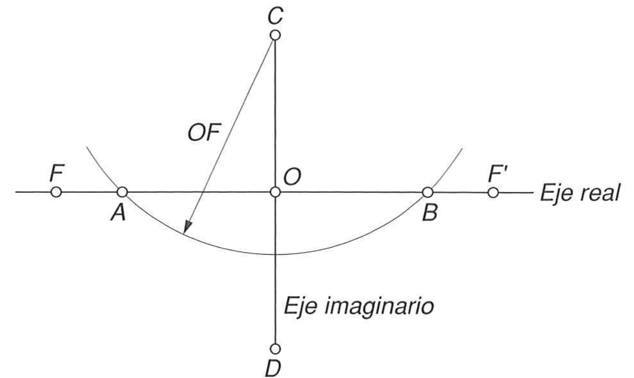


Fig. 6.31. *Determinación del eje real de la hipérbola.*

Elementos de la hipérbola

Los elementos más significativos que configuran la hipérbola son los siguientes (Fig. 6.33):

- **Ejes:** tiene dos ejes: *AB*, eje real, y *CD*, eje imaginario; son perpendiculares entre sí y se cortan en el punto *O*. El eje real contiene a los vértices *A* y *B* de cada rama de la curva. La hipérbola consta de dos ramas simétricas respecto de los dos ejes.

  En esta curva, la distancia desde el centro de simetría *O* a cada foco es igual a la distancia *AC*, siendo *A* un extremo del eje real y *C* un extremo del eje imaginario. Esta propiedad permite, si se conoce uno de los ejes y los focos, determinar el otro eje (Fig. 6.31); y, lógicamente, si se conocen los dos ejes, se pueden obtener los focos (Fig. 6.32).

- **Focos:** denominados como *F* y *F'*, están situados en el eje real, y se hallan haciendo centro en *O* y radio igual a la distancia *AC*.

- **Distancia focal:** es la distancia que existe entre los dos focos.

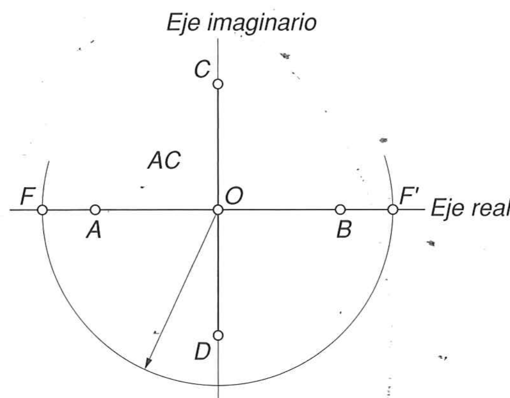


Fig. 6.32. *Determinación de los focos de la hipérbola.*

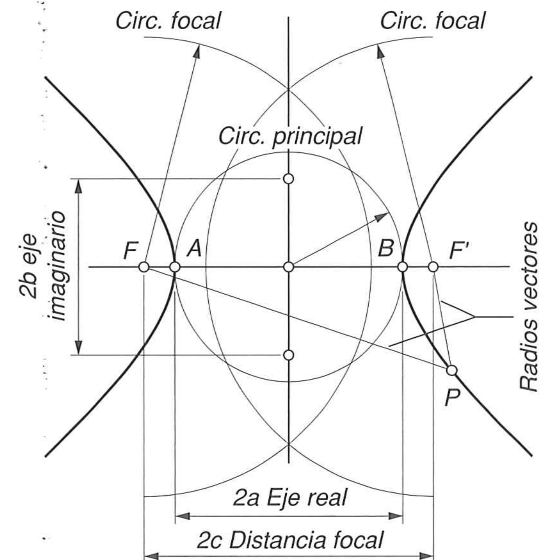


Fig. 6.33. *Elementos de la hipérbola.*

- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto cualquiera de la hipérbola con los focos.

- **Circunferencia principal:** es la que se determina haciendo centro en *O*, centro de la hipérbola, y radio igual a la distancia *AO* del semieje real.

- **Circunferencia focal:** la hipérbola tiene dos circunferencias focales. Para dibujarlas se toma como radio el eje real *AB*, y centro *F* y *F'*, respectivamente.

- **Asíntotas:** son rectas que pasan por el centro de la hipérbola, y son tangentes a ella en el infinito; además, son simétricas respecto de los ejes *AB* y *CD*. Se determinan trazando la circunferencia principal con centro en *O*. Se dibujan rectas tangentes desde el foco *F* a la circunferencia, determinando así los puntos de tangencia *M* y *N*. Se une estos puntos con *O* y se obtienen las dos asíntotas (Fig. 6.34).

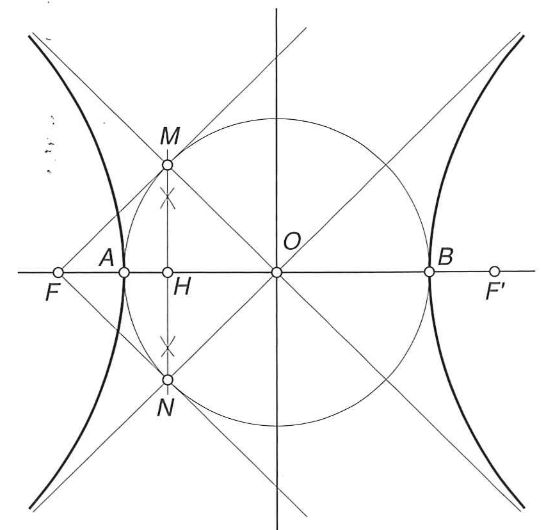


Fig. 6.34. *Determinación de las asíntotas de una hipérbola.*

La nomenclatura más utilizada en geometría para denominar a los ejes y la distancia focal es la siguiente:

- **Eje real** = *AB* = 2*a*; semieje mayor o real *a*.
- **Eje imaginario** = *CD* = 2*b*; semieje menor o virtual = *b*.
- **Distancia focal** = *FF'* = 2*c*.

Construcción de la hipérbola

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de la hipérbola más utilizados en dibujo técnico.

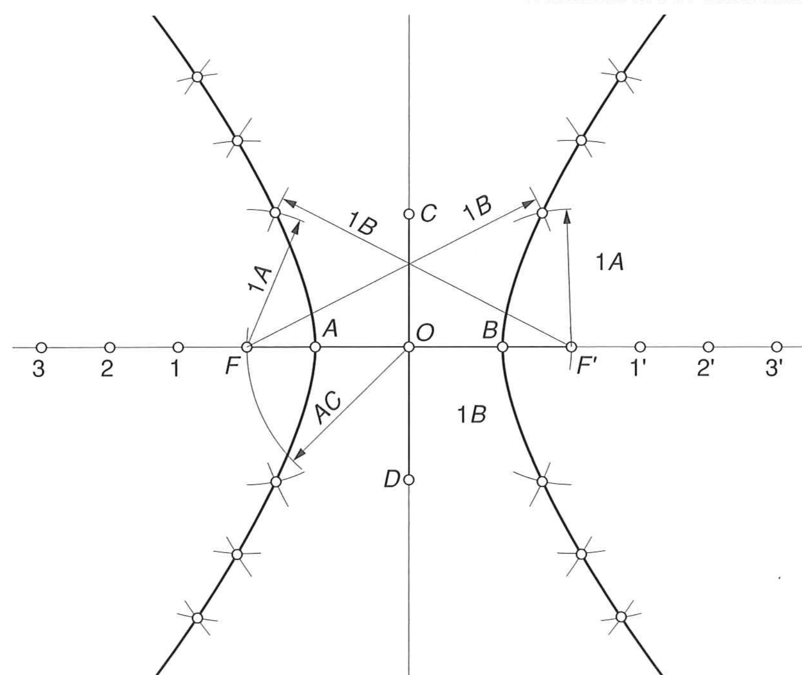


Fig. 6.35. *Construcción de la hipérbola conociendo los dos ejes.*

Hipérbola conociendo los dos ejes. Por puntos

1. Una vez situados los ejes *AB* y *CD*, se procede a determinar los focos; con centro en *O*, y radio *AC* se traza un arco, y allí donde éste corta al eje real están los focos *F* y *F'*.
2. Se sitúan puntos arbitrarios: 1 y 1', 2 y 2', etc., sobre el eje real a uno y otro lado de los focos, *F* y *F'*, respectivamente. Con radio 1*A*, y centro en *F* y *F'* se realizan dos arcos; con radio 1*B*, y centro en *F* y *F'* se describen otros dos arcos, que cortan a los anteriores determinando los puntos *M* y *M'*, y *N* y *N'*, de la curva de ambas ramas.
3. Repitiendo esta operación tantas veces como puntos se hayan marcado sobre el eje, se obtiene el resto de los puntos de la hipérbola. Por último, se unen con plantillas de curvas o a mano alzada hasta terminar las dos ramas de la curva (Fig. 6.35).

Hipérbola conociendo las asíntotas y los vértices

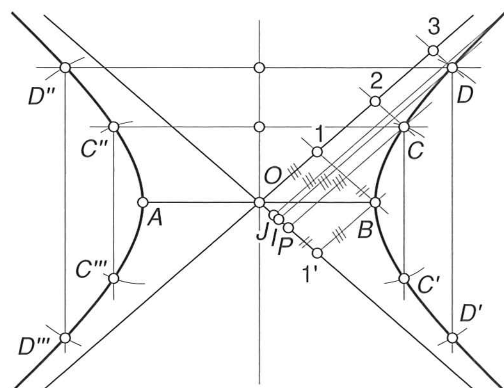


Fig. 6.36. *Hipérbola conociendo las asíntotas y los vértices.*

1. Se trazan rectas paralelas a las asíntotas por los vértices *A* y *B*, obteniendo sobre éstas los puntos 1 y 1'. Se lleva sobre las asíntotas la distancia *O*1 = *O*1', determinando los puntos 2, 3, etc., por los que se trazan paralelas a la asíntota.
2. Se divide el segmento *O*1' en partes, que están a 1/2 de la distancia *O*1' (punto P), a 1/3 (punto I), a 1/4 (punto J), etc., de forma que las paralelas trazadas por los puntos *P*, *I*, *J*, etc., cortan a las trazadas por 2 en *C*, por 3 en *D*, y así sucesivamente.
3. Los puntos de la otra mitad de la rama en la que se ha trabajado pueden obtenerse hallando los simétricos, respecto a los ejes de la curva, de los ya determinados, al igual que los puntos de la otra rama (Fig. 6.36).



E. Parábola

La parábola es una curva plana y abierta, lugar geométrico de todos los puntos del plano equidistantes de uno fijo llamado foco *F* y de una recta *d* denominada directriz.

$$PF = FD$$

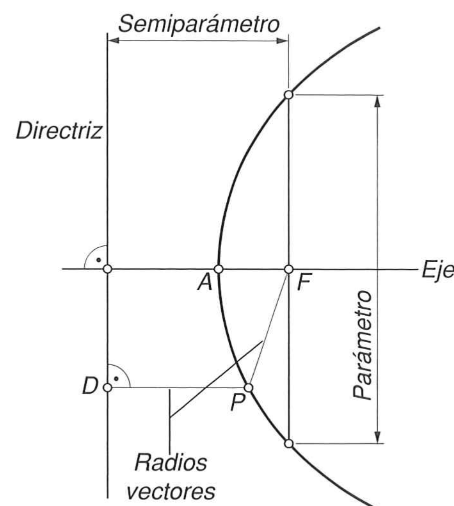


Fig. 6.37. *Elementos de la parábola.*

Elementos de la parábola

Los elementos más significativos que configuran la parábola son los siguientes (Fig. 6.37):

- **Eje:** tiene sólo un eje de simetría, perpendicular a la directriz, y que contiene al **vértice** y al **foco.**
- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto cualquiera de la parábola con el foco.
- **Circunferencia principal:** tiene un radio infinito y es tangente a la parábola en su vértice.
- **Circunferencia focal:** también tiene un radio infinito y se convierte en una recta que coincide con la directriz.
- **Parámetro:** es la longitud de la cuerda de la parábola, perpendicular al eje, que pasa por el foco.
- **Semiparámetro:** es la distancia desde el foco hasta la directriz.

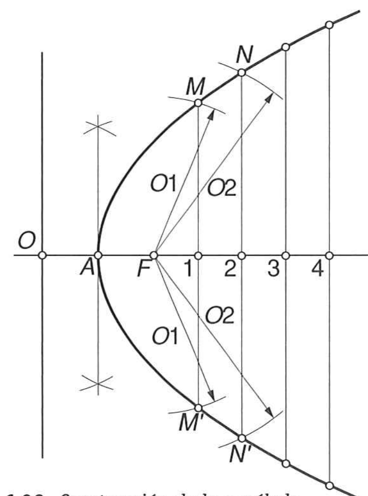


Fig. 6.38. *Construcción de la parábola conociendo la directriz y el foco.*

Construcción de la parábola

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de la parábola más utilizados en dibujo técnico.

Parábola conociendo la directriz y el foco. Por puntos

1. Se dibuja la directriz *d* y el foco *F*, y se halla el punto medio del segmento *OF*, siendo éste el vértice *A* de la curva. A partir del foco *F* se sitúan puntos arbitrarios: 1, 2, 3, etc., y por ellos se trazan paralelas a la directriz *d*.
2. Tomando como radios las distancias *O*1, *O*2, etc., y haciendo siempre centro en el punto *F*, se trazan arcos que cortan, respectivamente, a las rectas que pasan por 1, 2, 3, etc., obteniéndose los puntos *M* y *M'*, *N* y *N'*, y así sucesivamente.
3. Al unir estos puntos con trazo continuo resulta la parábola buscada (Fig. 6.38).

Parábola conociendo el vértice, el eje y un punto P de la curva

1. Se sitúan los datos con los que contamos, y se determina el punto *P'*, simétrico de *P* respecto del eje. Por el vértice *A* de la curva se traza una perpendicular al eje, y por *P* y *P'* se trazan las paralelas al eje; donde éstas cortan a la perpendicular se obtienen los puntos *M* y *N*.
2. Se dividen *MP* y *AM* en un número de partes iguales, por ejemplo seis. Por las divisiones obtenidas sobre *AM* se trazan paralelas al eje. Se unen con el vértice *A* los puntos de la división *MP*, y donde estas rectas cortan a las paralelas se obtienen los puntos 1, 2, 3, etc. Los puntos 1', 2', 3', etc., se hallan por simetría.
3. Uniendo los puntos así determinados con una línea continua, se obtiene la parábola pedida (Fig. 6.39).

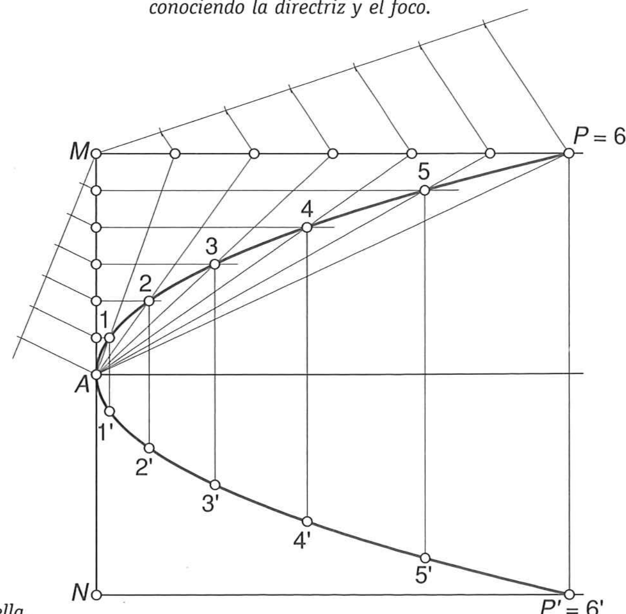


Fig. 6.39. *Parábola conociendo el vértice, el eje y un punto de ella.*



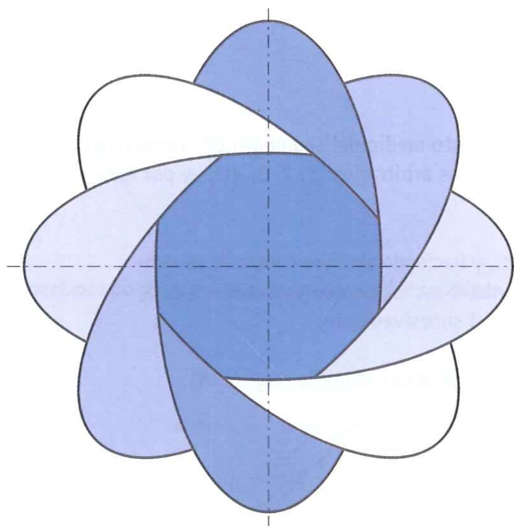
Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se obtienen las curvas cónicas? Clasifícalas.
2. Comenta los elementos más importantes que componen a las curvas cónicas.
3. ¿Qué es una elipse? ¿Qué nomenclatura se utiliza para denominar a los ejes y a la distancia focal?
4. Comenta los elementos que configuran la elipse.
5. Dibuja una elipse conociendo sus dos ejes, por puntos, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
6. ¿Qué es una hipérbola? ¿Qué nomenclatura se utiliza para denominar a los ejes y a la distancia focal?
7. Comenta los elementos que forman la hipérbola.
8. Dibuja una hipérbola conociendo las asíntotas, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
9. ¿Qué es una parábola?
10. Comenta los elementos que configuran la parábola.

Ejercicios

1. Dibuja una elipse por puntos, sabiendo que sus ejes tienen una longitud de 65 mm y 45 mm, respectivamente.
2. Dibuja una elipse por haces proyectivos, sabiendo que sus ejes tienen una longitud de 69 mm y 47 mm, respectivamente.
3. Dibuja una elipse, sabiendo que su eje mayor mide 68 mm y su distancia focal 56 mm.
4. Dibuja una elipse por circunferencias concéntricas o afinidad, sabiendo que sus ejes miden 73 mm y 57 mm, respectivamente.
5. Dibuja una elipse por el método de la tira de papel, sabiendo que dos de sus diámetros conjugados miden 78 mm y 56 mm, respectivamente, y el ángulo menor que forman entre sí es de 45°.
6. Dibuja una hipérbola por puntos, sabiendo que $AB = 65$ mm, y $CD = 47$ mm.
7. Dibuja una hipérbola sabiendo que $AB = 65$ mm, y $CD = 47$ mm, utilizando para su construcción las asíntotas de la curva.
8. Dibuja una parábola por puntos, sabiendo que la distancia entre el vértice *A* de la curva y su foco es de 33 mm.
9. Con ayuda de elipses, que puedes realizar mediante los trazados geométricos estudiados, diseña dos figuras ornamentales de manera similar a las que te proponemos en la Figura 6.40.



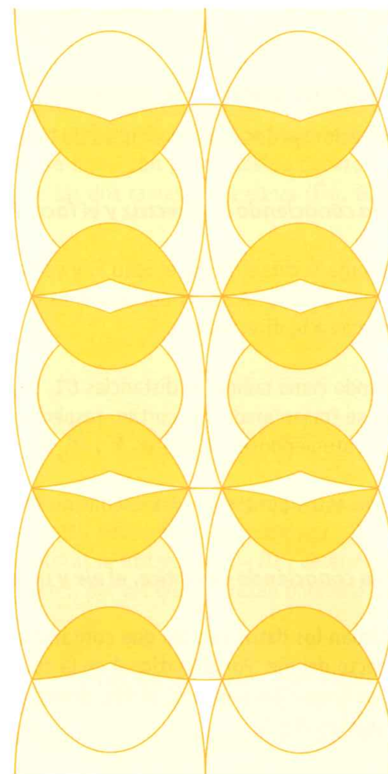
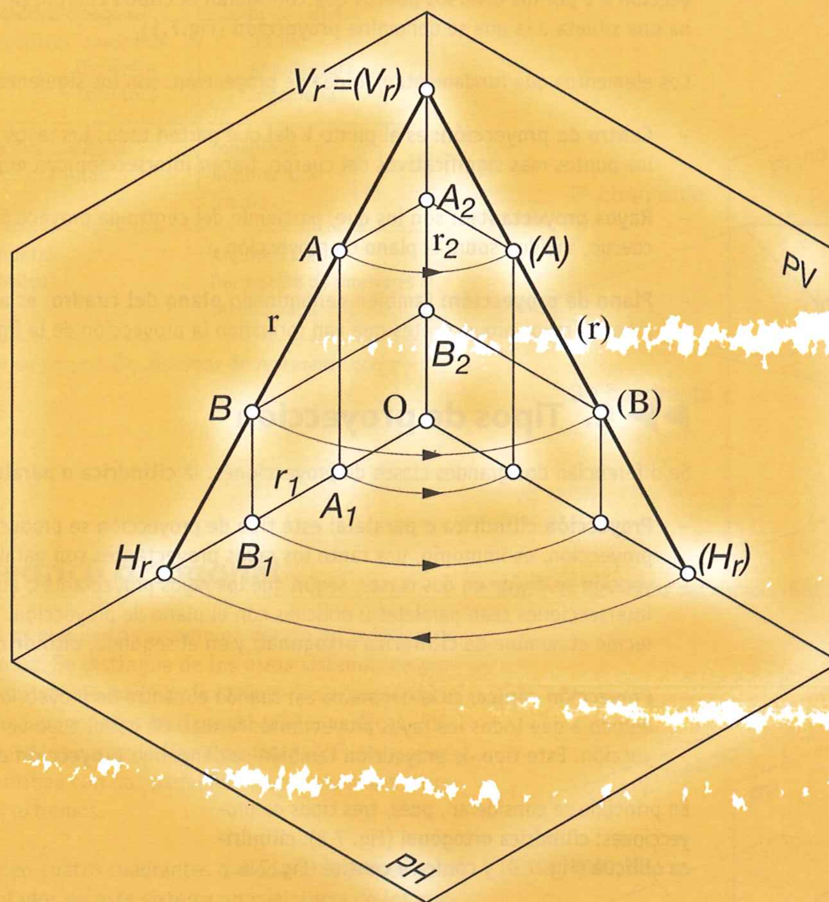


Fig. 6.40. *Ejercicio 9, figuras de ejemplo.*

07

Sistemas de representación. Sistema diédrico ortogonal



Fue el geómetra francés Gaspar Monge, a finales del siglo XVIII, quien recopiló y ordenó de manera sistematizada todos los métodos y leyes que hasta entonces existían sobre los sistemas fundamentados en proyecciones cilíndricas ortogonales, dándoles un cuerpo disciplinar. De este modo, desarrolló lo que se conoce como sistema diédrico ortogonal, que es el más utilizado actualmente en la arquitectura, en el diseño y en la industria.

Este sistema, como sin duda sabes, se singulariza por el uso de dos planos de proyección, denominados horizontal y vertical, que son perp0endiculatres entre sí, sobre los que se proyectan, ortogonalmente, las figuras o cuerpos que se van a representar.



7.1. Sistemas de representación

A. Geometría descriptiva

La geometría descriptiva tienen como objetivo fundamental posibilitar la representación y manipulación, sobre un soporte plano, de formas y cuerpos volumétricos situados en el espacio, estableciendo las relaciones correspondientes entre las formas del espacio o de tres dimensiones, es decir, de **tercera categoría,** y las de dos dimensiones o formas planas, denominadas de **segunda categoría.** Para ello, es preciso proyectar el cuerpo en el espacio sobre un plano obteniendo así su dibujo. Esta operación se llama **proyección.**

B. Concepto de proyección

Un punto o un cuerpo en el espacio es proyectado desde un punto *V* sobre un plano α, que no le corta, cuando se obtienen sobre α las intersecciones de los rayos proyectantes, definidos por el centro de proyección *V* y por los diversos puntos que configuran el citado cuerpo. Uniendo estos puntos se determina una silueta a la que se denomina **proyección** (Fig.7.1).

Los elementos que fundamentan la idea de proyección, son los siguientes:

- **Centro de proyección:** es el punto *V* del que parten todos los rayos proyectantes que, pasando por los puntos más significativos del cuerpo, hacen intersección con el plano α.
- **Rayos proyectantes:** son los que, partiendo del centro de proyección y pasando por los puntos del cuerpo, inciden sobre el plano de proyección α.
- **Plano de proyección:** también denominado **plano del cuadro,** es aquel en el que hacen intersección los rayos proyectantes que van formando la proyección de la figura o cuerpo.

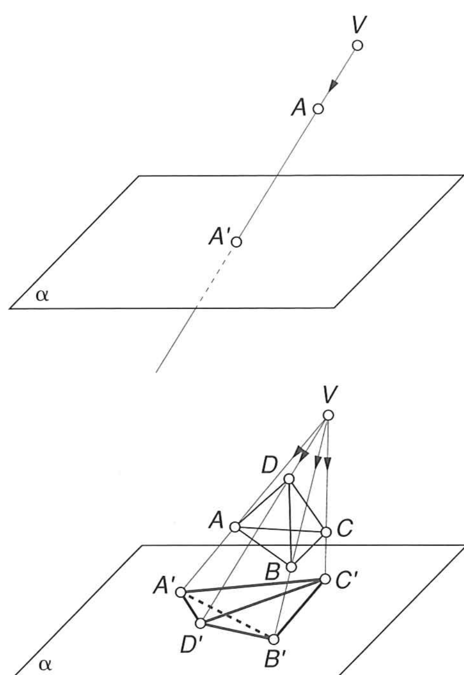


Fig. 7.1. *Concepto de proyección.*

C. Tipos de proyección

Se diferencian dos grandes clases de proyecciones: la **cilíndrica o paralela,** y la **cónica.**

- **Proyección cilíndrica o paralela:** este tipo de proyección se produce cuando el punto *V*, centro de proyección, es impropio, por tanto los rayos proyectantes son paralelos entre sí. Este tipo de proyección se divide en dos clases, según que los rayos proyectantes, aún siendo paralelos entre sí, sus intersecciones sean paralelas u oblicuas con el plano de proyección. En el primer caso la proyección recibe el nombre de **cilíndrica ortogonal;** y en el segundo, **cilíndrica oblicua.**
- **Proyección cónica:** se la denomina así cuando el centro de proyección *V* es un punto propio. Esto es debido a que todos los rayos proyectantes forman un cono, cuyo vértice es el citado centro de proyección. Este tipo de proyección también se denomina **proyección central.**

En principio se consideran, pues, tres tipos de proyecciones: **cilíndrica ortogonal** (Fig. 7.2), **cilíndrica oblicua** (Fig. 7.3) y **cónica o central** (Fig. 7.4.)

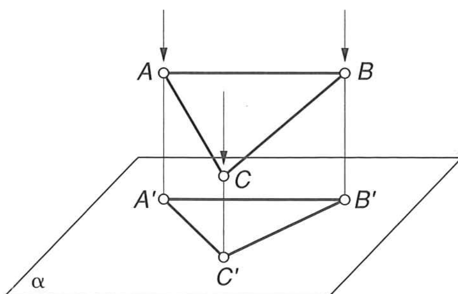


Fig. 7.2. *Proyección cilíndrica ortogonal.*

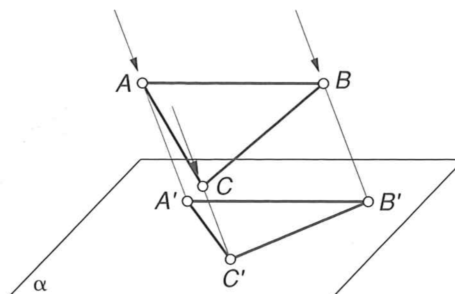


Fig. 7.3. *Proyección cilíndrica oblicua.*

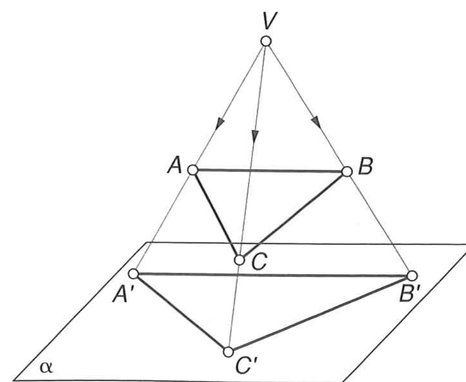


Fig. 7.4. *Proyección cónica.*



D. Principales sistemas de representación

Los sistemas de representación se fundamentan en la idea de proyección expuesta anteriormente. Por tanto, se denomina sistema de representación al conjunto de elementos y bases geométricas que permiten dibujar proyecciones de una figura o cuerpo sobre un plano y, al revés, restituirlo otra vez al espacio.

Partiendo de estos tipos de proyección, la geometría descriptiva ofrece diferentes sistemas de representación que permiten obtener imágenes de un objeto sobre un plano de modos diversos, cada uno de ellos con unas características específicas que los hacen más o menos apropiados al fin que se quiera dar a la representación del objeto (ver Tabla 7.1).

Sistema de proyección		Sistema de representación	Aplicaciones
Cilíndrica	Ortogonal	Sist. de Planos acotados Sist. Diédrico ortogonal Axonométrico: Isométrica Dimétrica Trimétrica	Topografía Planos de taller: Diseño Arquitectura Ingeniería
	Oblicua	Perspectiva caballera Perspectiva Militar	Ingeniería Arquitectura Diseño
Cónica	Perspectiva cónica frontal Perspectiva cónica oblicua		Arquitectura Decoración de interiores Escenografía

Tabla 7.1. *Relación entre sistemas de proyección, sistemas de representación y aplicaciones de los mismos.*

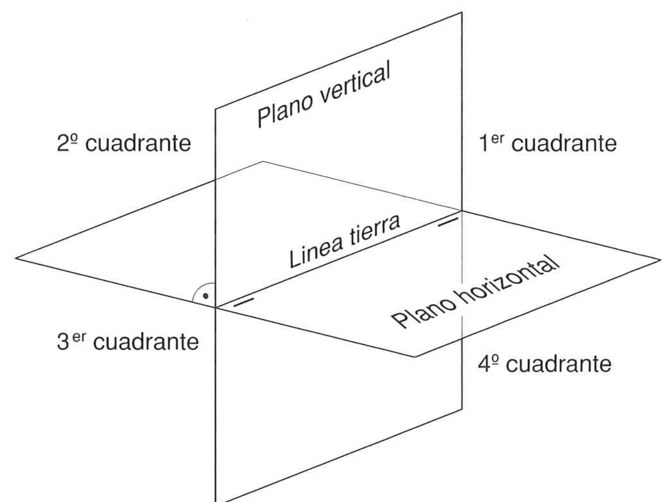


Fig. 7.5. *Elementos del sistema diédrico ortogonal.*

E. Sistema diédrico ortogonal

Este sistema de representación es el que más se emplea dentro de la industria y del diseño para describir objetos. Se distingue de los otros sistemas de proyección ortogonal en que se muestran de manera simultánea los objetos sobre planos perpendiculares entre sí, denominados **horizontal** (*PH*) y **vertical** (*PV*). La intersección de estos planos es una recta: la **línea de tierra** (*LT*), que se representa mediante una línea continua con dos pequeños trazos paralelos situados en la parte inferior y en los extremos.

Estos planos dividen el espacio en cuatro cuadrantes o diedros, de manera que los objetos pueden ser representados en este sistema en cualquiera de los cuadrantes. Como norma, el espectador siempre estará situado en el primer cuadrante; por eso, se consideran opacos los dos planos de proyección, y sólo son perceptibles los objetos situados en él (Fig. 7.5).

Se denominan planos bisectores los que dividen a los cuadrantes en dos diedros iguales. Existen **dos bisectores,** dado que los cuadrantes son opuestos por la línea de tierra. El primero pasa por el primer y tercer cuadrantes, mientras que el segundo bisector lo hace por el segundo y cuarto cuadrantes. A modo de resumen, podemos decir que los bisectores dividen el espacio en 8 octantes (Fig 7.6).

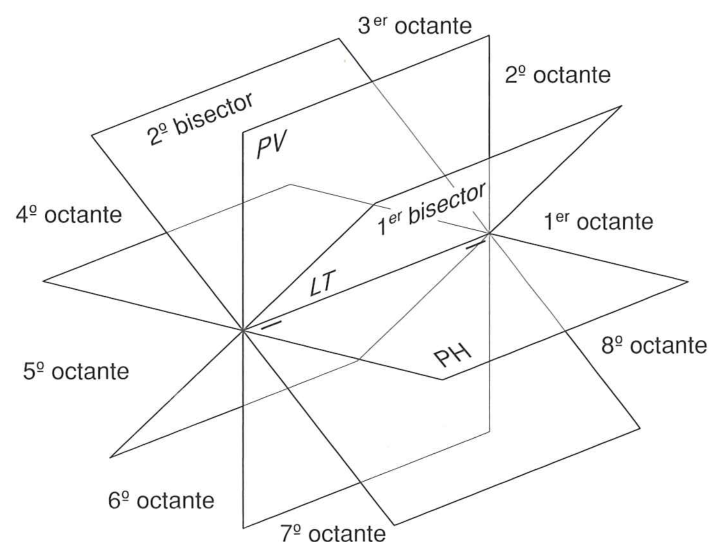


Fig. 7.6. *Octantes en el sistema diédrico ortogonal.*



Para obtener las proyecciones horizontal y vertical de un objeto en un único plano, uno de los planos de proyección se abate sobre el otro, de forma que ambos se superpongan. Esta operación se hace girando el plano horizontal alrededor de la línea de tierra, hasta confundirlo con el vertical (Fig. 7.7). Esto permite representar simultáneamente en el mismo papel de dibujo las dos proyecciones de cualquier figura plana u objeto volumétrico.

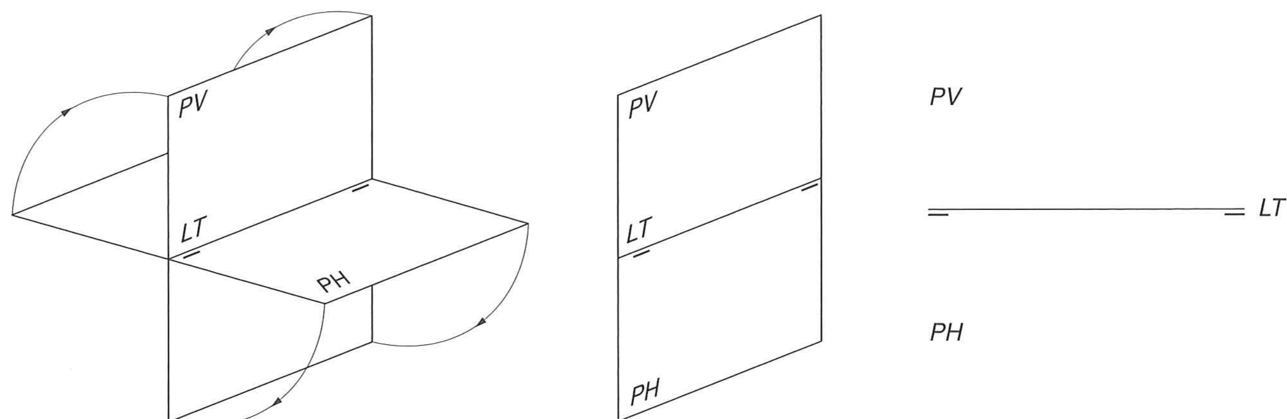


Fig. 7.7. *Abatimiento de planos.*

Puesto que los planos de proyección carecen de límites, no se representan, ya que quedan definidos por la representación de la línea de tierra.

La proyección de objetos sobre el plano horizontal recibe el nombre de **proyección horizontal** o **representación en planta.** La proyección sobre el plano vertical se denomina **proyección vertical** o **representación en alzado.** Las proyecciones sobre un plano de perfil se conocen como **vistas laterales,** izquierda y derecha, respectivamente (Fig. 7.8).

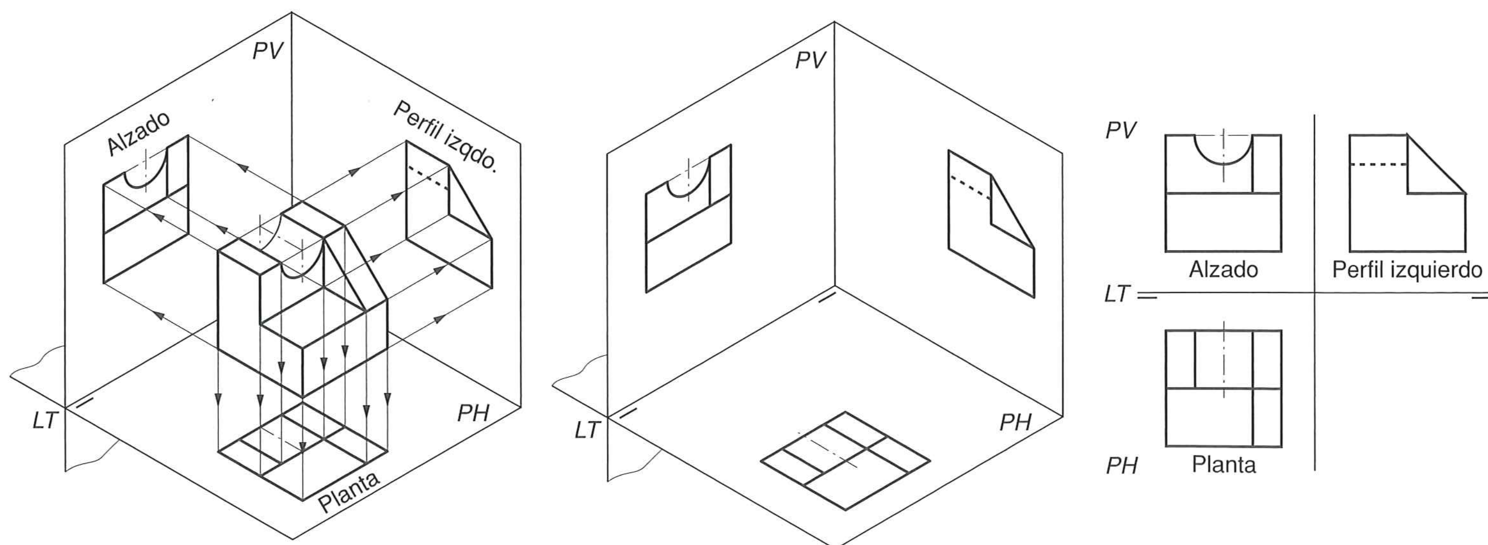
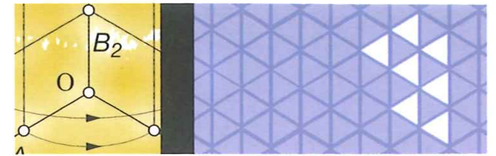


Fig. 7.8. *Construcción de la planta, el alzado y las vistas laterales.*



▶▶▶ Convencionalismos utilizados para el trazado del dibujo

En los dibujos de objetos y figuras es conveniente distinguir los diferentes aspectos que forman las representaciones:

- **Línea de tierra (*LT*):** se representa con trazo continuo fino. En los dibujos de objetos industriales se suprime.
- **Líneas de referencia:** se realizan con trazo fino.
- **Partes ocultas:** se dibujan con líneas de trazos discontinuos.
- **Resultados:** se dibujan en línea gruesa.
- **Puntos:** se designan con letras mayúsculas, *A*, *B*, *C* ... En sus proyecciones mantienen el mismo tipo de letra, distinguiendo la vertical con subíndice A_2 y la horizontal con el A_1.
- **Rectas:** se actúa de manera similar, es decir, con las mismas letras pero en minúsculas. Por ejemplo *r* para denominar en el espacio, r_2 y r_1 proyección vertical y horizontal respectivamente.
- **Planos:** se representan por medio de sus trazas y éstas se denominan con letras griegas: α, β, Ω, etc. La representación de la traza con el vertical se designa v_α, la traza horizontal h_α (Fig. 7.9)

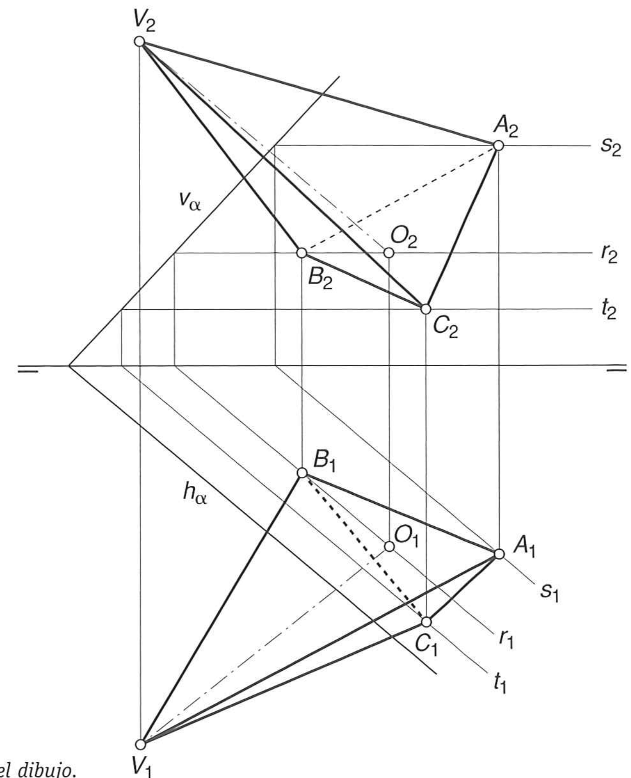


Fig. 7.9. *Convencionalismos utilizados para el trazado del dibujo.*

7.2. Representación del punto

Un punto del espacio se representa a través de sus proyecciones ortogonales sobre los planos de proyección. En la Figura 7.10, el punto *A* se define por las proyecciones A_1 y A_2, que se llaman horizontal y vertical; como se puede observar, se designan con los subíndices 1 y 2, respectivamente.

Al abatir el *PH* alrededor de la *LT* sobre el vertical, la proyección A_1 del citado punto se traslada con el plano, de tal modo que las dos proyecciones A_1 y A_2 quedan situadas de forma alineada. Por eso, estas proyecciones siempre se encuentran sobre una recta perpendicular a la línea de tierra llamada **línea de referencia.**

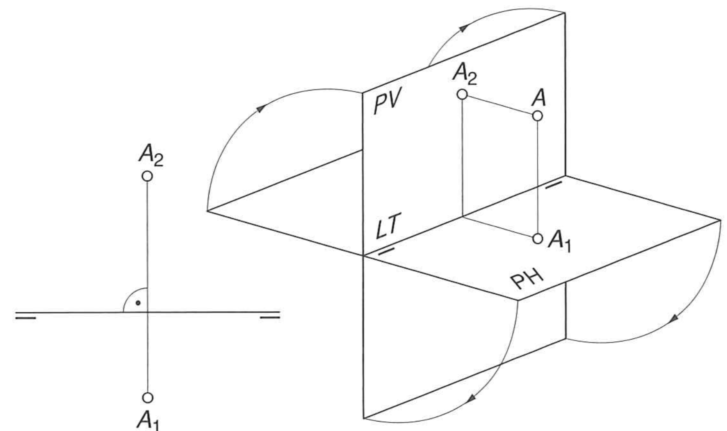


Fig. 7.10. *Representación de un punto.*

▶▶▶ Conceptos de cota y alejamiento

- **Cota** o **altura** de un punto es la distancia existente entre ese punto y el *PH* o, lo que es lo mismo, la distancia que hay entre la proyección vertical del punto y la *LT*.
- **Alejamiento** es la distancia que va desde el punto al *PV*, es decir, la distancia existente entre la proyección horizontal del punto y la *LT* (Fig. 7.11).

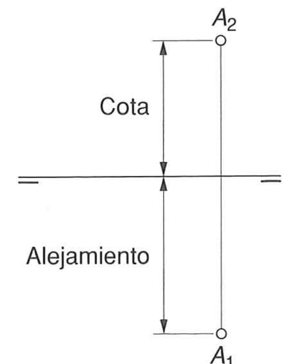


Fig. 7.11. *Cota y alejamiento.*



Representación del punto por coordenadas

Este método es muy útil para poder representar un punto, una recta o un plano. Para ello se actúa de la manera siguiente:

- El **origen** de este sistema es el punto *O*, intersección de los planos vertical, horizontal y otro de perfil *PP* tomado de apoyo.

- El **eje *X*** está determinado por la recta de intersección de los planos vertical y horizontal, es decir, coincide con la línea de tierra.

- El **eje *Y***, por la recta de intersección de los planos horizontal y de perfil.

- El **eje *Z***, por la de los planos vertical y de perfil.

El sentido positivo de los ejes está representado por las direcciones que marcan las flechas de la Figura 7.12.

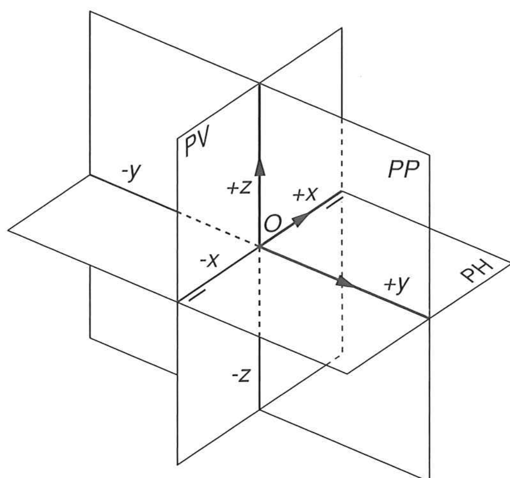


Fig. 7.12. *Representación de un punto por coordenadas.*

Al abatir el plano horizontal sobre el vertical de proyección se sitúan de manera coincidente la parte positiva del eje *Z* con la negativa del eje *Y*, y de la misma forma, la parte positiva del eje *Y* con la negativa del *Z* (Fig. 7.13). De ahí que los valores de las coordenadas de un punto en el espacio siempre se expresen del modo siguiente:

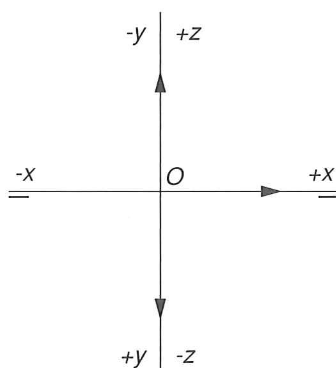


Fig. 7.13. *Resultado del abatimiento del plano horizontal sobre el vertical.*

$$A\ (\pm X, \pm Y, \pm Z)$$

Por tanto, para determinar un punto por coordenadas según la forma *A* (±*X*, ±*Y*, ±*Z*), como por ejemplo *A* (30, 20, 40), se entiende que las coordenadas que tiene son las siguientes: *X* = 30, *Y* = 20, *Z* = 40; de este modo, la representación del punto *A* será la que muestra la Figura 7.14. En este caso, se ha tomado como unidad de medida el milímetro.

El valor positivo o negativo de *X* significa que el punto está situado a la derecha o a la izquierda del origen *O* del sistema de coordenadas.

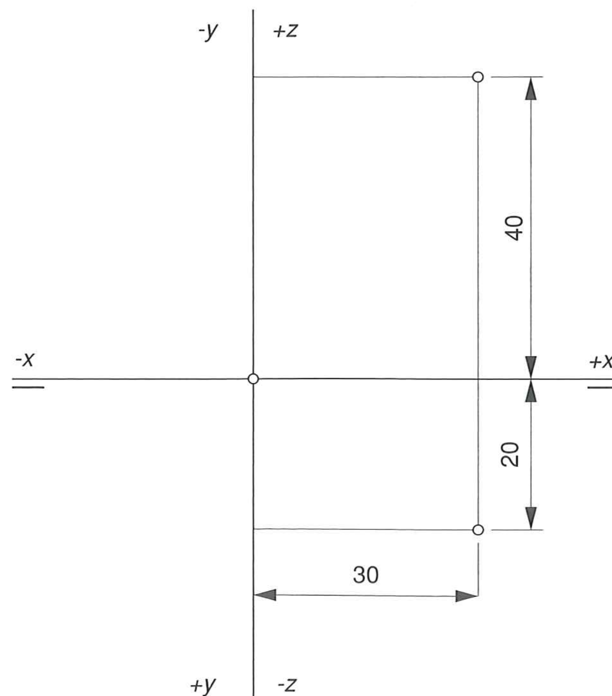


Fig. 7.14. *Representación del punto A (30, 20, 40).*



Posiciones generales (alfabeto del punto)

Las infinitas posiciones que un punto puede tener en el espacio respecto a los planos de proyección se pueden reducir a 17 posiciones generales. Véase la Figura 7.15 donde, para simplificar y mejorar su comprensión, se han dibujado los planos de proyección y los bisectores vistos de perfil.

Puntos del 1.er cuadrante

La característica común a todos los puntos situados en el primer cuadrante es que su proyección horizontal siempre se encuentra por debajo de la *LT*, mientras que la proyección vertical se sitúa por encima de ésta. Por tanto, todos los puntos tienen la cota (*Z*) y el alejamiento (*Y*) positivo: ***A* (±X, *Y*, *Z*).** Obsérvese en la Figura 7.15 los puntos *B*, *C* y *D*.

El punto *C* tiene igual cota que alejamiento; pertenece, por tanto, al 1.er bisector, 1.er cuadrante.

Puntos del 2.° cuadrante

La particularidad que ha de darse para que un punto esté situado en el segundo cuadrante es que sus dos proyecciones, la horizontal y la vertical, se hallen por encima de la *LT*, es decir, todos sus puntos tienen cota (*Z*) positiva y alejamiento (*Y*) negativo: ***A* (±*X*, –*Y*, *Z*).** Obsérvese en la Figura 7.15 los puntos *F*, *G* y *H*.

El punto *G* tiene igual cota que alejamiento; pertenece, por tanto, al 2.° bisector, 2.° cuadrante.

Puntos del 3.er cuadrante

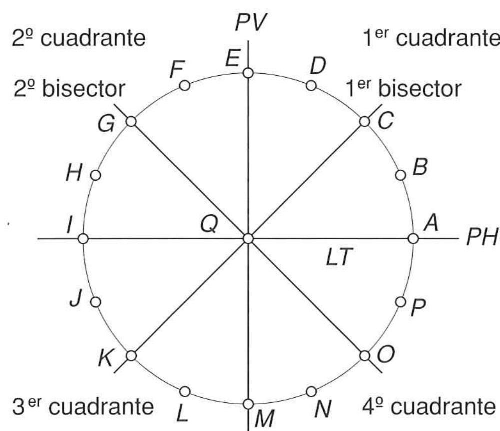
En este caso, todos los puntos de este cuadrante tienen su proyección horizontal por encima de la *LT*, y la vertical por debajo de ésta. Por ello, tienen alejamiento (*Y*) y cota (*Z*) negativos: ***A* (±*X*, –*Y*, –*Z*).** Obsérvense en la Figura 7.15 los puntos *J*, *K* y *L*.

El punto *K* tiene igual cota que alejamiento; pertenece, por tanto, al 1.er bisector, 3.er cuadrante.

Puntos del 4.° cuadrante

Por último, los puntos del 4.° cuadrante se caracterizan por tener las dos proyecciones, la horizontal y la vertical, por debajo de la *LT*. Es decir, todos sus puntos tienen cota (*Z*) negativa y alejamiento (*Y*) positivo: ***A* (±X, Y, –Z).** Obsérvese en la Figura 7.15 los puntos *N*, *O* y *P*.

El punto *O* tiene igual cota que alejamiento; pertenece, por tanto, al 2.° bisector, 4.° cuadrante.



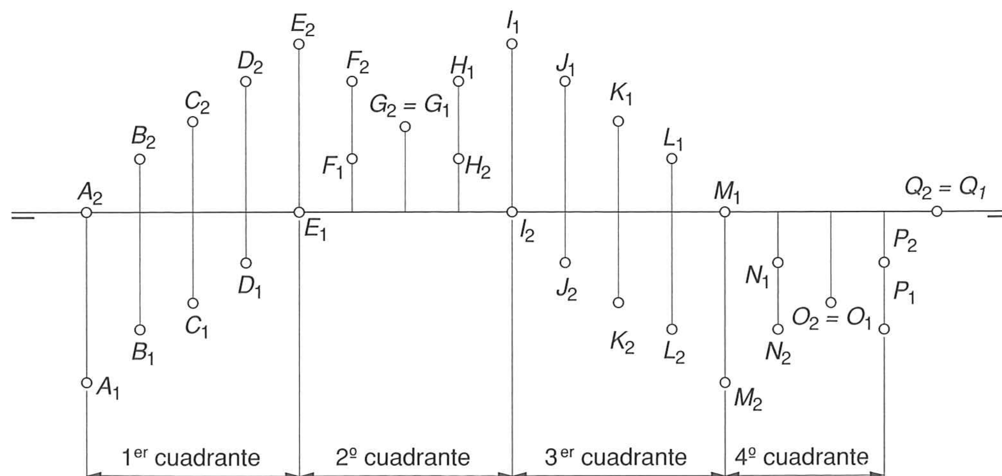


Fig. 7.15. *Posiciones generales del punto respecto de los dos planos de proyección.*



Puntos contenidos en el plano horizontal

Son los puntos que forman el *PH*. Su representación horizontal se sitúa por debajo de la *LT* si el alejamiento (*Y*) es positivo, y por encima, si éste es negativo. Al ser la cota (Z) nula, su representación vertical está formando parte de la citada línea de tierra. Este tipo de puntos queda identificado cuando: **A (±*X*, ±*Y*, 0)**. Obsérvense en la Figura 7.15 los puntos *A* e *I*.

Puntos contenidos en el plano vertical

Son los puntos que forman el *PV*. Estos puntos tienen la proyección horizontal en la *LT*, dado que su alejamiento (*Y*) es nulo; y la proyección vertical se sitúa por encima de la *LT* si la cota (*Z*) es positiva, y por debajo de ésta si es negativa.

Este tipo de puntos queda identificado cuando: ***A* (±*X*, 0, ±*Z*)**. Obsérvense en la Figura 7.15 los puntos *E* y *M*.

Puntos contenidos en la línea de tierra

Son los puntos que forman la *LT*. Se caracterizan por tener sus dos proyecciones coincidentes y sobre la *LT*, dado que su cota y alejamiento son nulos: ***A* (±*X*, 0, 0)**. Obsérvese en la Figura 7.15 el punto *Q*.

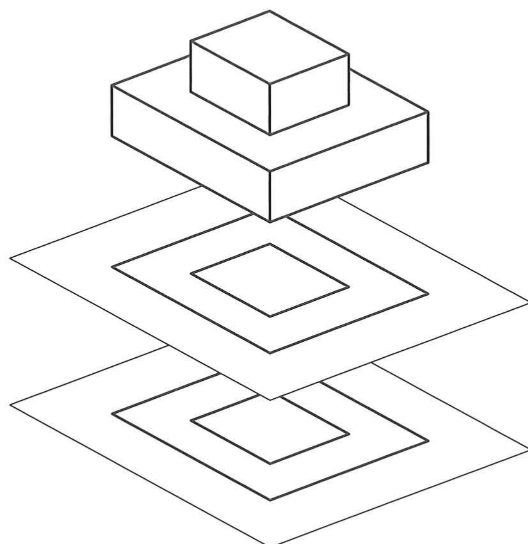


Fig. 7.16. *Proyección de un mismo objeto sobre planos paralelos.*

▶▶▶ Diédrico directo o método directo

Las proyecciones ortogonales de cualquier elemento sobre planos paralelos son idénticas; por tanto, la distancia existente entre un elemento y el plano de proyección no es una cuestión que influya en sus proyecciones (Fig. 7.16).

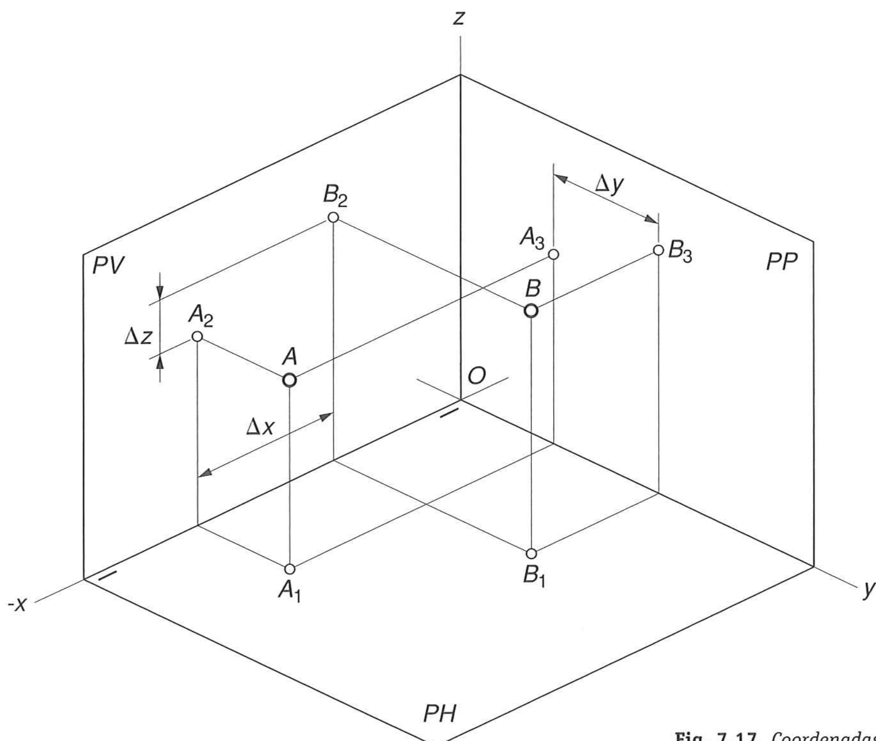


Fig. 7.17. *Coordenadas relativas de los puntos* A y B.

▶▶▶ Representación del punto en el método directo

El sistema diédrico clásico parte de una posición previa de los planos de proyección mediante la elección de la *LT*, y a partir de ella, los trazados quedan obligados a tener una separación fija, cuando lo verdaderamente importante para las proyecciones, por ejemplo de los puntos *A* y *B*, es que éstos guarden sus **coordenadas relativas.**

El punto se representa de igual manera que en el sistema diédrico clásico, con sus dos proyecciones (A_1 y A_2) sobre una misma línea de referencia; pero en el método directo, al desaparecer la *LT*, la separación entre las proyecciones puede ser aquella que sea más operativa para dar solución al problema planteado.

Para representar puntos hay que tener en cuenta, como se expuso anteriormente, la relación existente entre sus coordenadas relativas (Fig. 7.17), es decir:

- **Desviación:** es la distancia que existe entre las líneas de referencia de los puntos, y viene dada por Δ*X* (incremento de *X*).



- **Alejamiento relativo:** es la diferencia de alejamientos entre puntos, y viene dada por ΔY (incremento de Y).

- **Cota relativa:** es la diferencia de cotas que tienen los puntos y viene especificada por ΔZ (incremento de Z).

Véase cómo se ha operado en las Figuras 7.18 y 7.19 para representar, en el método directo, los puntos *A* y *B*.

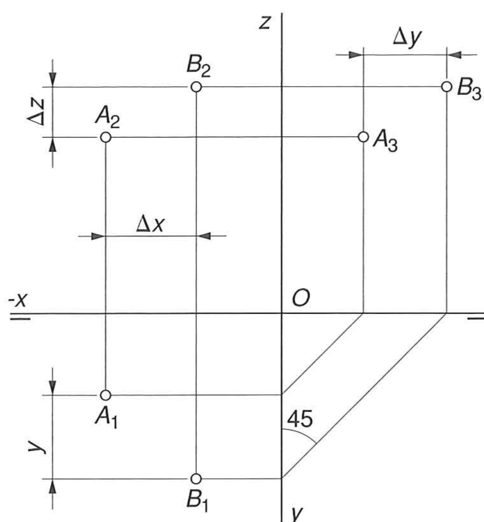


Fig. 7.18. *Representación de los puntos* A y B *en el sistema diédrico ortogonal.*

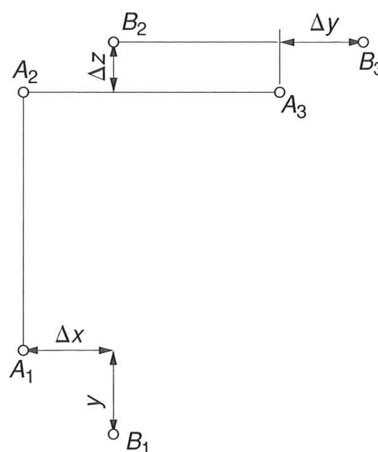


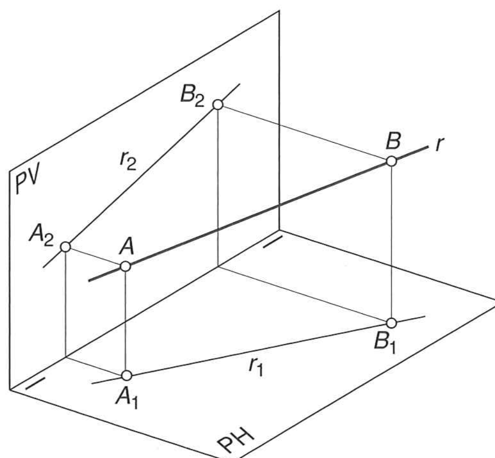
Fig. 7.19. *Representación de los puntos* A y B *en el sistema diédrico directo.*

La representación de perfil A_3, B_3 ... se determina fijando un punto cualquiera, en este caso A_3; el perfil de *B* o de otros puntos si los hubiese, se relacionan con A_3 mediante sus alejamientos relativos (ΔY).

Como se puede observar en las figuras, existe una semejanza entre el método clásico del sistema diédrico y el método directo.

7.3. Representación de la recta

Dos puntos en el espacio determinan una recta; por eso, para representarla en el sistema diédrico será suficiente con conocer dos puntos cualesquiera de ella, *A* y *B*. Uniendo las proyecciones homónimas, es decir, A_1 con B_1 y A_2 con B_2, se obtienen las representaciones horizontal, r_1, y vertical, r_2, de la citada recta sobre los planos de proyección (Fig. 7.20).



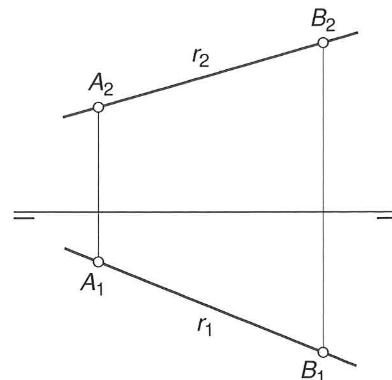
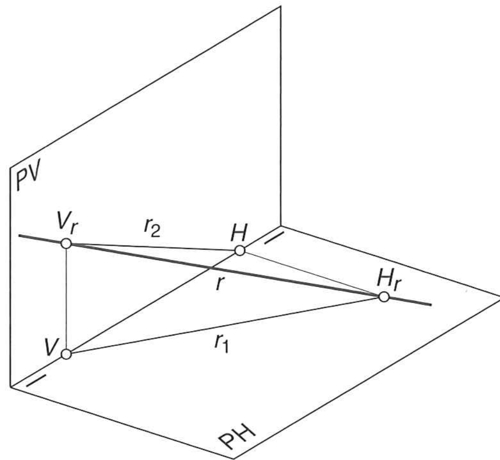


Fig. 7.20. *Representación de la recta.*



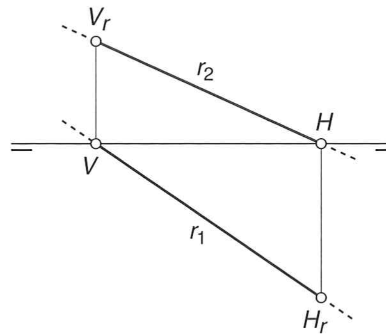
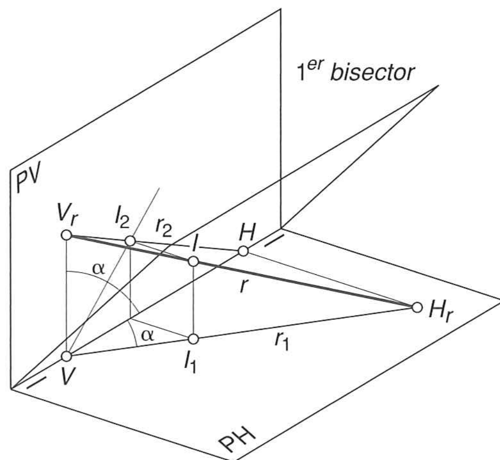


Fig. 7.21. *Traza vertical.*



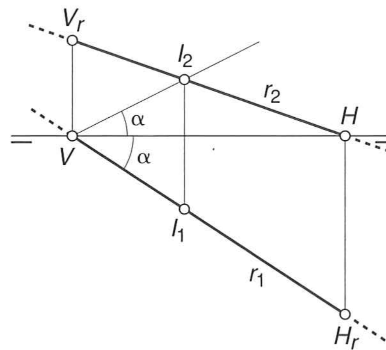
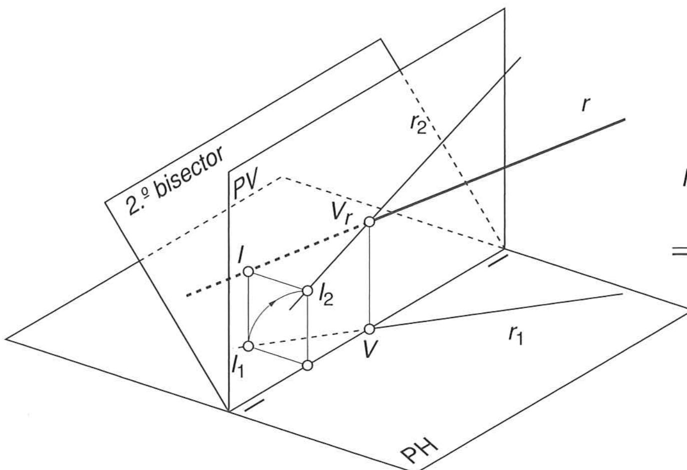


Fig. 7.22. *Traza con el primer bisector.*



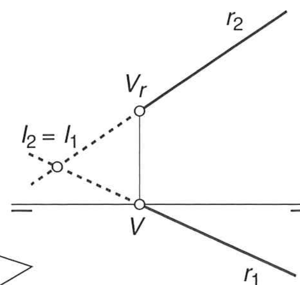


Fig. 7.23. *Traza con el segundo bisector.*

A. Puntos traza de una recta

Se trata de los puntos de intersección de la recta con los planos de proyección. La traza horizontal de la recta *r* se denomina con H_r, y la traza vertical, con V_r.

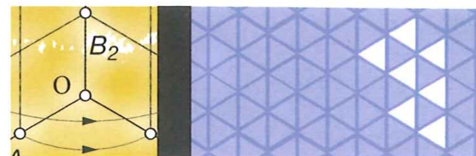
Para hallar las trazas de una recta definida por sus proyecciones, r_1 y r_2, o por dos puntos cualesquiera, *A* y *B*, de la misma, se actúa del modo siguiente:

- **Traza horizontal:** se determina prolongando su proyección vertical, r_2, hasta que corte la *LT* en el punto *H*, por el que se dibuja una perpendicular a la *LT* hasta que corte a la proyección r_1 en el punto H_r, que es el punto traza buscado.

- **Traza vertical:** de igual modo, para hallarla se prolonga la proyección horizontal de la recta hasta que ésta corte en *V* a la *LT*, y se dibuja por ese punto una perpendicular a la *LT* hasta que intersecione con V_r en r_2, que es el punto traza que se busca (Fig. 7.21).

- **Traza con el primer bisector:** se halla la recta simétrica de una de las dos proyecciones de la recta *r* respecto a la *LT*, y su intersección con la otra proyección. Así, se obtiene una de las proyecciones de la traza, por ejemplo I_2; se refiere perpendicularmente a partir de ese punto a r_1, determinando I_1, dando así solución al problema (Fig. 7.22).

- **Traza con el segundo bisector:** sólo es necesario determinar la intersección de sus dos proyecciones (Fig. 7.23).



B. Determinación de partes vistas y ocultas de una recta

El observador en este sistema está situado en el primer cuadrante; por ello, sólo verá «vistos» los elementos, figuras y objetos situados dentro de él.

La recta puede pasar como máximo por tres cuadrantes, considerando, por tanto, ocultas las proyecciones que se sitúen fuera del primer cuadrante. Se diferencia con trazo continuo la porción de recta, en su parte vista, y con trazo discontinuo en los demás.

- **Cuadrantes por los que transita una recta:** se observa en qué situación están sus trazas, que son los puntos que separan las parte vista de las oculta, y más concretamente el paso de uno a otro cuadrante; posteriormente, la posición de los puntos de los segmentos que de tal manera vienen separados. Para ello se debe tener presente:

– **Si las trazas son vistas,** éstas separan, además de las partes vistas y ocultas de la recta, el segmento determinado por ellas (Fig. 7.24).

– **Si tiene una traza vista y la otra oculta,** la recta se divide en dos semirrectas, de las cuales será vista la que contiene la traza vista, y la oculta la otra (Fig. 7.25).

– **Si son ocultas las dos trazas de la recta,** sus dos proyecciones en toda su longitud también lo serán (Fig. 7.26).

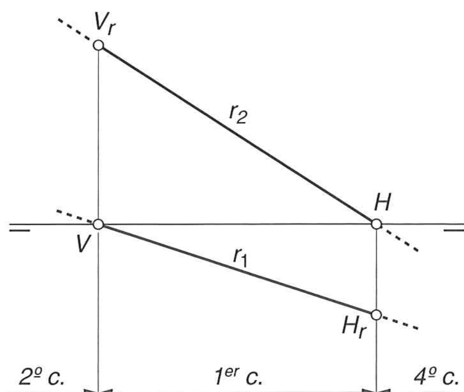


Fig. 7.24. *Cuadrantes por los que transita una recta si las trazas son vistas.*

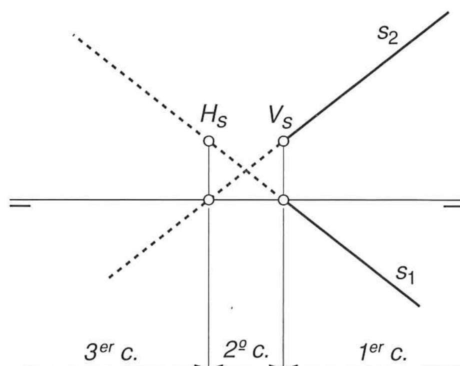


Fig. 7.25. *Cuadrantes por los que transita una recta si tiene una traza vista y otra oculta.*

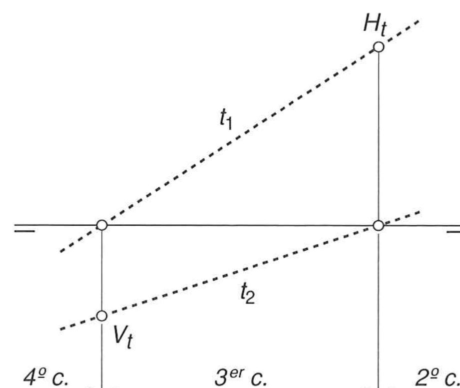


Fig. 7.26. *Cuadrantes por los que transita una recta si las trazas son ocultas.*

C. Representación de la recta (método directo)

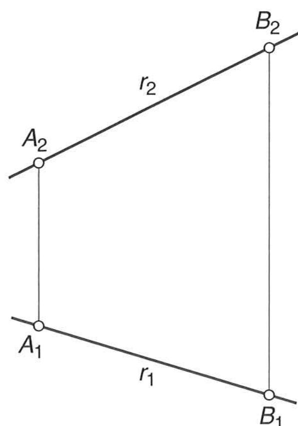


Fig. 7.27. *Representación de la recta por el método directo.*

De la misma manera que en el sistema diédrico clásico, las proyecciones de la recta en este método quedan determinadas por la unión de las proyecciones homónimas de los puntos que las definen (Fig. 7.27).

Para definir la representación de perfil de la recta r se toman dos puntos A y B de ella. Se traza una recta que corte a la horizontal trazada desde A, a 45° en cualquiera de sus puntos, y se procede a levantar las cotas de A y de B, obteniendo así las proyecciones A_3 y B_3; uniendo las citadas proyecciones se obtiene r_3 (Fig. 7.28).

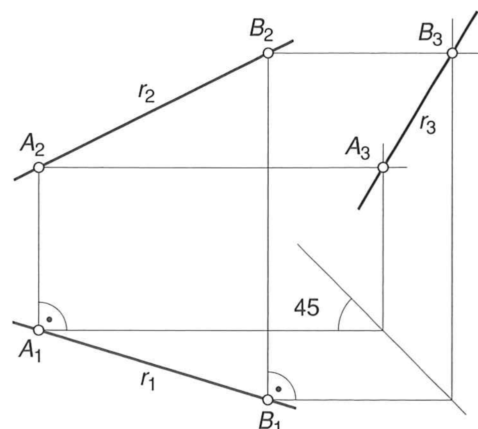
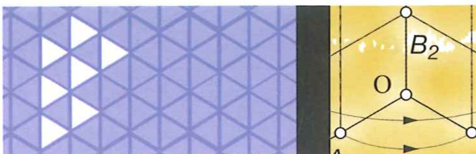


Fig. 7.28. *Representación de perfil de una recta en el método directo.*



D. Posiciones generales de la recta (alfabeto de la recta)

Recta horizontal

Esta recta es paralela al *PH* y oblicua al *PV*, todos sus puntos se hallan a la misma altura, de ahí que su proyección horizontal sea paralela a la *LT*, y no tenga traza con el *PH* (Fig. 7.29).

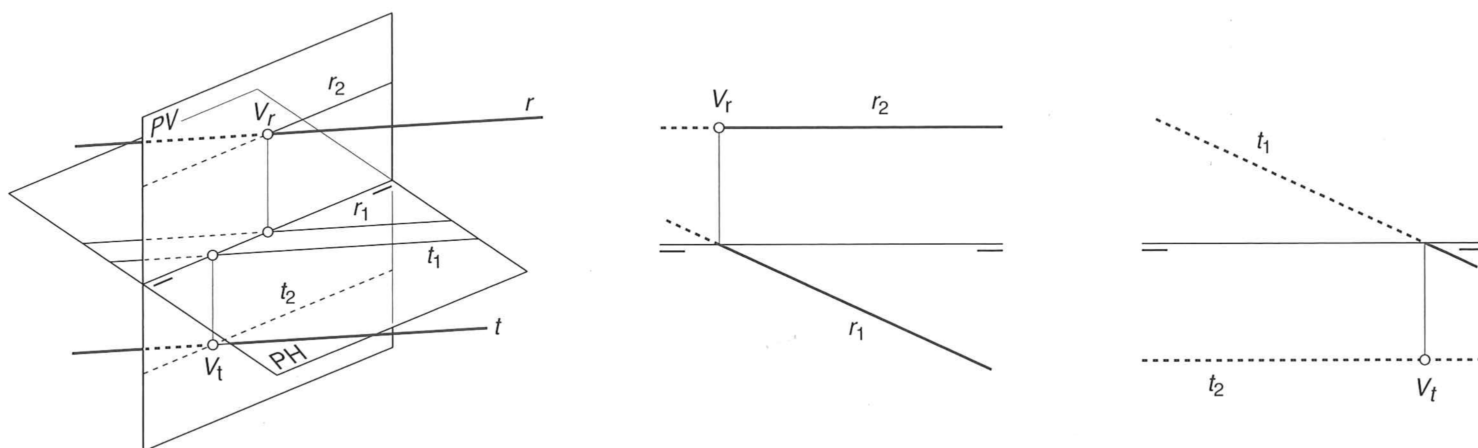
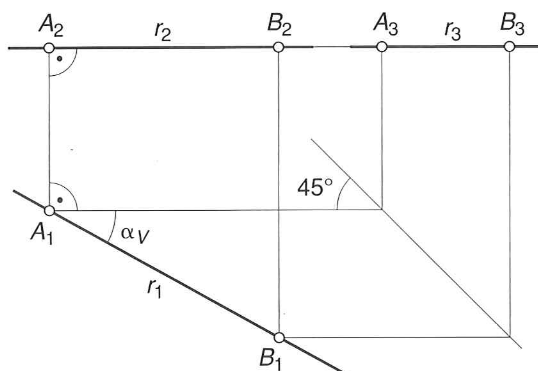


Fig. 7.29. *Recta horizontal.*



αV = Ángulo que forma la recta con PV

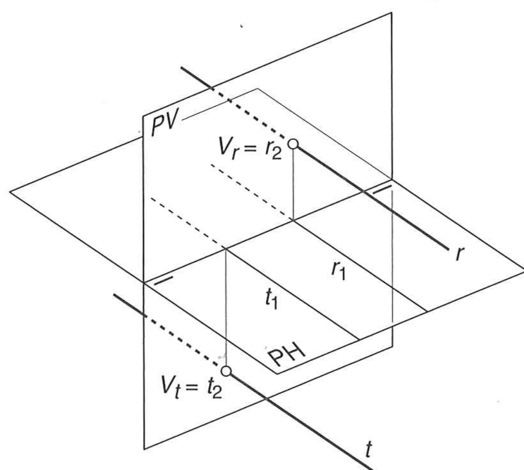
Recta horizontal (método directo)

La cota relativa de los puntos *A* y *B*, al igual que todos sus puntos, es cero (Fig. 7.30).

Fig. 7.30. *Recta horizontal en el método directo.*

Recta de punta

Es la recta que es perpendicular al *PV* y, por tanto, paralela al *PH*. La proyección horizontal de esta recta es perpendicular a la *LT*, siendo un punto su representación sobre el *PV* (Fig. 7.31).



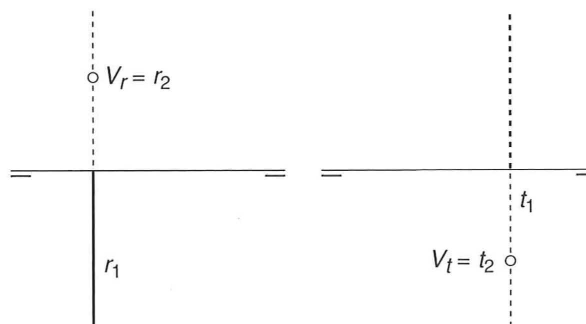
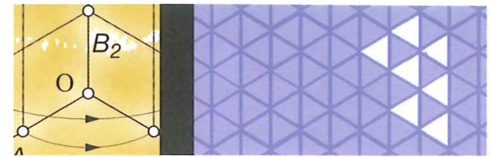


Fig. 7.31. *Recta de punta.*



Recta de punta (método directo)

En este caso, las cotas y las desviaciones relativas de *A* y *B*, al igual que todos sus puntos, es cero (Fig. 7.32).

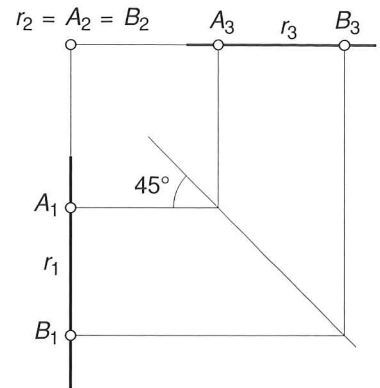


Fig. 7.32. *Recta de punta por el método directo.*

Recta frontal

Esta recta es paralela al *PV*, por ello no tiene traza con él, y oblicua al *PH*. Al tener todos sus puntos igual alejamiento, su proyección horizontal es paralela a la *LT* (Fig. 7.33).

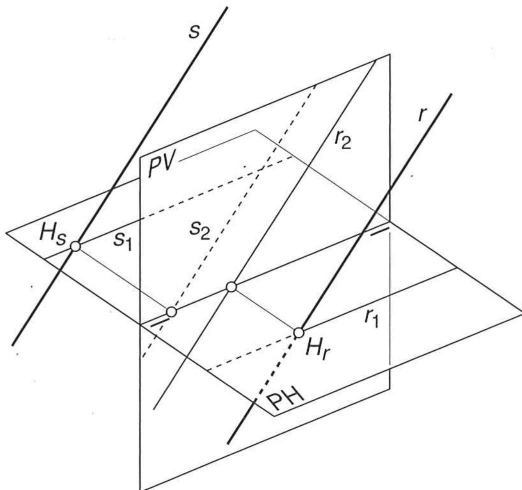


Fig. 7.33. *Recta frontal.*

Recta frontal (método directo)

El alejamiento relativo de los puntos *A* y *B*, al igual que todos sus puntos, es cero (Fig. 7.34).

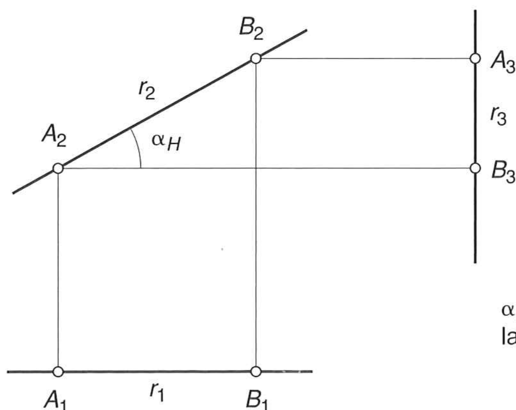
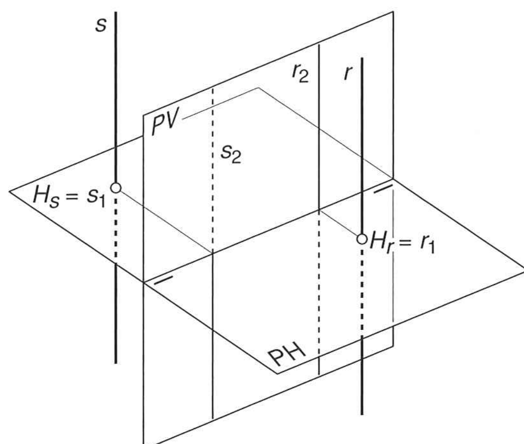
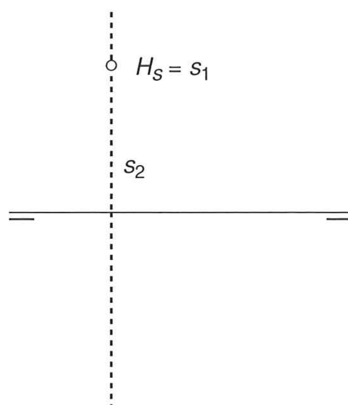


Fig. 7.34. *Recta frontal por el método directo.*

Recta vertical

Es la recta que es perpendicular al *PH* y paralela *PV*. Su proyección vertical es perpendicular a la *LT*, y la horizontal es un punto (Fig. 7.35).





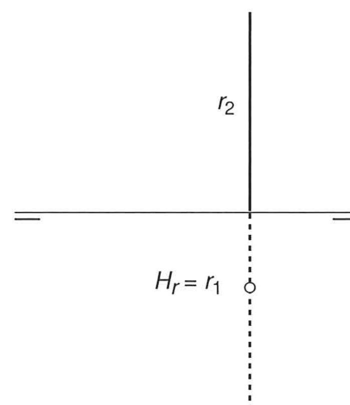


Fig. 7.35. *Recta vertical.*

Recta vertical (método directo)

En esta recta los alejamientos y desviaciones relativos de *A* y *B*, al igual que todos sus puntos, es cero (Fig. 7.36).

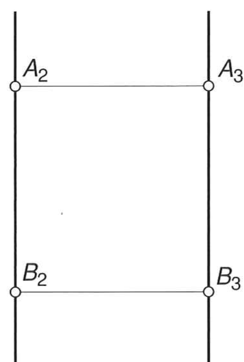
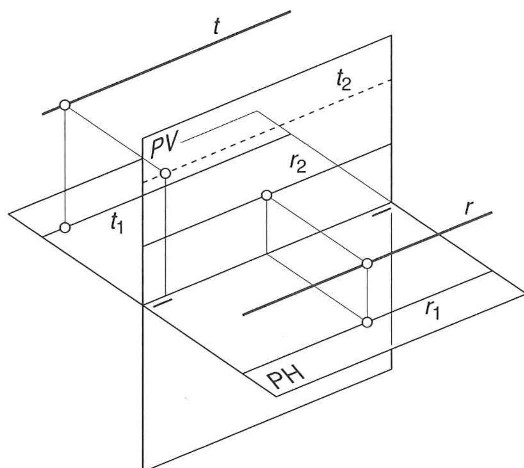
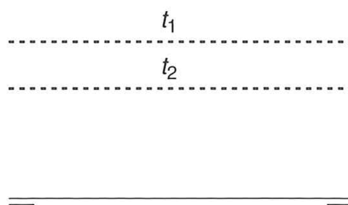


Fig. 7.36. *Recta vertical por el método directo.*

Recta paralela a la línea de tierra

Esta recta es paralela simultáneamente al *PV* y al *PH*; por tanto, su proyección horizontal y la vertical son paralelas a la *LT*; esto hace que no tenga trazas con los planos de proyección (Fig. 7.37).





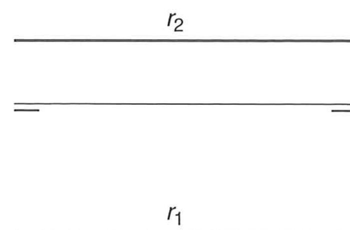
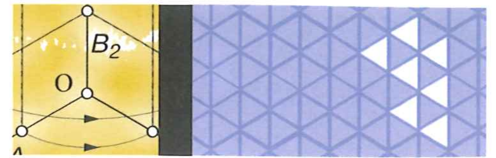


Fig. 7.37. *Recta paralela a la línea de tierra.*



Recta paralela a la línea de tierra (método directo)

En este tipo de rectas las cotas y alejamientos relativos de *A* y *B*, al igual que todos sus puntos, son cero (Fig. 7.38).

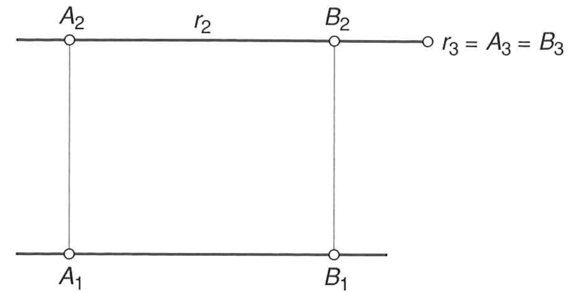


Fig. 7.38. *Recta paralela a la línea de tierra por el método directo.*

Recta que corta a la línea de tierra

La característica más importante que presenta esta recta es que sus dos trazas, horizontal y vertical, coinciden en un mismo punto de la línea de tierra (Fig. 7.39).

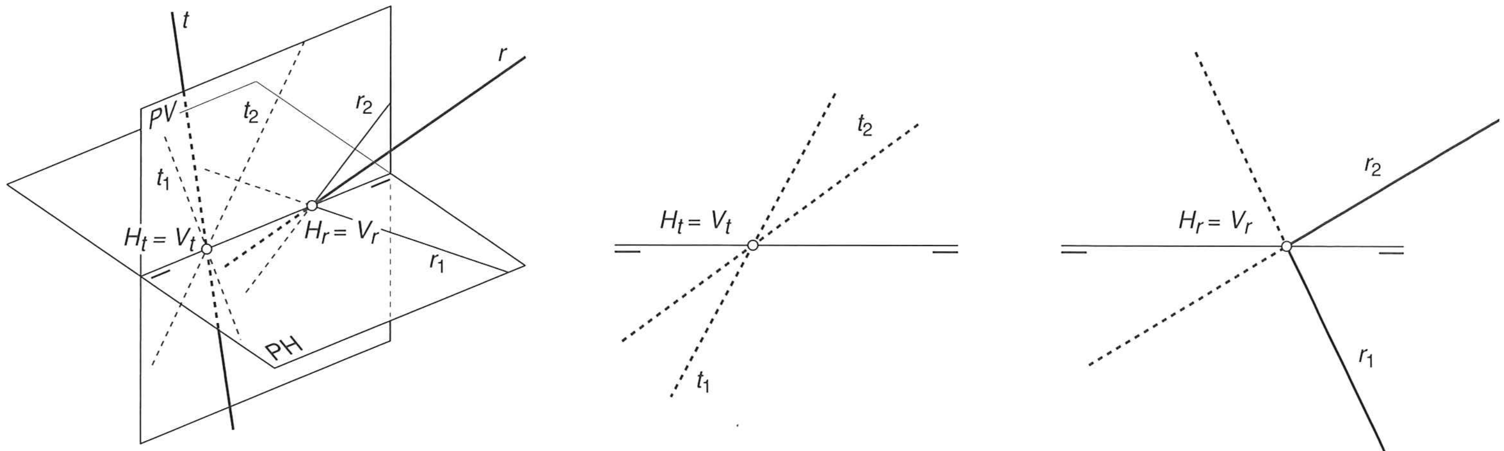


Fig. 7.39. *Recta que corta la línea de tierra.*

Recta contenida en un plano de proyección (horizontal y vertical)

Estas rectas se caracterizan porque coinciden ellas mismas con su proyección sobre los planos que las contiene, y la otra proyección se sitúa sobre la *LT* (Fig. 7.40).

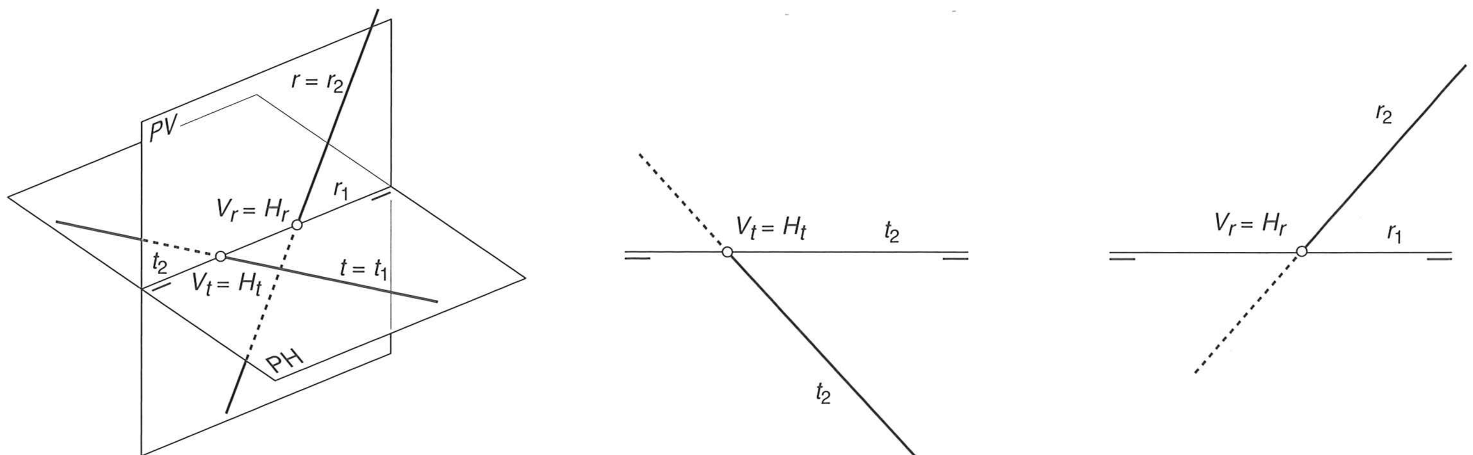


Fig. 7.40. *Recta contenida en los planos horizontal y vertical.*



Recta oblicua a los planos de proyección

Es una recta que, como su nombre indica, es oblicua a los planos de proyección; de ahí que también lo sean las proyecciones respecto a la *LT*. Por esta razón, tiene una traza horizontal y otra vertical (Fig. 7.41).

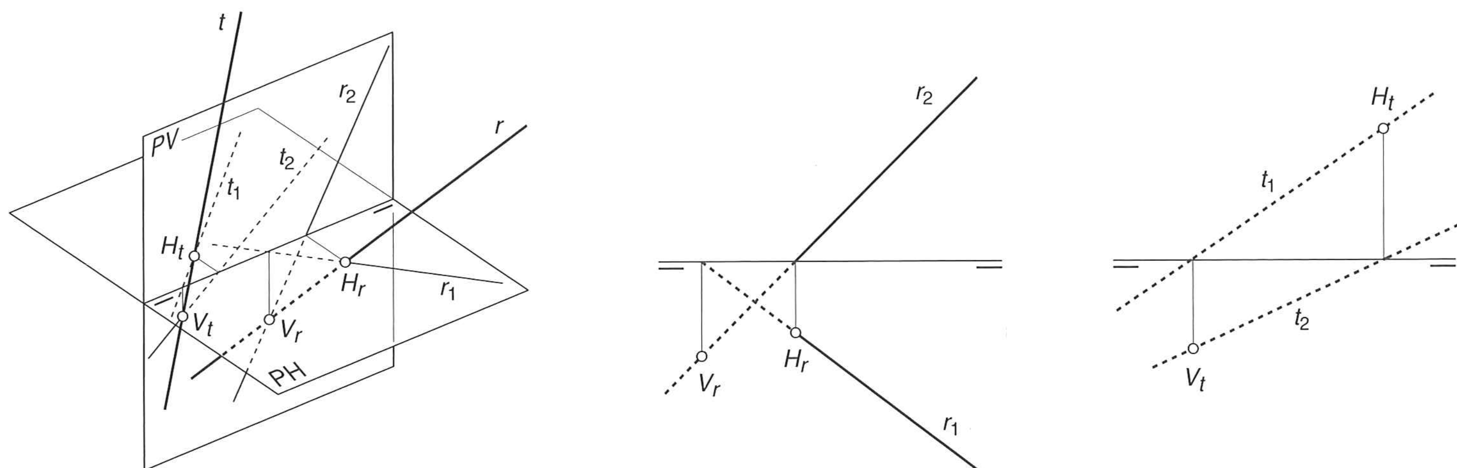


Fig. 7.41. *Rectas oblicuas a los planos de proyección.*

Recta oblicua a los planos de proyección (método directo)

La manera de representar esta recta es igual a la expuesta en **«Método directo. Representación de la recta»**.

Recta contenida en el primer bisector

Estas rectas se caracterizan porque todos sus puntos tienen cota y alejamiento iguales; por tanto, sus proyecciones son simétricas respecto a la *LT* y, además, pueden o no cortarla.

Si cortan la *LT*, ambas proyecciones forman con ésta el mismo ángulo α; y si no, la recta es paralela a la *LT* (Fig. 7.42).

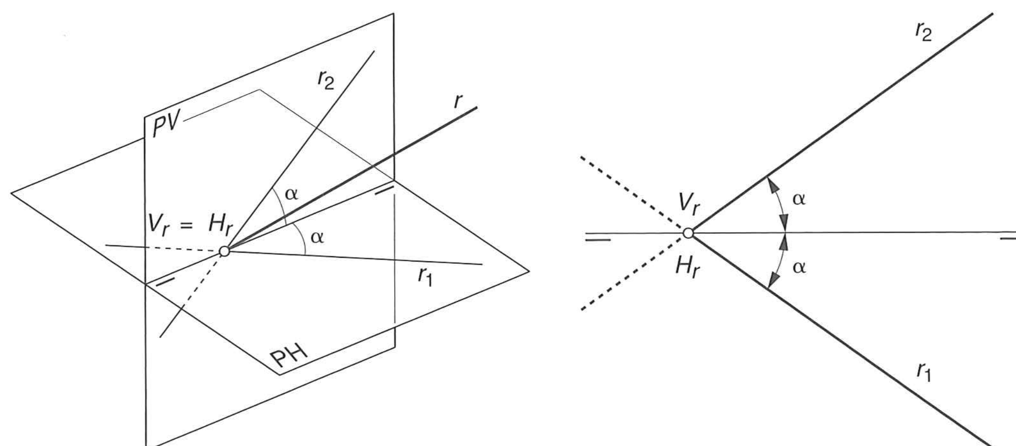
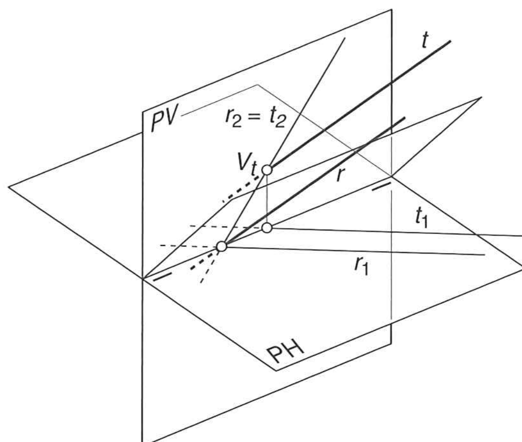


Fig. 7.42. *Recta contenida en el primer bisector.*



Recta paralela al primer bisector

Como norma general, una recta será paralela a este plano cuando no tenga traza con él, es decir, una de sus proyecciones ha de ser, indefectiblemente, paralela a la simétrica de la otra, respecto a la *LT* (Fig. 7.43).



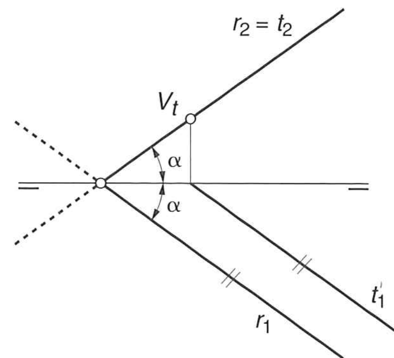
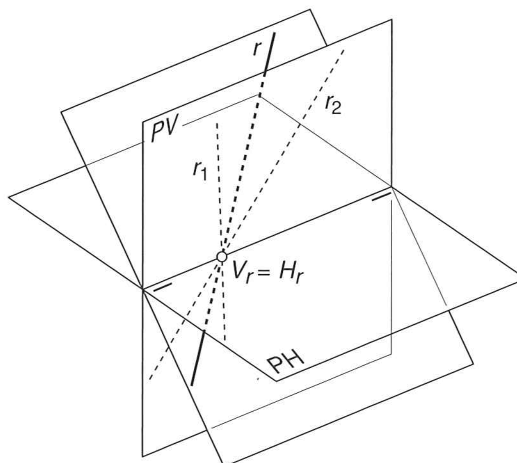


Fig. 7.43. *Recta paralela al primer bisector.*

Recta contenida en el segundo bisector

La particularidad que presentan estas rectas es que están compuestas por puntos cuyas proyecciones se confunden por ser dobles. Esto hace que las proyecciones de la recta también se confundan en una sola representación que, al igual que las rectas contenidas en el primer bisector, podrán cortar a la *LT* o ser paralelas a la misma (Fig. 7.44).



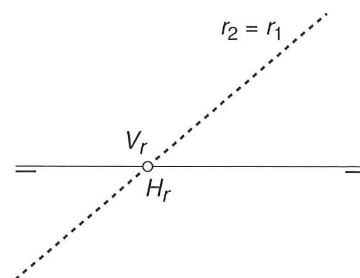
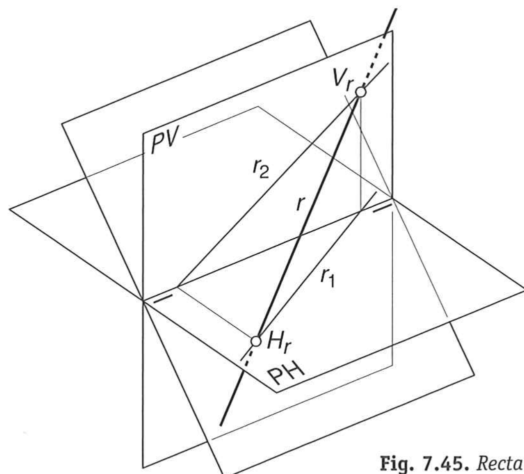
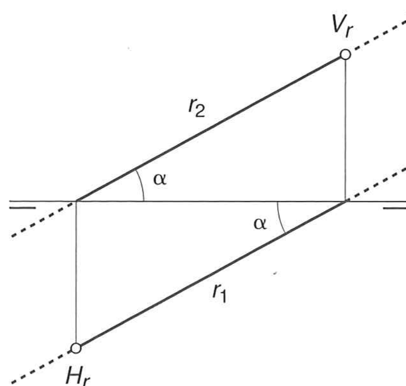


Fig. 7.44. *Recta contenida en el segundo bisector.*

Recta paralela al segundo bisector

Esta recta, al igual que ocurría con las paralelas del primer bisector, tampoco tienen traza con él, por tanto, se reconocen las rectas paralelas al segundo bisector por tener las proyecciones paralelas entre sí (Fig. 7.45).





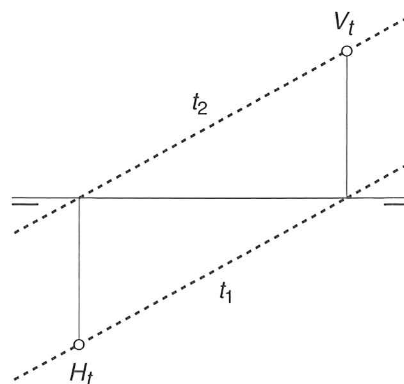


Fig. 7.45. *Recta paralela al segundo bisector.*

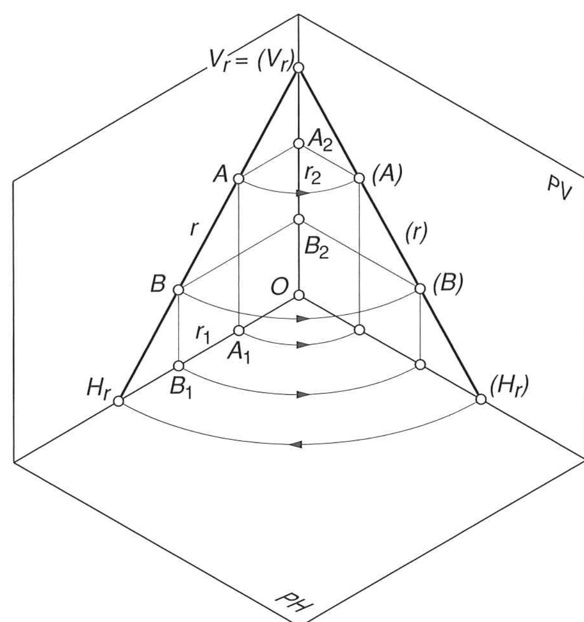


Fig. 7.46. *Recta de perfil.*

Recta de perfil

Se denomina así la recta contenida en un plano perpendicular a la *LT* o de perfil, y cuyas trazas y proyecciones están confundidas en una misma recta perpendicular a la *LT*.

Para solucionar este problema se representan dos puntos cualesquiera de ella y se abate el plano de perfil que la contiene, girando alrededor de su recta de intersección con el vertical de proyección, hasta hacerle coincidir con él. Obsérvese en las Figuras 7.46 y 7.47 los pasos dados para que el abatimiento se lleve a cabo.

1. Con centro en *O*, lugar donde se cortan r_2 con r_1, y radio OA_1 se traza un arco hasta cortar a la *LT*. Desde ese punto se levanta una perpendicular a la *LT*, que corta en (*A*) abatido, donde corte a la paralela trazada desde A_2 a la *LT*.

2. Con el punto *B* se realiza el mismo proceso que se ha llevado a cabo con el punto *A*.

3. Se han unido (*A*) y (*B*), puntos abatidos sobre *PV*, determinando así la *(r)* abatida; donde ésta corta a r_2 se obtiene V_r que coincide con (V_r) abatida, por estar ambos en la charnela de abatimiento. La traza horizontal (H_r) de la recta está situado donde *(r)* abatida corta a la *LT*. Para desabatir se hace centro en *O*, y con radio $O\ (H_r)$ se traza un arco hasta cortar a r_1, quedando así definidas las trazas de la recta dada.

4. De igual manera pueden dibujarse las proyecciones de cualquier punto (P_1 - P_2) situado sobre una recta (*r*) abatida, operando al revés de lo expuesto anteriormente.

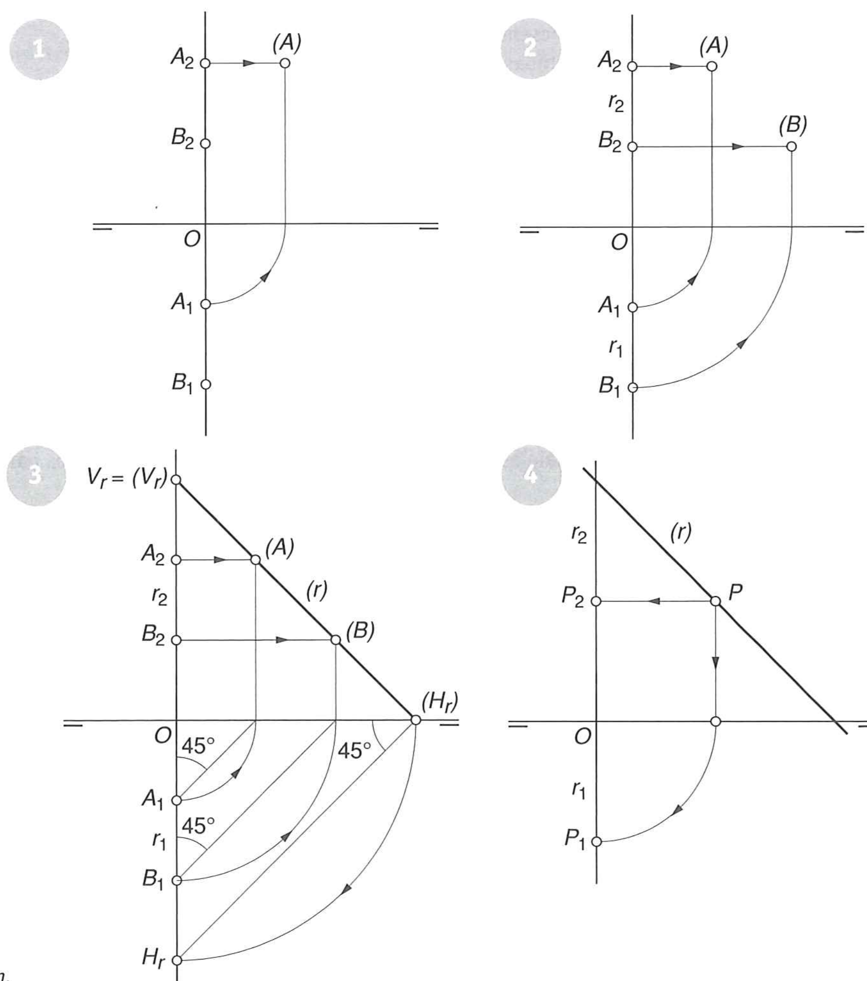
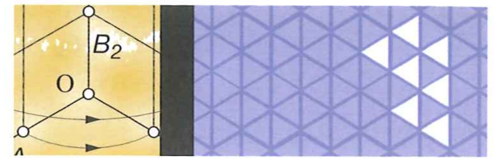


Fig. 7.47. *Recta de perfil: secuencia de realización.*



Recta de perfil (método directo)

Esta recta, al ser paralela a cualquier plano de perfil, su proyección sobre los citados planos aparece en verdadera magnitud. Esta circunstancia hace que los ángulos que forma esta recta con los planos de proyección (αV y αH), sean fáciles de hallar mediante la proyección r_3 de la recta (Fig. 7.48).

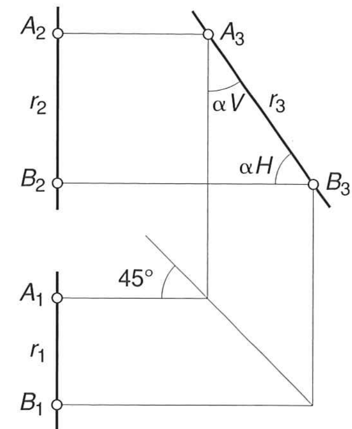


Fig. 7.48. *Recta de perfil por el método directo.*

E. Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden estar contenidas en un plano, o no.

Si están contenidas pueden ser **paralelas** si no se cortan, y **perpendiculares** u **oblicuas** si así lo hacen.

Si no están contenidas en dicho plano, las rectas se **cruzan.**

Rectas paralelas

Dos rectas paralelas, *r* y *s*, tienen sus proyecciones homónimas paralelas, dado que sus planos proyectantes son paralelos entre sí, y sus intersecciones con los planos horizontal y vertical son también paralelas (Fig.7.49).

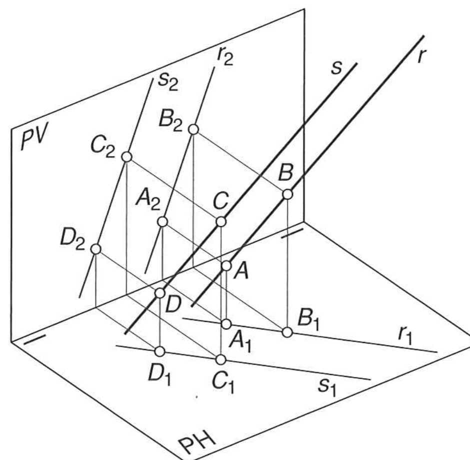


Fig. 7.49. *Rectas paralelas.*

Rectas que se cortan

Si dos rectas se cortan en el espacio, tienen un punto en común que, al pertenecerlas, tendrá sus dos proyecciones en una misma perpendicular, o línea de referencia, a la *LT* (Fig. 7.50).

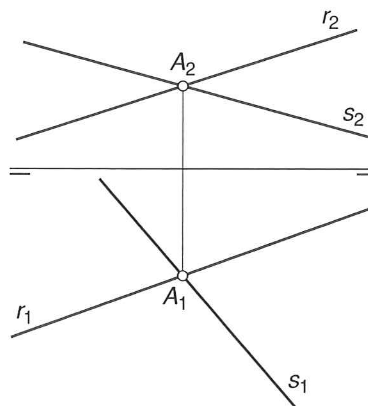


Fig. 7.50. *Rectas que se cortan.*

Rectas que se cruzan

Se llaman así las rectas que no están contenidas en un plano, que no tienen ningún punto en común y que tampoco son paralelas entre sí (Fig. 7.51).

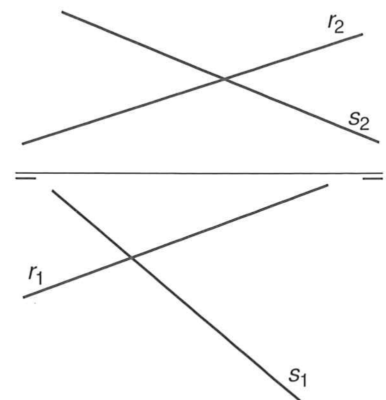


Fig. 7.51. *Rectas que se cruzan.*

7.4. Representación del plano

En el sistema diédrico, un plano se define como una superficie plana infinita e ilimitada. Un **plano** queda **determinado:** por tres puntos que no estén alineados, por una recta y por un punto exterior a ella, por dos rectas que se cortan y por dos rectas paralelas (Fig. 7.52).

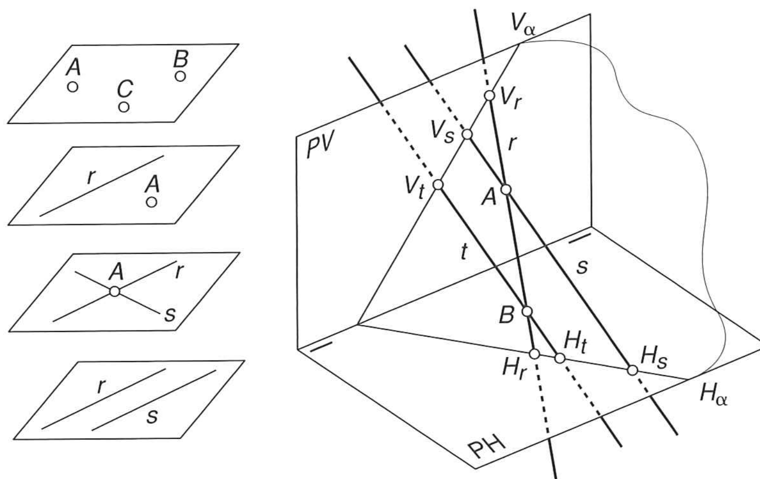


Fig. 7.52. *Formas de determinación del plano.*

El plano se representa por sus intersecciones con los planos de proyección, que se denominan trazas vertical y horizontal, respectivamente. Por tanto, trazas de un plano son las rectas de intersección que éste realiza sobre los planos de proyección. Estas trazas se identifican mediante las letras *v* y *h*, y se emplean letras griegas como subíndices para diferenciar un plano de otro (Fig. 7.53).

Si un plano tiene dos trazas que son oblicuas a la *LT*, ambas se cortan en un punto de esa línea.

Los planos que son perpendiculares a uno de los planos de proyección se denominan proyectantes del plano al que es perpendicular; por ejemplo, un plano que es perpendicular al *PH* la llama proyectante del horizontal.

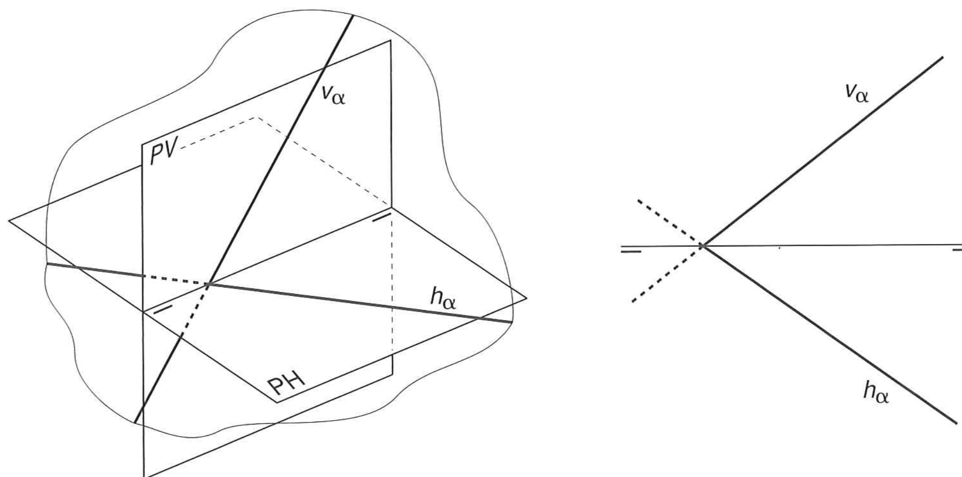


Fig. 7.53. *Trazas del plano.*

A. Determinación de un plano por coordenadas

Se utilizan tres puntos, *A*, *B*, y *C* de corte del plano con los ejes *X*, *Y*, *Z*. Véase la Figura 7.57: el punto *A* sólo tiene valor numérico en el eje *X*, siendo cero en los ejes *Y*, *Z*, respectivamente, de tal manera que este punto queda representado así: *A* (*X*, 0, 0).

Igualmente, los otros dos puntos quedan determinados como *B* (0, *Y*, 0) y *C* (0, 0, *Z*).

Por tanto, para definir la representación diédrica de un plano α por coordenadas se actúa de manera similar a la del punto, es decir, α (*X*, *Y*, *Z*), teniendo en cuenta que cada uno de los valores numéricos es, en realidad, un punto (Fig. 7.54).

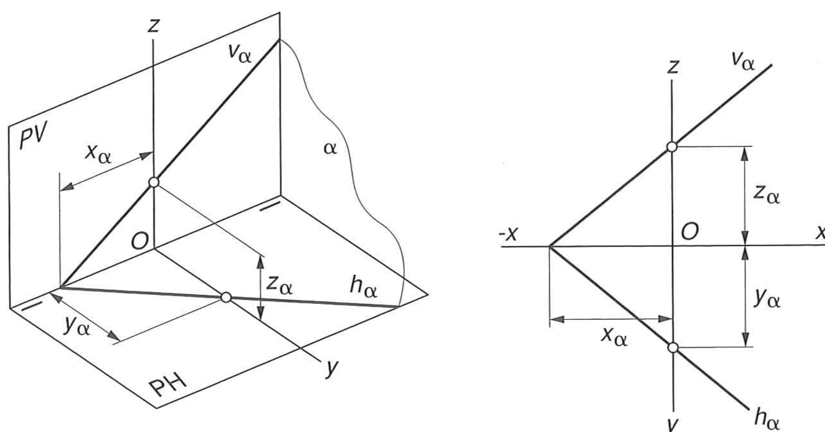
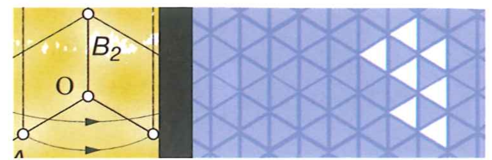
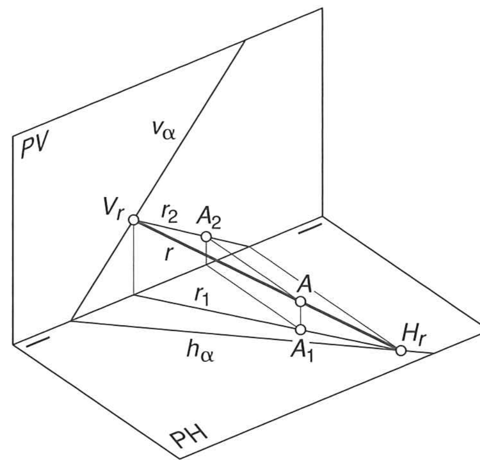


Fig. 7.54. *Determinación de un plano por coordenadas.*



B. Pertenencias

- Una **recta** r pertenece a un plano cuando las trazas de la recta están formando parte de las trazas del plano, es decir, v_α contiene a V_r, y h_α contiene a H_r.
- Un **punto** A pertenece a un plano cuando éste forma parte de una recta que está contenida en el plano.
- Un **punto** pertenece a una recta cuando sus proyecciones homónimas coinciden; por ejemplo, A_2 está sobre r_2, y A_1 sobre r_1 (Fig. 7.55).



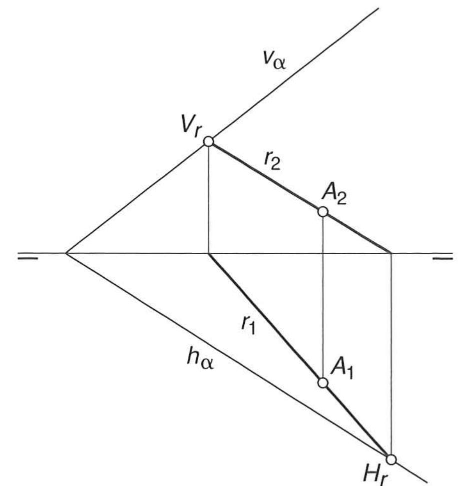


Fig. 7.55. *Pertenencia de un punto a una recta.*

Pertenencias en el método directo

En este sistema el plano se representa por medio de las proyecciones de los elementos que lo determinan. Supongamos tres puntos no alineados A, B y C. Se unen los puntos dos a dos, y el triángulo obtenido es la representación del plano α que los contiene.

Como se ha expuesto anteriormente:

- Un **punto** está sobre una recta cuando sus proyecciones homónimas coinciden.
- Una **recta** r pertenece a un plano cuando las trazas de la recta están formando parte de las trazas del plano.
- Un **punto** pertenece a un plano si está formando parte de una recta de ese plano (Fig. 7.56).

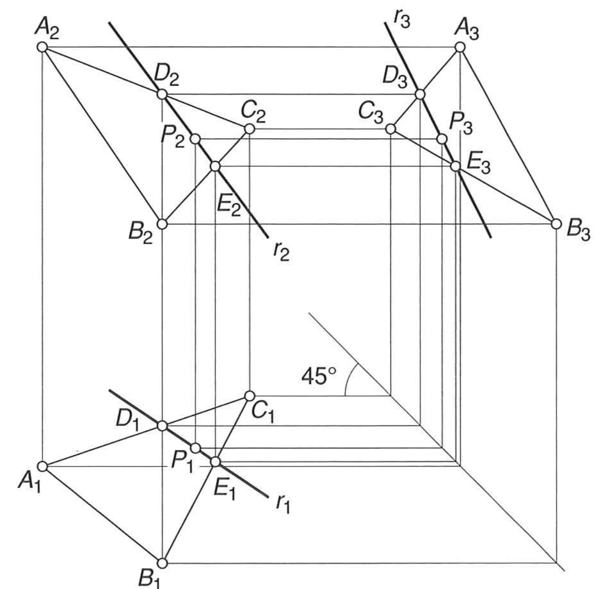


Fig. 7.56. *Pertenencia de un punto a un plano en el método directo.*

Plano α que contiene tres puntos, *A, B, C,* no alineados

1. Se unen los puntos entre sí obteniendo de este modo un par de rectas; esta operación se debe realizar observando qué rectas nos ofrecen más ventajas para determinar sus trazas.
2. Una vez halladas las trazas de las rectas y unidas homónimamente entre sí (véase el proceso seguido en la Figura 7.57), esas rectas serán las trazas del plano solución.

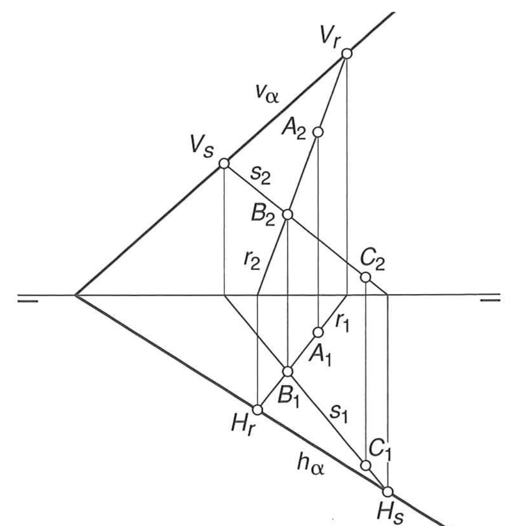


Fig. 7.57. *Plano que contiene tres puntos no alineados.*

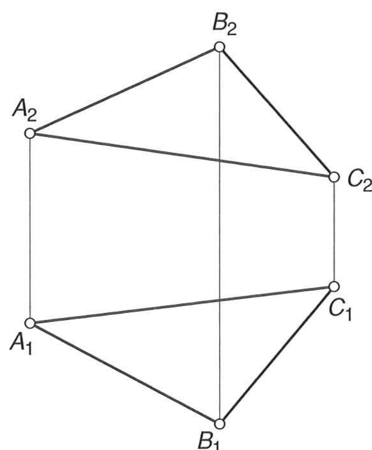


Fig. 7.58. *Plano que contiene tres puntos no alineados, método directo.*

▶▶▶ Plano α que contiene tres puntos, *A, B, C*, no alineados (método directo)

En este sistema el plano se representa por medio de las proyecciones de los elementos que lo determinan. En este caso, tres puntos no alineados unidos dos a dos (Fig. 7.58).

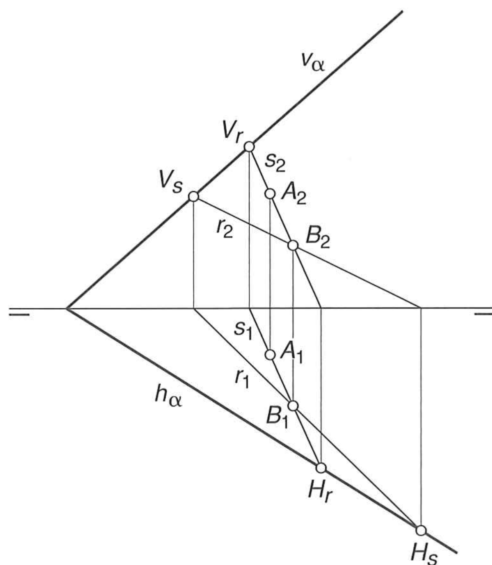


Fig. 7.59. *Plano que contiene una recta y un punto exterior a ella.*

▶▶▶ Plano α que contiene una recta *r* y un punto *A* exterior a ella

1. Este problema se reduce a tomar una recta auxiliar *s* que contenga al punto *A* dado y otro *B* contenido en la recta y que sirva de corte de ambas.
2. Una vez realizada esta operación, se aplican los razonamientos seguidos en la representación del plano dados tres puntos no alineados (Fig. 7.59).

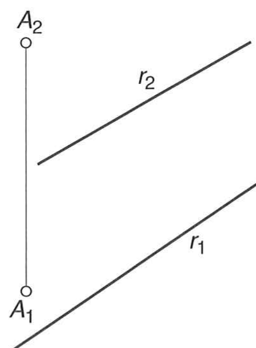


Fig. 7.60. *Plano que contiene una recta y un punto exterior a ella, método directo.*

▶▶▶ Plano α que contiene una recta *r* y un punto *A* exterior a ella (método directo)

El plano α (*r*, *A*) queda representado por este sistema en la Figura 7.60.



▶▶▶ Dibujar el plano α que contiene dos rectas *r* y *s* que se cortan

1. Este problema, a la vista de los anteriores, se resuelve de manera sencilla: basta con determinar las trazas de ambas rectas y uniendo, como se ha hecho anteriormente, las homónimas entre sí, se obtienen las trazas del plano (Fig. 7.61).

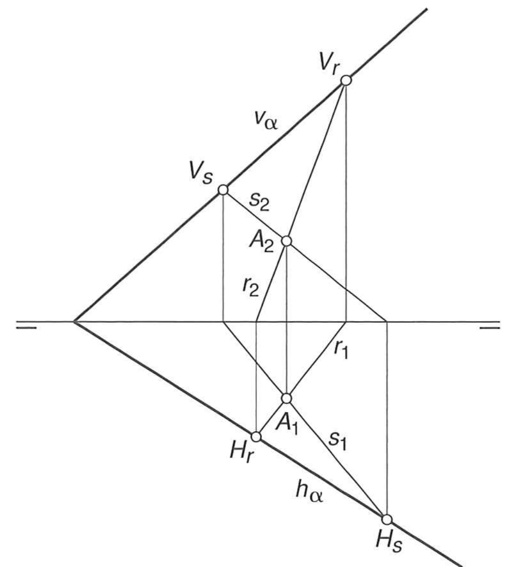


Fig. 7.61. *Plano que contiene dos rectas que se cortan.*

▶▶▶ Dibujar el plano α que contiene dos rectas *r* y *s* que se cortan (método directo)

El plano α (*r*, *s*) queda representado por este sistema en la Figura 7.62.

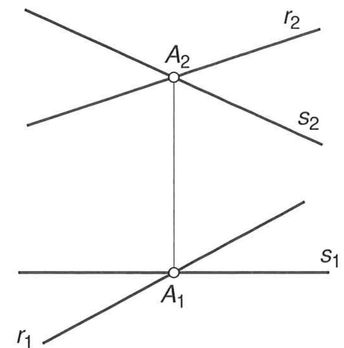


Fig. 7.62. *Plano que contiene dos rectas que se cortan, método directo.*

▶▶▶ Dibujar un plano α que contenga dos rectas *r* y *s* paralelas

1. En esta ocasión hay que verificar que las rectas son paralelas; para ello, se ha de comprobar que sus proyecciones homónimas sean paralelas, es decir, r_2 con s_2, y r_1 con s_1 (Fig. 7.63).

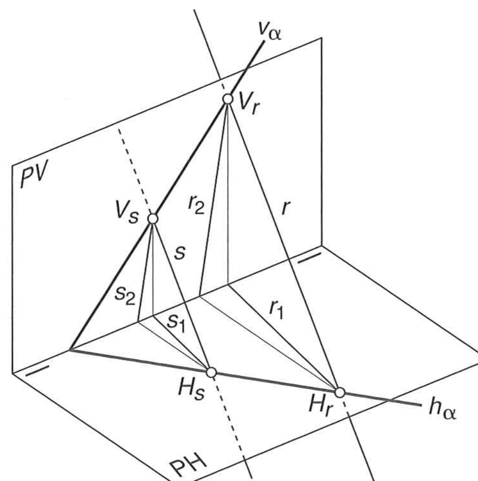
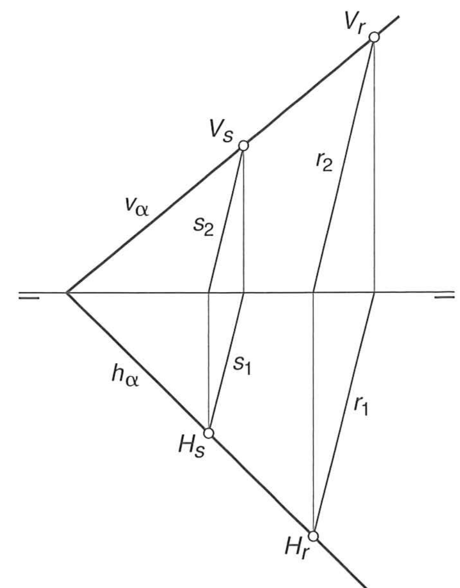


Fig. 7.63. *Plano que contiene dos rectas paralelas.*



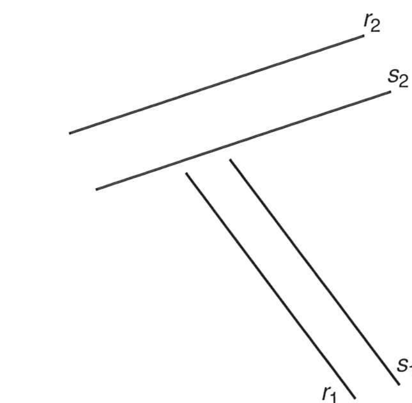


Fig. 7.64. *Plano que contiene dos rectas paralelas, método directo.*

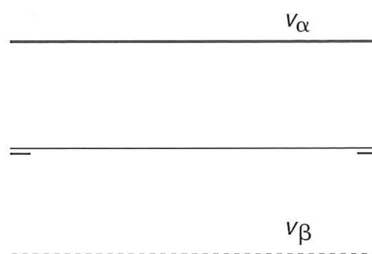
▶▶▶ Dibujar un plano α que contenga dos rectas *r* y *s* paralelas (método directo)

El plano α (*r*, *s*) queda representado por este sistema en la Figura 7.64.

▶▶ C. Posiciones del plano respecto a los planos de proyección

Plano horizontal o paralelo al plano horizontal de proyección

Es el que tiene su traza vertical paralela a la *LT*; por tanto, es paralelo al *PH* y perpendicular al *PV* (Fig. 7.65).



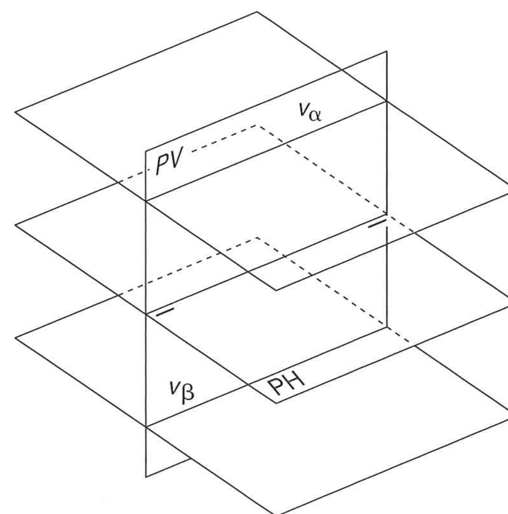


Fig. 7.65. *Plano horizontal.*

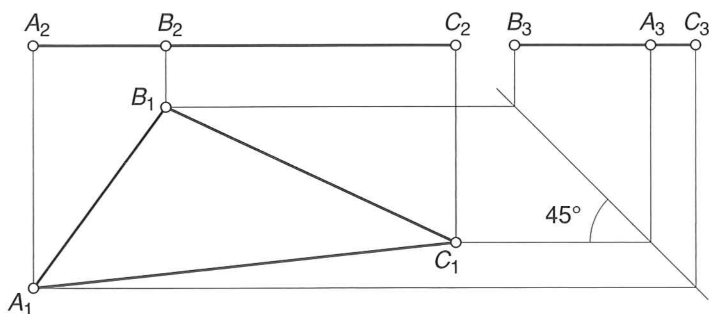


Fig. 7.66. *Plano horizontal dados tres puntos no alineados.*

Plano horizontal (método directo)

En este tipo de plano todos los elementos quedan representados en el alzado y en la vista de perfil según una recta horizontal. En las Figuras 7.66 a 7.69 se reflejan las cuatro formas de representación.

Las proyecciones horizontales aparecen en verdadera magnitud.

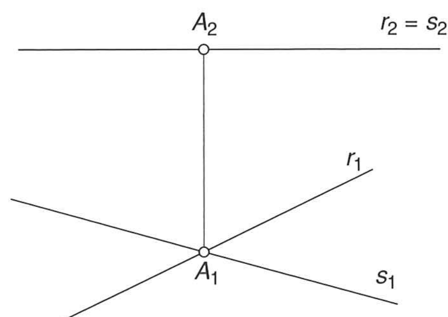


Fig. 7.67. *Plano horizontal dadaas dos rectas* r *y* s *que se cortan.*

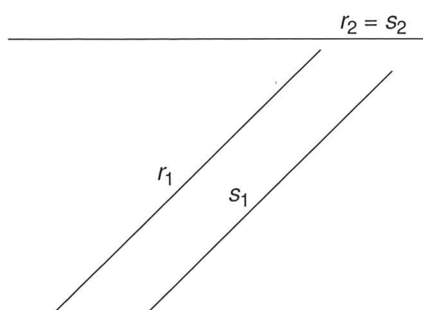


Fig. 7.68. *Plano horizontal dadas dos rectas* r *y* s *paralelas.*

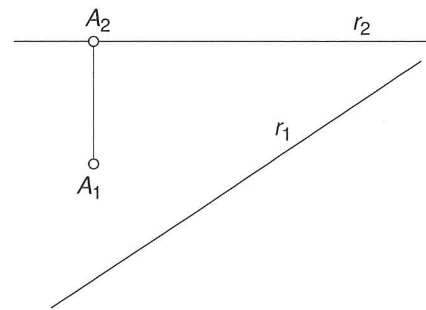


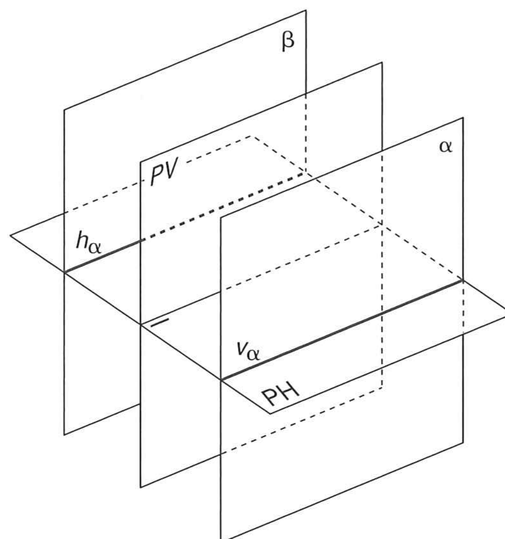
Fig. 7.69. *Plano horizontal dada una recta* r *y un punto* A *exterior a ella.*



Plano frontal paralelo al plano vertical de proyección

Al revés que el caso anterior, es paralelo al *PV*; por tanto, perpendicular al *PH*, y eso propicia que su traza horizontal sea paralela a la *LT*.

Las proyecciones verticales aparecen en verdadera magnitud (Fig. 7.70).



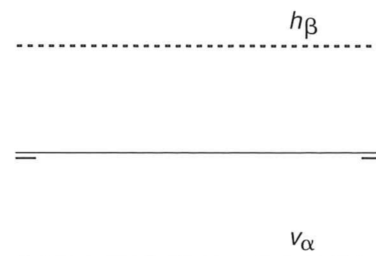


Fig. 7.70. *Plano frontal paralelo al plano de proyección.*

Plano frontal (método directo)

Todos sus elementos en planta se proyectan según una recta horizontal, y en el perfil como una recta vertical. Las Figuras 7.71 a 7.74 recogen los modos de representación del plano frontal por el método directo.

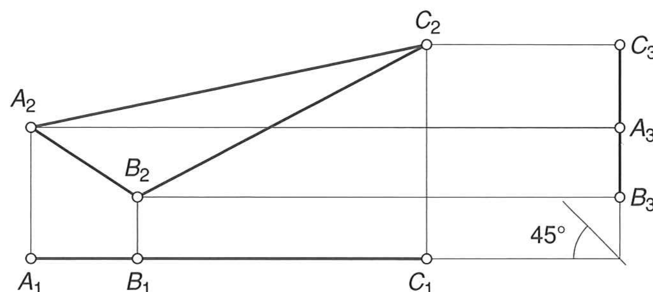


Fig. 7.71. *Plano frontal dados tres puntos no alineados.*

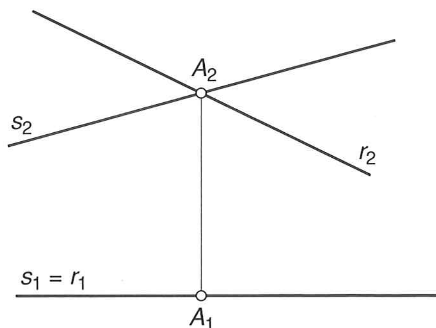


Fig. 7.72. *Plano frontal dadas dos rectas* r *y* s *que se cortan.*

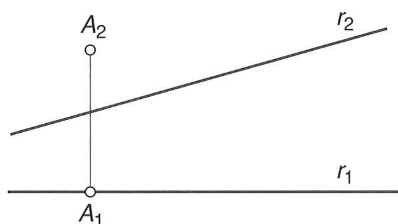


Fig. 7.73. *Plano frontal dado una recta r y un punto A exterior a ella.*

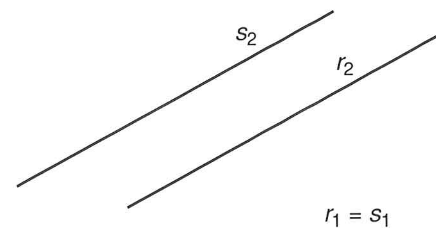
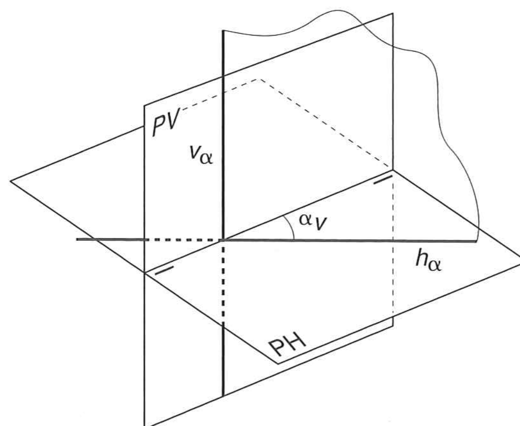


Fig. 7.74. *Plano frontal dadas dos rectas* r *y* s *paralelas.*

Plano vertical o perpendicular al plano horizontal de proyección

Es un plano perpendicular al *PH*; por tanto, su traza vertical es perpendicular a la *LT*, mientras la horizontal puede situarse en cualquier posición (Fig. 7.75).



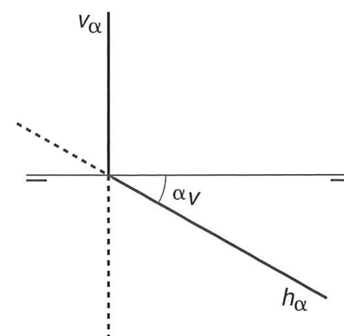


Fig. 7.75. *Plano vertical.*



Plano vertical (método directo)

Todos los elementos que contiene este plano coinciden con una línea en proyección horizontal. Las Figuras 7.76 a 7.79 recogen las cuatro formas de representación del plano vertical por este sistema.

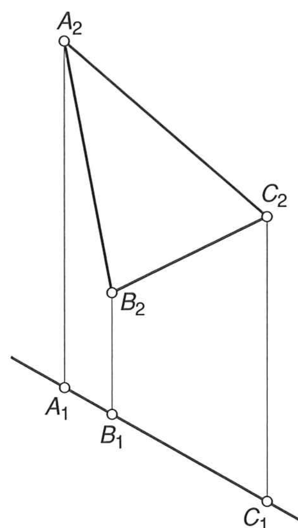


Fig. 7.76. *Plano vertical dados tres puntos no alineados.*

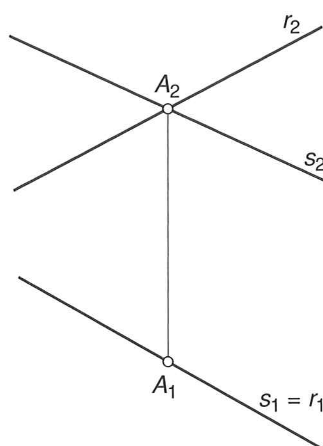


Fig. 7.77. *Plano vertical dados una recta r y un punto A exterior a ella.*

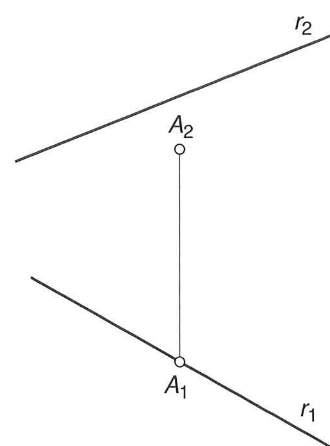


Fig. 7.78. *Plano vertical dadas dos rectas r y s que se cortan.*

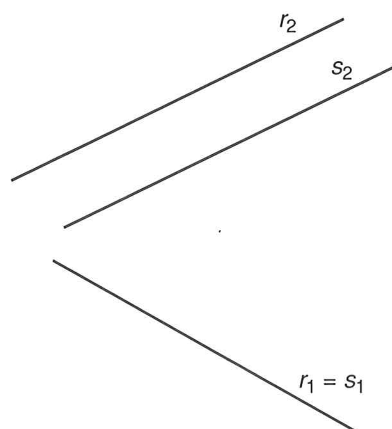
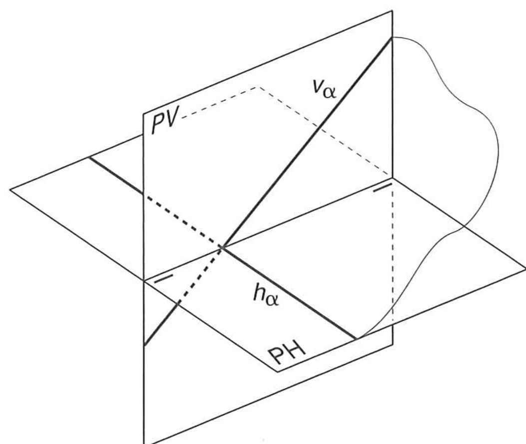


Fig. 7.79. *Plano vertical dadas dos rectas r y s paralelas.*

Plano de canto o perpendicular al plano vertical de proyección

Este plano tiene su traza horizontal perpendicular a la *LT*, dado que es perpendicular al *PV*, aunque la vertical puede adoptar cualquier dirección (Fig. 7.80).



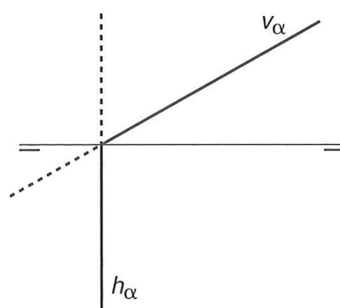
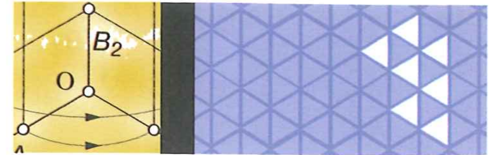


Fig. 7.80. *Plano de canto.*



Plano de canto (método directo)

Todos los elementos que contiene el plano coinciden con una línea en proyección vertical. Las Figuras 7.81 a 7.84 recogen los cuatro modos de representación por este sistema.

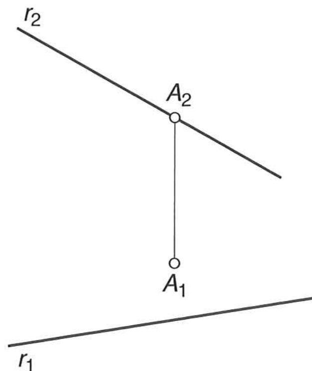


Fig. 7.82. *Plano de canto dados una recta r y un punto A exterior a ella.*

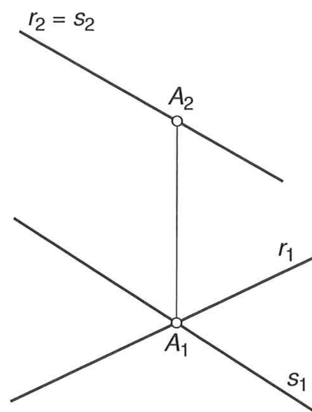


Fig. 7.83. *Plano de canto dadas dos rectas r y s que se cortan.*

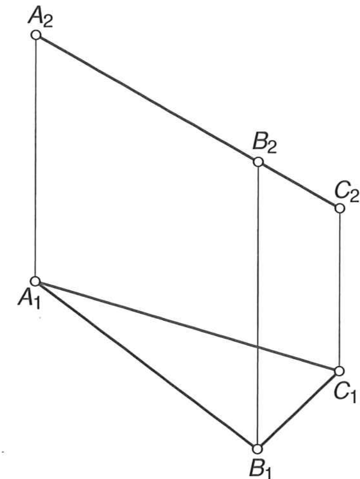


Fig. 7.81. *Plano de canto dados tres puntos no alineados.*

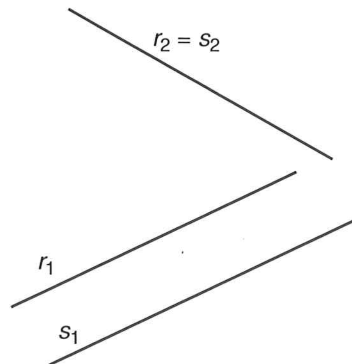
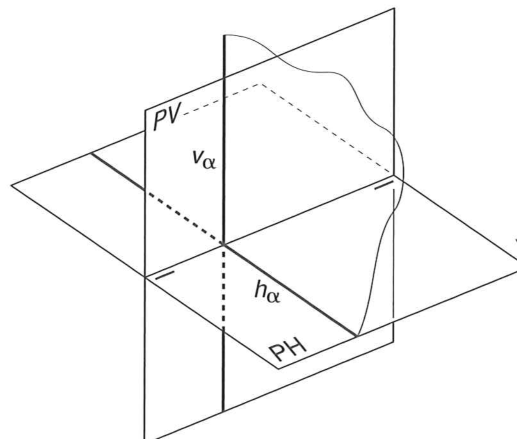


Fig. 7.84. *Plano de canto dadas dos rectas r y s paralelas.*

Plano de perfil o perpendicular a los dos planos de proyección

Este plano tiene sus trazas perpendiculares a la *LT*, dado que es un plano perpendicular a ambos planos de proyección (Fig. 7.85).



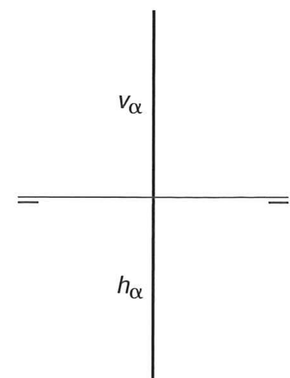


Fig. 7.85. *Plano de perfil.*



Plano de perfil (método directo)

Todos los elementos que contiene el plano coinciden con una línea vertical tanto en planta como en alzado. En la proyección de perfil se proyectan los elementos que contiene el plano en verdadera magnitud. Las Figuras 7.86 a 7.89 reflejan las cuatro formas de representación bajo este sistema.

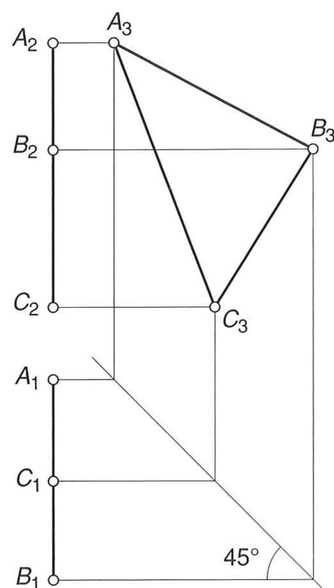


Fig. 7.86. *Plano de perfil dados tres puntos no alineados (A, B, C).*

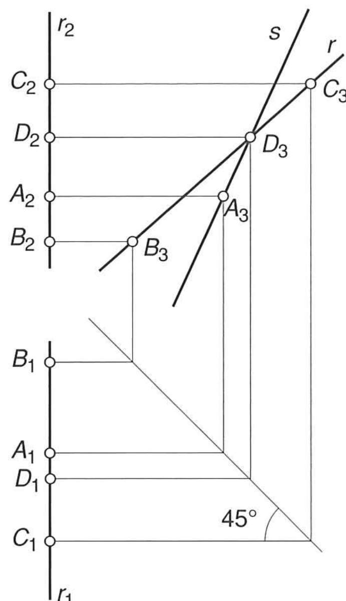


Fig. 7.87. *Plano de perfil dados una recta r y un punto A exterior a ella.*

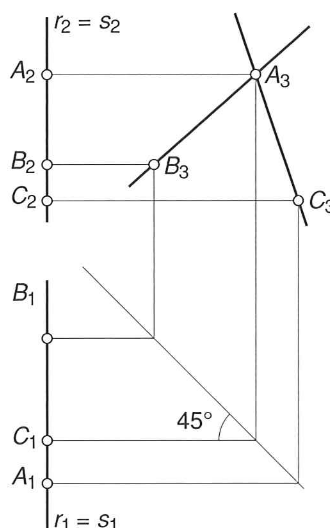


Fig. 7.88. *Plano de perfil dadas dos rectas r y s que se cortan.*

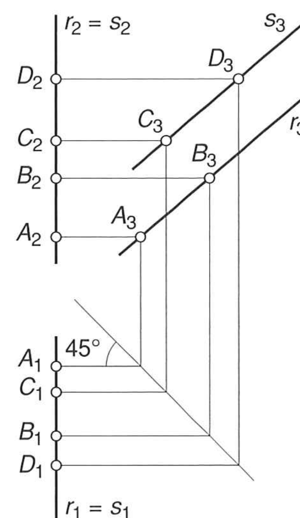


Fig. 7.89. *Plano de perfil dadas dos rectas r y s paralelas.*

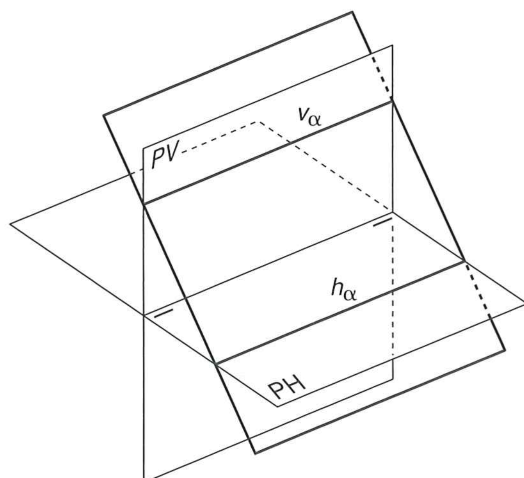
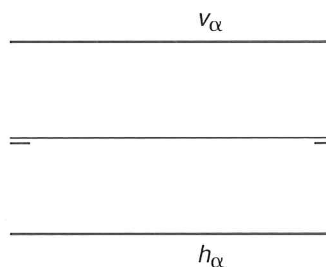
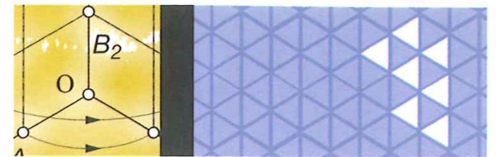


Fig. 7.90. *Plano paralelo a la línea de tierra.*



Plano paralelo a la línea de tierra

Es un plano que tiene sus dos trazas paralelas a la *LT* (Fig. 7.90).



Plano paralelo a la línea de tierra (método directo)

Este plano se proyecta de perfil según una línea que define los ángulos que forma con los planos de proyección, y al ser perpendicular al citado plano de perfil todos sus elementos se proyectan sobre ella (Fig. 7.91).

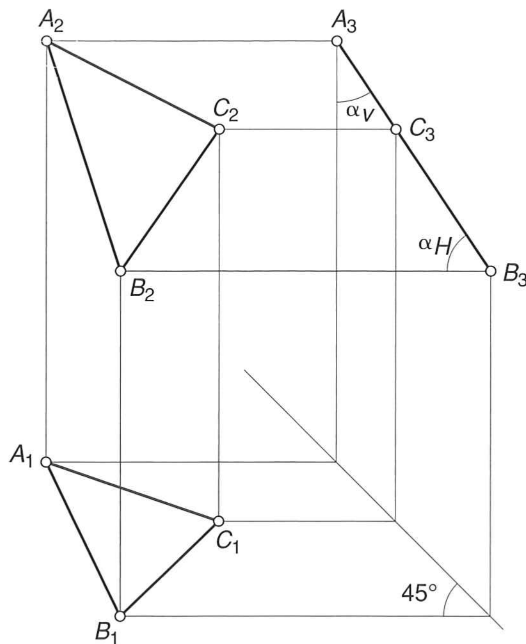


Fig. 7.91. *Plano paralelo a la LT dado por tres puntos, método directo.*

Plano oblicuo dado por tres puntos A, B y C no alineados (método directo)

La Figura 7.93 recoge la solución al problema planteado.

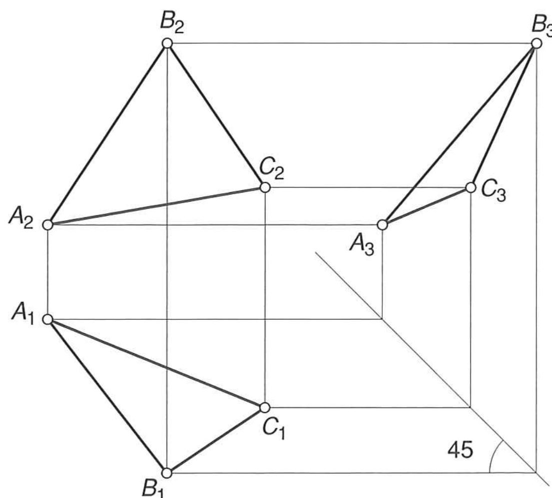


Fig. 7.93. *Plano oblicuo dado por tres puntos no alineados, método directo.*

Plano oblicuo

Es el que tiene sus trazas oblicuas a la *LT*, por ser un plano oblicuo a ambos planos de proyección (Fig. 7.92).

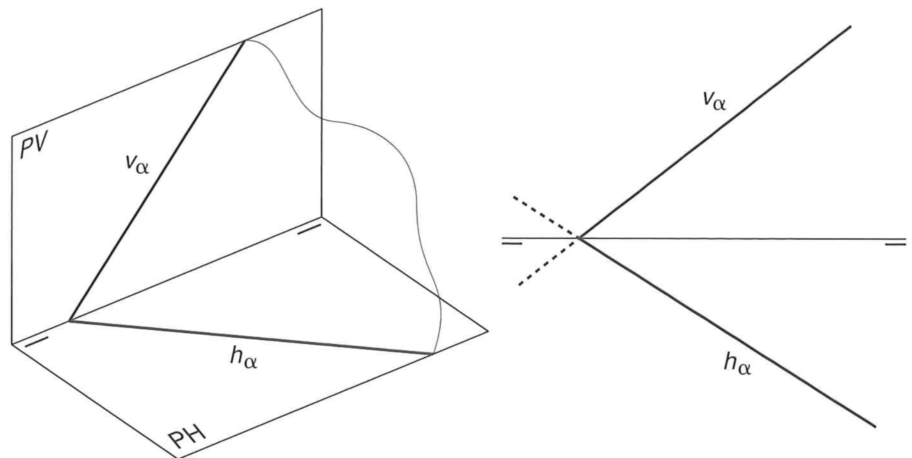


Fig. 7.92. *Plano oblicuo.*

Plano perpendicular al primer bisector

Este plano tiene sus trazas simétricas respecto a la *LT*, y ambas forman el mismo ángulo con la *LT*.

El triángulo *ABC* es isósceles por ser el segmento *CB* perpendicular, y de perfil al primer bisector. Por tanto, los ángulos *CAL* y *BAL* son iguales. Al realizar el abatimiento del *PH* sobre el vertical, las trazas v_α y h_α aparecen simétricas respecto de la *LT* (Fig. 7.94).

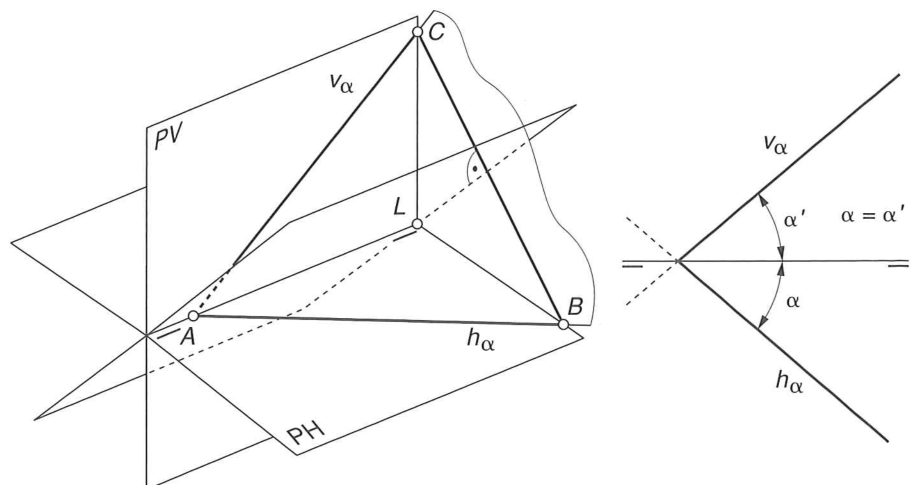
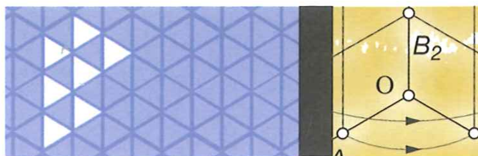
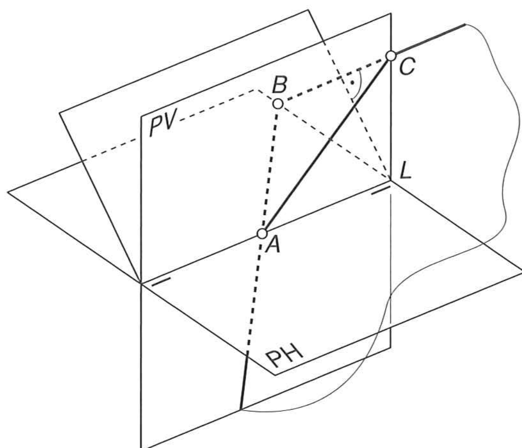


Fig. 7.94. *Plano perpendicular al primer bisector.*





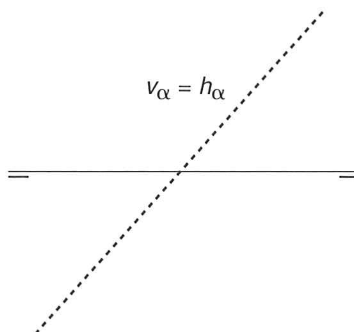
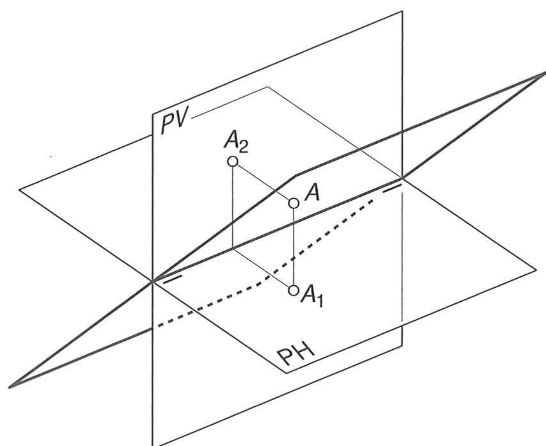


Fig. 7.95. *Plano perpendicular al segundo bisector.*

Plano perpendicular al segundo bisector

Si se repite el mismo razonamiento para el triángulo *ABC,* perpendicular al segundo bisector, se comprueba que cualquier plano perpendicular a éste tiene sus trazas confundidas, es decir, en prolongación (fig. 7.95).



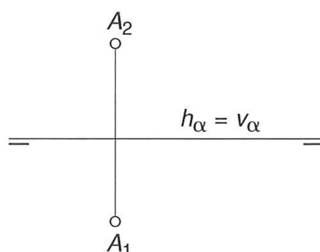


Fig. 7.96. *Plano línea de tierra punto.*

Plano línea de tierra punto, o que pasa por la línea de tierra

Es el único caso donde un plano no queda definido por sus trazas, dado que ambas están situadas en la *LT*. Para determinarlo hay que situar un punto cualquiera de él como apoyo. Por tanto, el plano vendrá dado por las trazas situadas en la *LT* y un punto del mismo (Fig. 7.96).

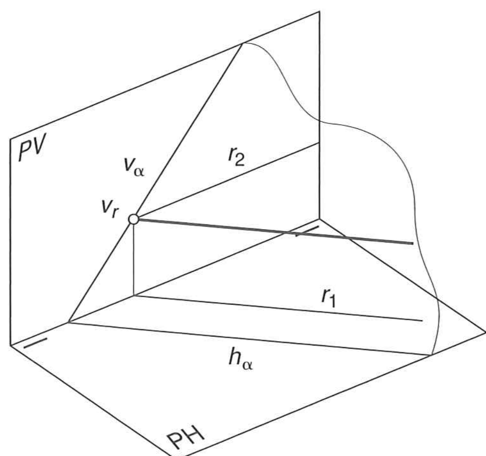
D. Rectas notables del plano

Un plano contiene infinitas rectas, de las que algunas van a ser útiles para resolver problemas de diversa índole; por eso se denominan rectas notables del plano. Son las siguientes:

Rectas horizontales, rectas frontales, rectas de máxima pendiente, rectas de máxima inclinación.

Rectas horizontales

Son rectas horizontales de un plano α las que, perteneciendo a él, tienen su proyección horizontal r_1 paralela a la traza $h\alpha$ del mismo, y la vertical, lógicamente, paralela a la *LT*. La representación horizontal de este tipo de rectas está en verdadera magnitud (Fig. 7.97).



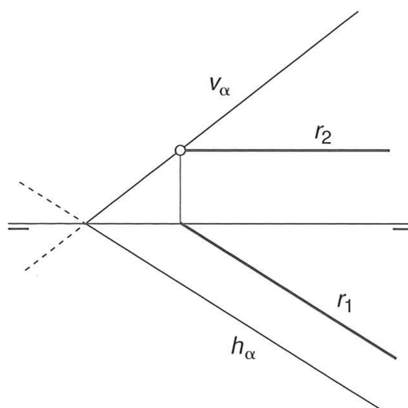


Fig. 7.97. *Recta horizontal.*



Rectas horizontales, método directo

En la Figura 7.98 se recoge la solución al problema planteado.

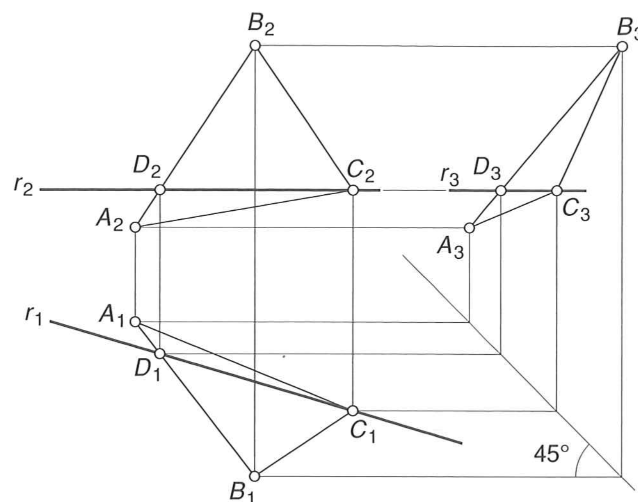
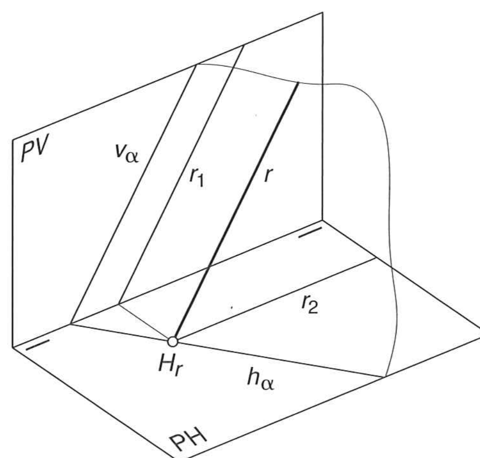


Fig. 7.98. *Recta horizontal, método directo.*

Rectas frontales

Se denominan rectas frontales de un plano α a las que, perteneciendo a él, tienen su proyección vertical r_2 paralela a la traza v_α del mismo, y la horizontal paralela a la *LT*. La representación vertical de este tipo de rectas está en verdadera magnitud (Fig. 7.99).



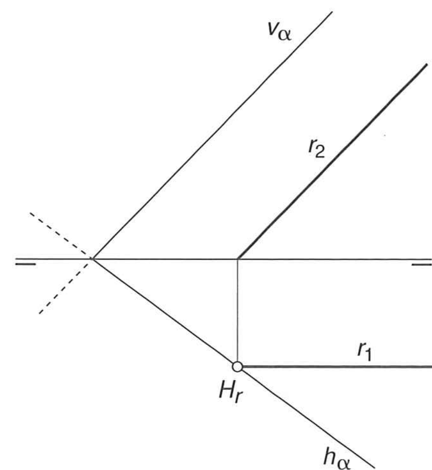


Fig. 7.99. *Recta frontal.*

Rectas frontales, método directo

La Figura 7.100 recoge la solución al problema que se propone.

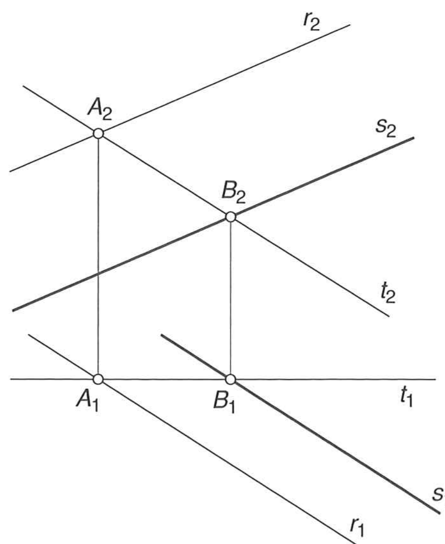
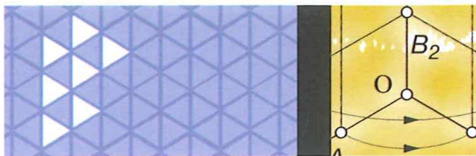


Fig. 7.100. *Recta frontal, método directo.*



Rectas de máxima pendiente

Se llaman rectas de máxima pendiente de un plano α a aquellas que, perteneciendo a él, son perpendiculares a su traza horizontal h_α; por tanto, r_1 es perpendicular a h_α (Fig. 7.101).

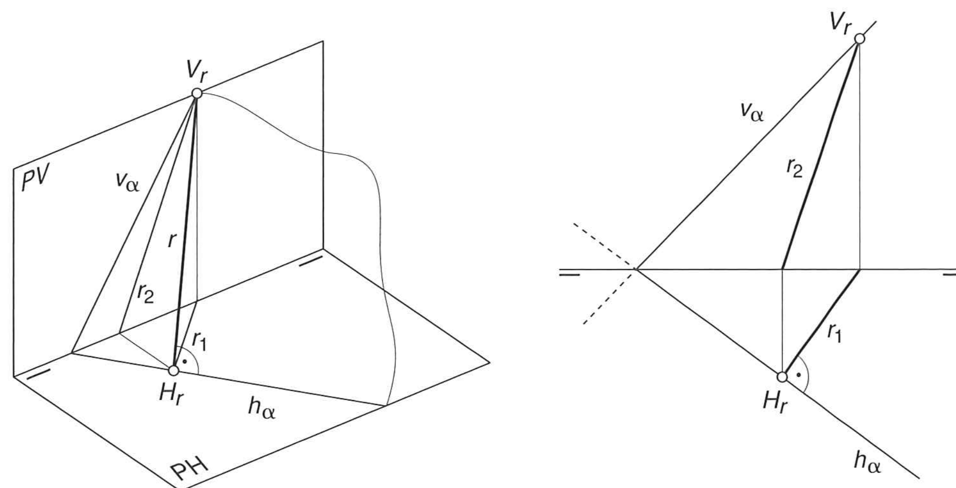


Fig. 7.101. *Recta de máxima pendiente.*

Rectas de máxima pendiente (método directo)

Para trazar con este método una recta de máxima pendiente hay que situar primero una recta horizontal del plano para posibilitar la condición de perpendicularidad.

En la Figura 7.102 se muestra cómo hallar la recta de máxima pendiente del plano definido por tres puntos (*A*, *B*, *C*).

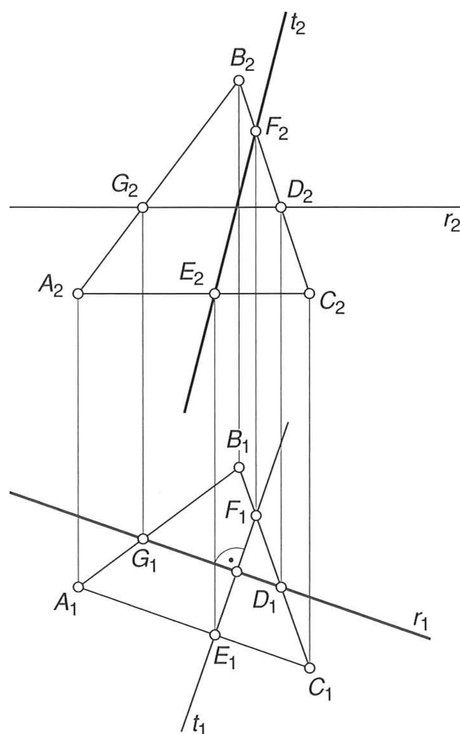


Fig. 7.102. *Recta de máxima pendiente de un plano definido por tres puntos, método directo.*



Rectas de máxima inclinación

Se denominan rectas de máxima inclinación de un plano α a las rectas que, perteneciendo a él, son perpendiculares a su traza $v\alpha$, por lo que r_2 es perpendicular a dicha traza (Fig. 7.103).

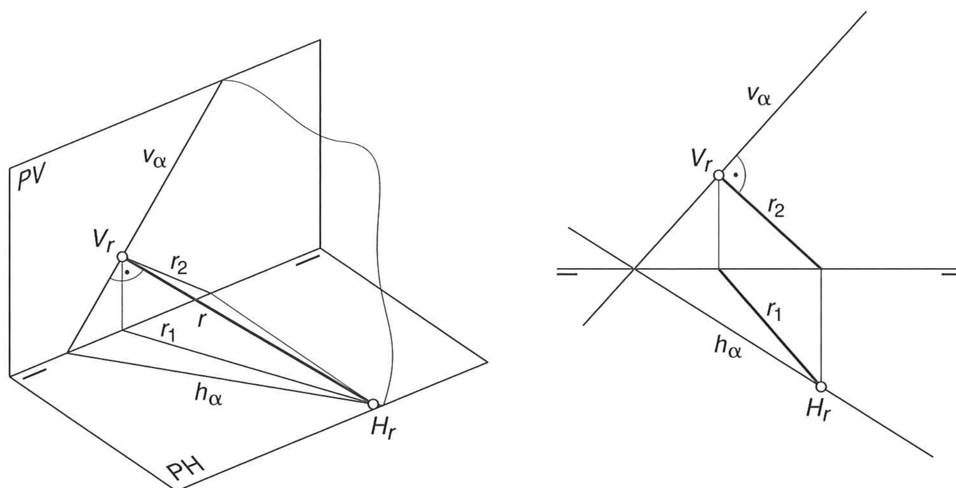


Fig. 7.103. *Recta de máxima inclinación.*

Rectas de máxima inclinación (método directo)

En este caso hay que situar primero una recta frontal del plano para posibilitar la condición de perpendicularidad. Para desarrollar este ejercicio (Fig. 7.104) también se ha tomado un plano definido por tres puntos (A, B, C).

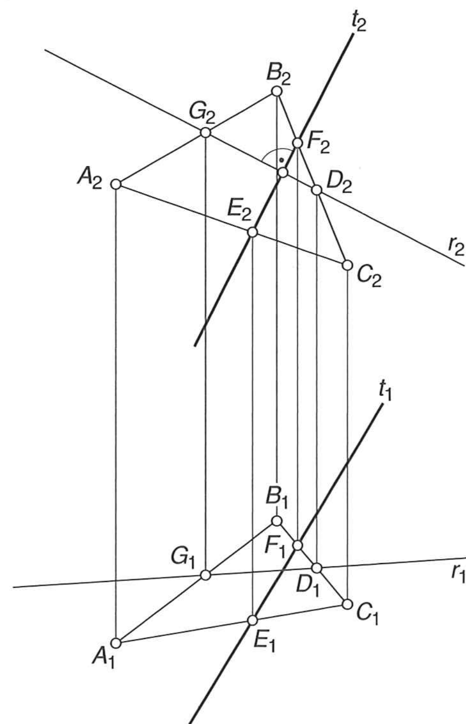
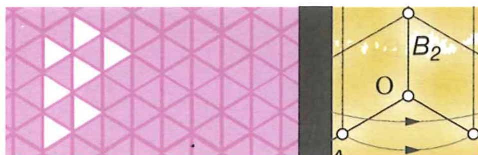


Fig. 7.104. *Recta de máxima inclinación por el método directo.*



7. Sistemas de representación. Sistema diédrico ortogonal

Actividades del sistema diédrico ortogonal y el método directo

Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. Señala qué es y qué posibilita la geometría descriptiva.
2. Define el concepto de proyección y comenta los tipos de proyección que has estudiado.
3. ¿A qué se le denomina sistema de representación?
4. Explica los fundamentos del sistema diédrico, y en qué se diferencia este sistema del método directo.
5. En qué cuadrantes están situados los siguientes puntos:

   A (−3, −3, −2); *B* (7, −1, 5); *C* (0, 5, −4); *D* (5, 0, 0); *E* (−4, 5, 3).
6. En el sistema diédrico directo o método directo, qué significa: desviación, alejamiento relativo, cota relativa.
7. ¿Qué son puntos traza de una recta? ¿Cuántos puede tener como máximo?
8. ¿Qué posición tiene una recta horizontal de plano en un plano línea de tierra punto? Y dada una recta de punta, ¿qué características tienen en común todos los planos que la contienen?
9. Para situar una recta de máxima pendiente en un plano dado en el sistema diédrico directo, ¿qué pasos hay que dar?
10. Para que un punto este dentro de un plano, ¿qué tiene que verificarse?

Ejercicios

Sobre papel blanco formato A4 dibuja a lápiz los siguientes ejercicios, teniendo en cuenta que la unidad de medida es el milímetro:

1. Dibuja las siguientes rectas en el sistema diédrico con partes vistas y ocultas, explicando todas sus particularidades, y posteriormente en el método directo:

   r (*A* (30, 40, 40) *B* (−30, 40, 40);

   s (*A* (30, 30, 0) *B* (−30, 0, 40);

   t (*A* (30, 30, −40) *B* (30, −40, 30).
2. Por el punto *A* (−40, 30, 50) se pide trazar, en sistema diédrico y en método directo:

   a) Una recta horizontal.

   b) Una recta frontal.

   c) Una recta de punta.
3. Halla la posición y la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos *A* (10, 30, −30) y *B* (4, 3, 3).
4. Dibuja una recta horizontal de un plano frontal, y traza en ella un segmento de 60 mm.
5. Halla las trazas en el sistema diédrico y en el método directo de un plano definido de las formas siguientes:

   a) Por una recta horizontal y un punto exterior a ella.

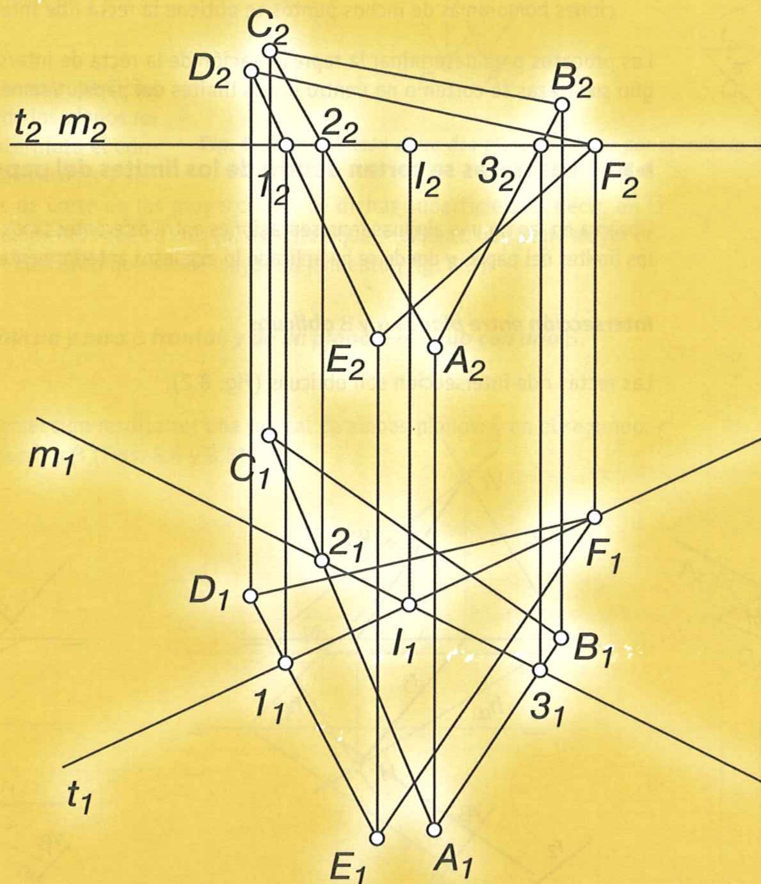
   b) Por una recta frontal y un punto exterior a ella.

   c) Por una recta de perfil y un punto exterior a ella.

   d) Por dos rectas que se cortan, de las que no se pueden hallar sus trazas.
6. Halla el plano que contiene los siguientes puntos: *A* (−3, 1, 5); *B* (0, 3, 2); *C* (3, 5, 3).
7. En el sistema diédrico sitúa en un plano oblicuo un punto de 30 mm de cota.
8. En el sistema diédrico y en el método directo, sitúa en un plano oblicuo una recta de máxima pendiente y otra horizontal.
9. En el sistema diédrico y en el método directo, sitúa en un plano vertical una recta de máxima inclinación y otra vertical.

08

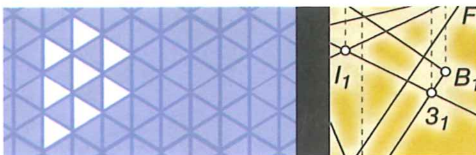
Sistema diédrico ortogonal (II). Método directo (II)



Todos los sistemas de representación de los que se ocupa la geometría descriptiva se basan en métodos y teoremas que presentan las formas geométricas de figuras de dos o tres dimensiones sobre un soporte plano, denominado plano del cuadro.

Estos sistemas se fundamentan en el concepto de proyección. En este capítulo vamos a continuar estudiando el sistema diédrico ortogonal, desde una visión clásica, y el denominado "método directo" que es igual pero sin línea de tierra.

Los contenidos que se desarrollan giran en torno a intersecciones, paralelismo, perpendicularidad, distancias y ángulos.



8.1. Intersecciones

A. Intersecciones de planos: método general

La intersección de dos planos es una recta r. Para su determinación se opera del modo siguiente:

1. Dados los planos α y β, se cortan por un plano auxiliar π cuyas intersecciones con ambos sean fáciles de realizar, por ejemplo, *s* y *t;* el punto *A* de corte de las citadas intersecciones corresponderá a la recta *r* de intersección entre α y β.
2. Esta operación se repite tomando otro plano auxiliar π' para situar otro punto *B*, que unido con *A* determina la recta de intersección *r* buscada entre los planos propuestos, α y β.
3. Si consideramos como planos auxiliares los de proyección, éstos cortan a los propuestos en sus propias trazas. Por tanto, las intersecciones de las trazas h_α y h_β proporcionan el punto *Hr* de la recta *r* de intersección, y de igual modo las trazas v_α y v_β determinan al punto *Vr*. Uniendo las representaciones homónimas de dichos puntos se obtiene la recta *r* de intersección buscada (Fig. 8.1).

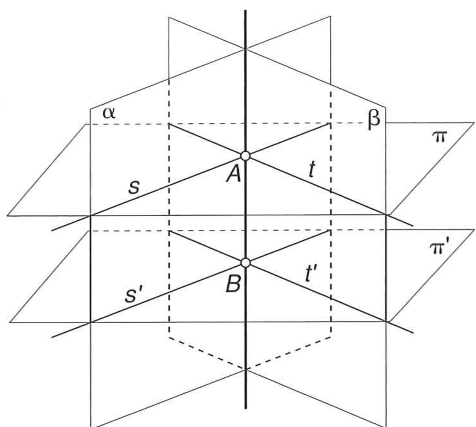
Los procesos para determinar la representación de la recta de intersección entre dos planos varían según sus trazas se corten o no dentro de los límites del papel. Veamos los dos casos:

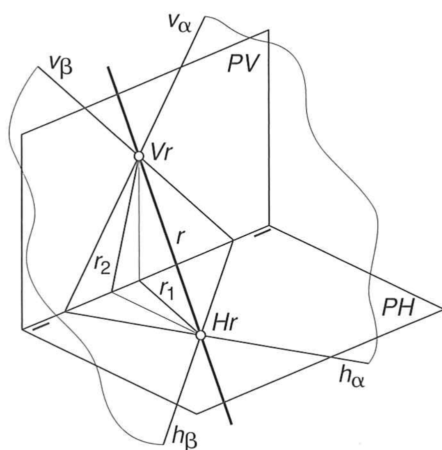
Las trazas se cortan dentro de los límites del papel

Observa en las figuras algunas representaciones entre diferentes tipos de planos cuyas trazas se cortan en los límites del papel, y donde se ha aplicado lo expuesto anteriormente para hallar la recta de intersección.

Intersección entre planos α y β oblicuos

Las rectas *r* de intersección son oblicuas (Fig. 8.2).





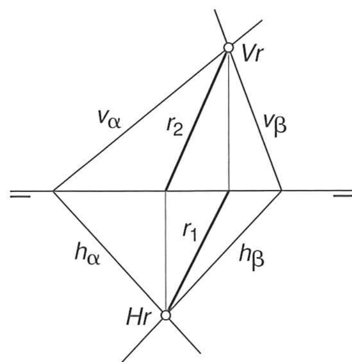
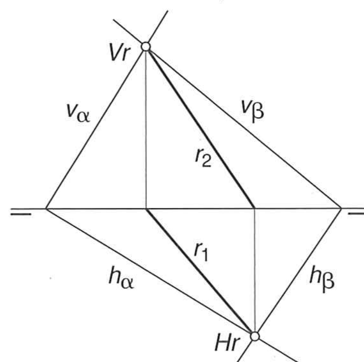
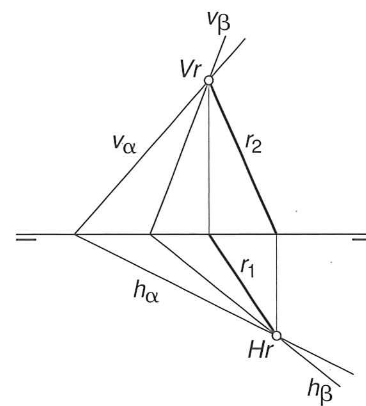
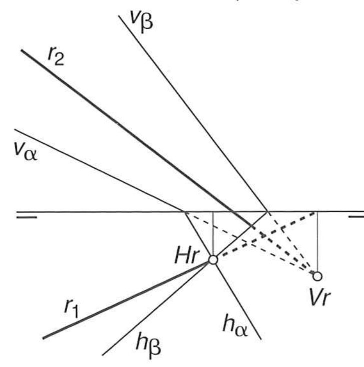


Fig. 8.1. *Intersecciones de planos, método general.*







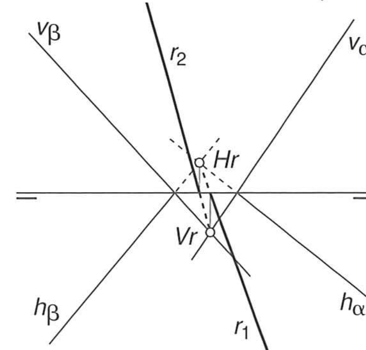


Fig. 8.2. *Diversas formas de intersección entre planos oblicuos.*

Intersección entre dos planos oblicuos: ABC *y* DEF *(método directo)*

La recta *r* de intersección de los planos se halla utilizando dos planos horizontales auxiliares. La recta horizontal *t* es la intersección de uno de los planos auxiliares con el plano *ABC*. El plano *DEF* se corta con el otro plano auxiliar en la recta *m;* donde las proyecciones t_1 y m_1 se cortan se obtiene el punto I_1, desde este punto se proyecta sobre t_2 y m_2 obteniendo así I_2.

Del mismo modo se hallan *P* y *Q* de los planos dados con el otro auxiliar, determinándose el punto *J*.

Uniendo las proyecciones homónimas de *I* y *J* se obtiene la recta *r* buscada.

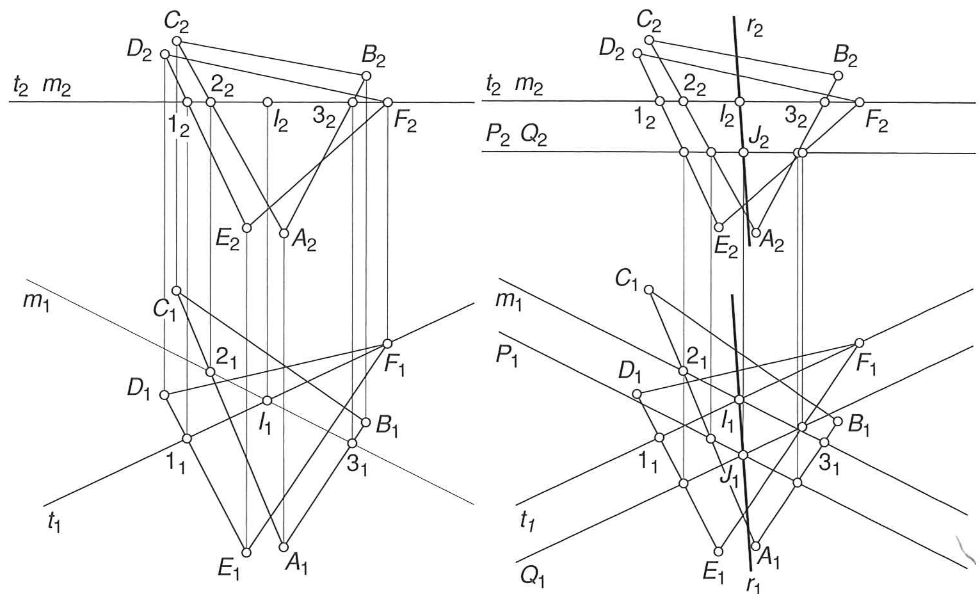


Fig. 8.3. *Intersección entre dos planos oblicuos por el método directo.*

Cuando se representan en este sistema superficies planas limitadas, como es el caso de los planos representados por triángulos, se interpreta el conjunto del plano teniendo en cuenta las cotas y alejamientos relativos de los puntos de corte en las proyecciones de dichas superficies. Es decir, en la representación horizontal, de dos elementos que se cruzan, es visto aquel elemento que tiene mayor cota, y en representación vertical, el elemento que posee mayor alejamiento (Fig. 8.3).

Intersección entre un plano α *oblicuo y otro* β *frontal, y de un plano* α *oblicuo con uno* β *horizontal*

En el primer caso la recta *r* de intersección resulta ser una frontal de ambos planos; y en el segundo, *r* es horizontal, también de los planos α y β (Figs. 8.4 y 8.5).

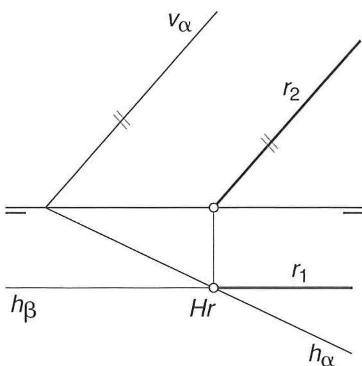


Fig. 8.4. *Intersección entre un plano oblicuo y un plano frontal.*

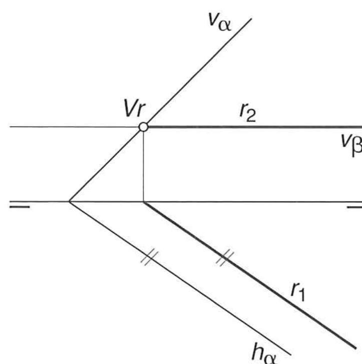


Fig. 8.5. *Intersección entre un plano oblicuo y un plano ~~vertical~~* horizontal

Intersección entre un plano DEF *oblicuo y otro* ABC *frontal (método directo)*

Dado el plano *ABC*, paralelo al *PV*, la proyección r_1 de la recta de intersección coincide con la proyección horizontal del plano, y la proyección r_2 se determina por la pertenencia que la recta *r* tiene al plano DEF. Por tanto, la intersección de las dos superficies triangulares es el segmento *IJ* (Fig. 8.6).

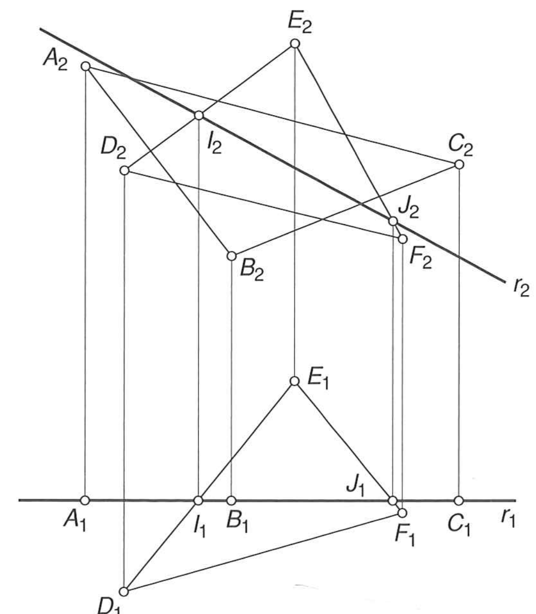


Fig. 8.6. *Intersección entre un plano oblicuo y un plano frontal, método directo.*



Intersección entre un plano DEF oblicuo y uno ABC horizontal (método directo)

En este caso se opera de manera parecida al anteriormente expuesto: dado el plano *ABC*, paralelo al *PH*, la proyección r_2 de la recta de intersección coincide con la proyección vertical del plano, y la proyección r_1, se obtiene por la pertenencia que ésta tiene al plano *DEF*. Por tanto, la intersección de las dos superficies triangulares es el segmento *IJ* (Fig. 8.7).

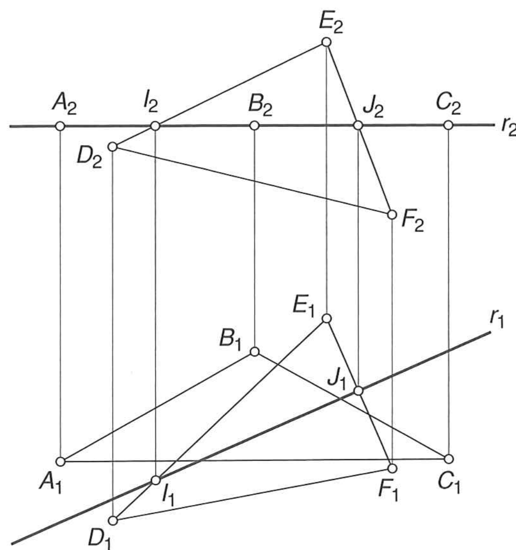


Fig. 8.7. *Intersección entre un plano oblicuo y un plano horizontal, método directo.*

Intersección entre un plano α vertical y otro β de canto

La recta *r* de intersección es oblicua y sus proyecciones coinciden con las trazas del plano (Fig. 8.8).

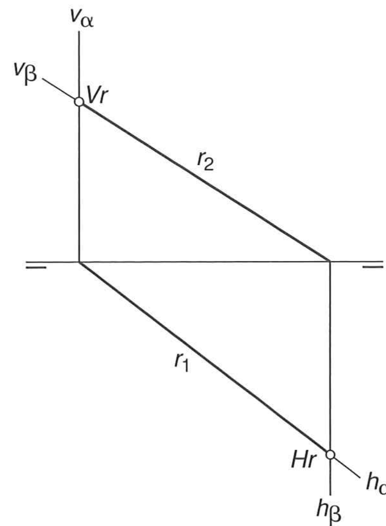


Fig. 8.8. *Intersección entre un plano vertical con otro de canto.*

Intersección entre un plano DEF vertical y otro ABC de canto (método directo)

Los planos dados son perpendiculares a los planos de proyección, por tanto, las proyecciones de la recta *r* de intersección coincidirán con las representaciones de ellos en el plano de proyección al que sean perpendiculares.

Es decir en el plano *DEF*, vertical, la proyección r_1 de la recta de intersección coincide con la proyección horizontal del plano, y la r_2 coincide con la proyección vertical del plano de canto *ABC* (Fig. 8.9).

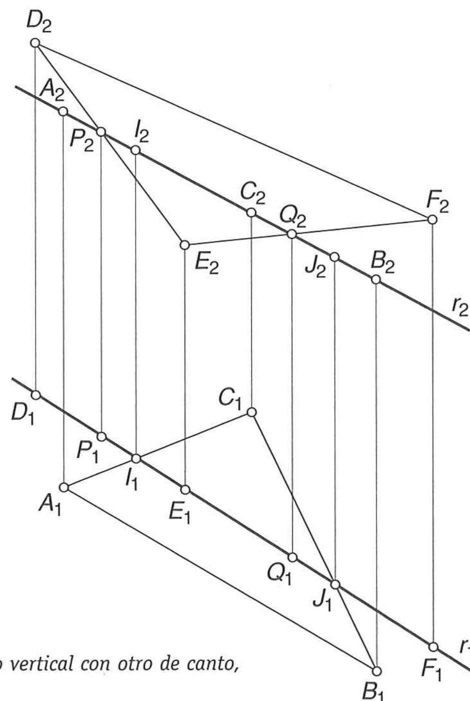


Fig. 8.9. *Intersección entre un plano vertical con otro de canto, método directo.*

Intersección entre un plano α oblicuo y otro β de canto

La recta *r* de intersección es oblicua, coincidiendo la representación r_2 con la traza vertical del plano de canto (Fig. 8.10).

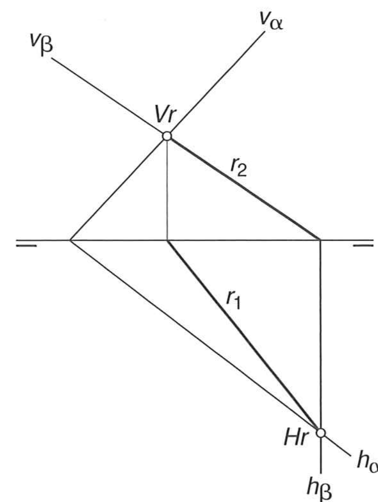


Fig. 8.10. *Intersección entre un plano oblicuo y otro de canto.*



Intersección entre un plano DEF *oblicuo y otro* ABC *de canto (método directo)*

En este caso, al ser el plano *ABC* perpendicular al *PV*, como se ha expuesto anteriormente, la representación r_2 de la recta de intersección coincide con la representación vertical del plano de canto. La representación r_1 se determina de manera análoga a los casos anteriores (Fig. 8.11).

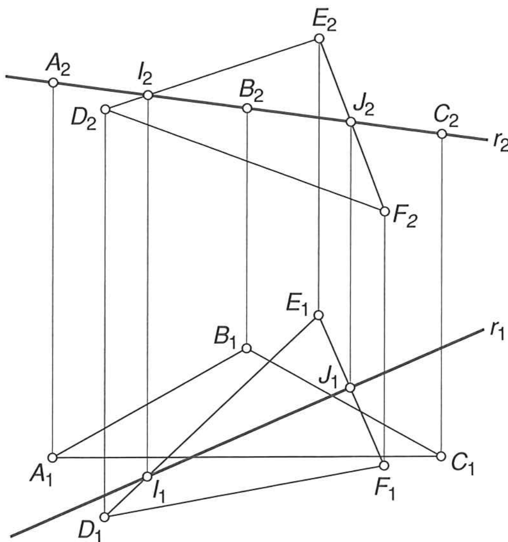


Fig. 8.11. *Intersección entre un plano oblicuo y otro de canto, método directo.*

Intersección entre un plano α *oblicuo y otro* β *vertical*

La recta *r* de intersección es oblicua, coincidiendo la representación r_1 con la traza horizontal del plano vertical (Fig. 8.12).

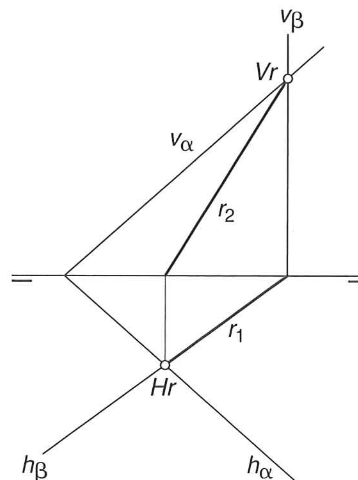


Fig. 8.12. *Intersección entre un plano oblicuo y otro vertical.*

Intersección entre un plano DEF *oblicuo y otro* ABC *vertical (método directo)*

Dado que el plano *ABC* es perpendicular al *PH*, la representación r_1 de la recta de intersección coincide con la representación horizontal del plano vertical. La representación r_2 se obtiene de manera análoga a los casos anteriores (Fig. 8.13).

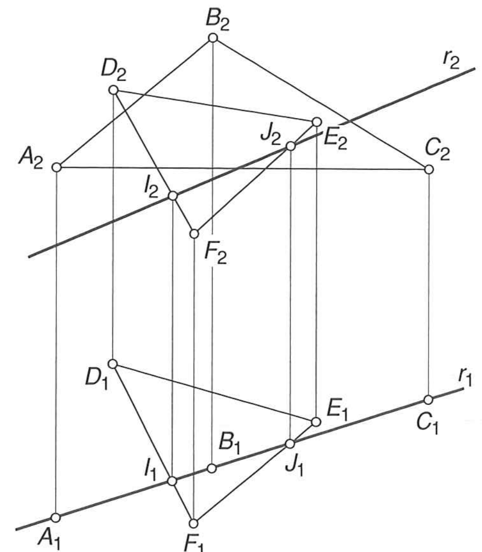


Fig. 8.13. *Intersección entre un plano oblicuo y otro vertical, método directo.*

Intersección entre un plano α *paralelo a la* LT *y otro oblicuo* β

En este caso la recta r de intersección es oblicua (Fig. 8.14).

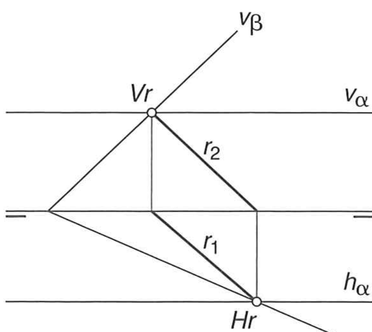
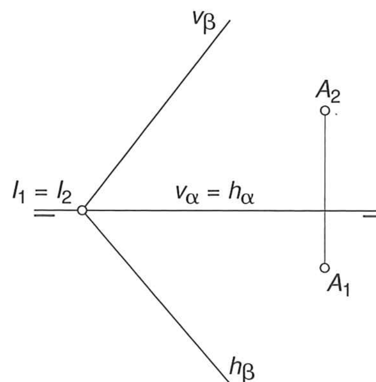


Fig. 8.14. *Intersección entre un plano paralelo a la LT y otro oblicuo.*

Intersección entre un plano α *línea de tierra punto y otro plano* β *oblicuo*

1. El punto $I_1 - I_2$ en que el plano β corta a la *LT* está en la recta de intersección, de ahí que baste con trazar un plano auxiliar π, horizontal, que contenga al punto $A_1 - A_2$ del plano α , y se determina el punto $B_1 - B_2$, corte de las dos rectas de intersección entre los planos π y α, recta *t;* y π y β, recta *m*.

2. Uniendo las proyecciones homónimas de los puntos *I* y *B* se obtiene la recta *r* solución (Fig. 8.15).



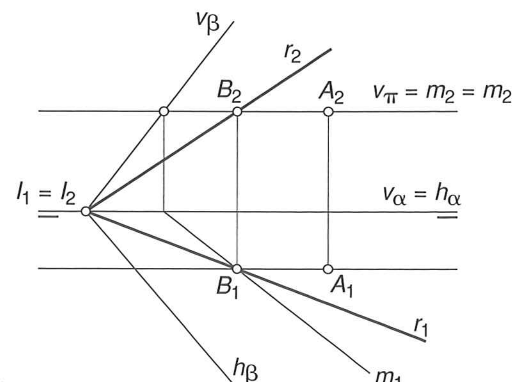


Fig. 8.15. *Intersección entre un plano línea de tierra punto y otro oblicuo.*

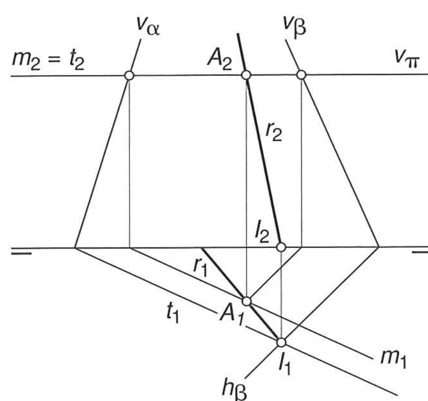


▶▶▶ Las trazas horizontales o verticales se cortan fuera de los límites del dibujo

En estos casos particulares en que sólo se puede hallar un punto de la recta de intersección prolongando las trazas horizontales o verticales de los planos dados α y β, para obtener otro, necesario para dar solución al problema, se tomará un plano auxiliar de apoyo, paralelo a uno de los planos de proyección.

1. Observa el proceso seguido en la Figura 8.16, donde se ha utilizado un plano auxiliar π paralelo al plano horizontal de proyección, y un π' paralelo al vertical de proyección, en la citada figura se determinan los puntos A_1 - A_2 y B_1 - B_2 , respectivamente, según sean las trazas que no se cortan en los límites del dibujo.

2. Uniendo estos puntos con los anteriores se determinan al cortarse las mencionadas trazas de los planos I_1 - I_2 y J_1 - J_2 se obtienen las rectas *r* y *r'* de intersección buscadas (Fig. 8.16).



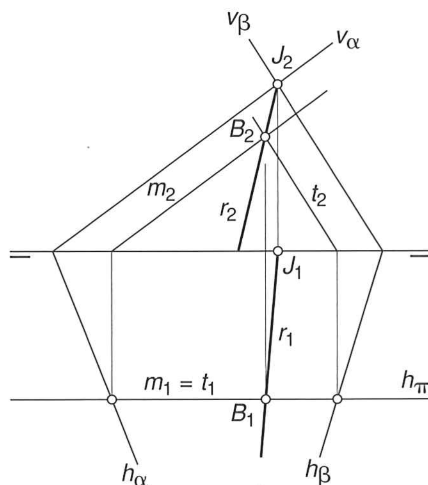


Fig. 8.16. *Dos casos en los que las trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.*

3. Si los planos que se cortan tienen sus trazas verticales o las horizontales paralelas, la recta de intersección es paralela a ellas. Por tanto, serán una vertical u horizontal de los dos planos respectivamente (Fig. 8.17).

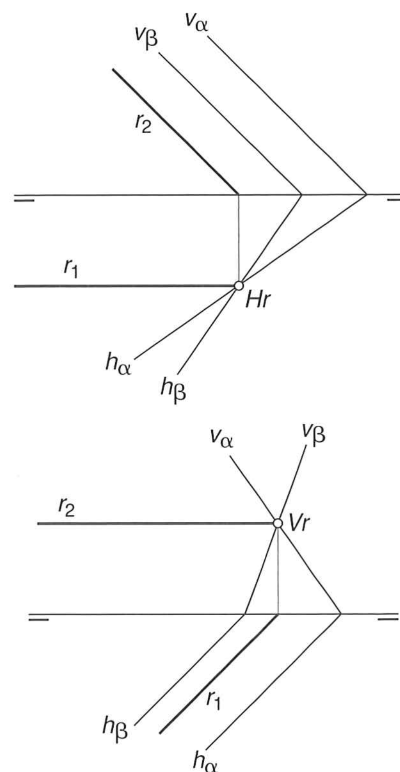


Fig. 8.17. *Dos casos en los que las trazas son paralelas.*

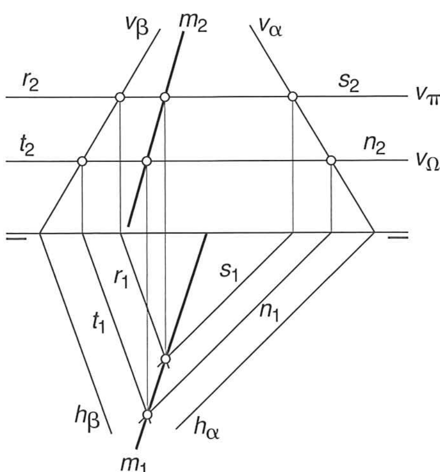
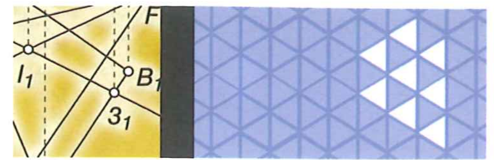


Fig. 8.18. *Ni las trazas horizontales ni las verticales se cortan en los límites del dibujo.*

▶▶▶ Ni las trazas horizontales ni las verticales se cortan en los límites del dibujo

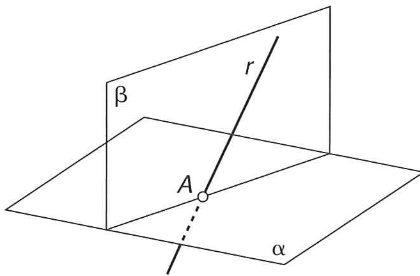
En este caso, donde ninguna de las trazas de los planos se cortan dentro de los límites del dibujo, se actúa del modo siguiente: se cortan simultáneamente, los dos planos α y β dados por medio de otros dos planos horizontales π y Ω auxiliares, que al interseccionar a los propuestos mediante horizontales de los planos determinan los puntos A_1 - A_2, y B_1 - B_2, que corresponden a la recta de intersección de los planos dados (Fig. 8.18).

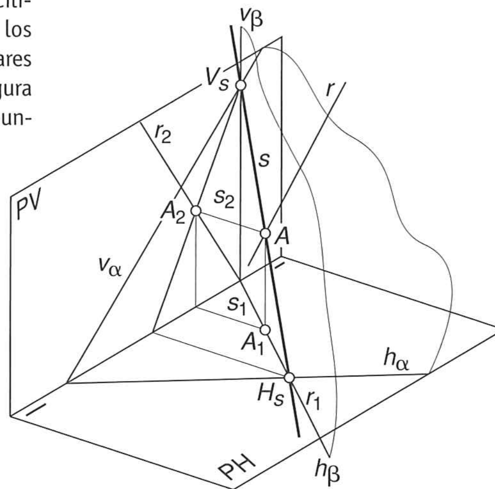


B. Intersección de recta con plano

La intersección de una recta *r* con el plano α es un punto *A*; para hallarlo se ha de tomar un plano auxiliar β que contenga a la recta. La intersección de α con β será una recta *s* que corta a la dada en el punto *A*; este punto es la solución del problema.

Los planos auxiliares más recomendables, por la facilidad que dan para situar la recta dada en ellos, son los llamados planos proyectantes, es decir, perpendiculares a uno de los planos de proyección. Observa en la Figura 8.19 las construcciones desarrolladas para hallar el punto *A* de intersección de la recta *r* con el plano α.





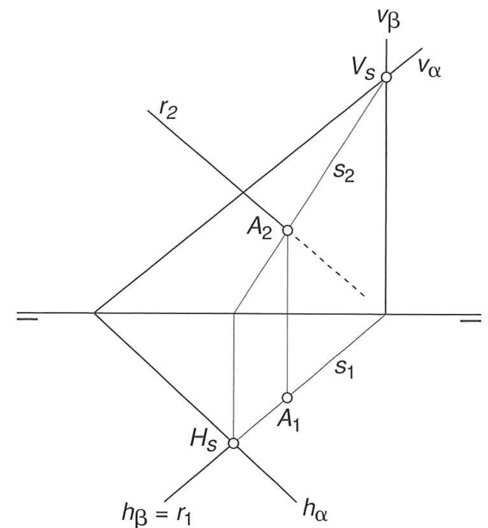


Fig. 8.19. *Intersección de recta con plano.*

Intersección de la recta *r* con el plano *ABC* (método directo)

Se opera de igual modo que en el sistema diédrico tradicional; se toma un plano auxiliar perpendicular a uno de los planos de proyección que contenga a la recta *r* dada –en esta ocasión se ha tomado un plano α proyectante horizontal–, se halla la recta s de intersección, y donde esta corte a *r* se obtiene el punto *P*, punto de intersección de la recta *r* con el plano *ABC* (Fig. 8.20).

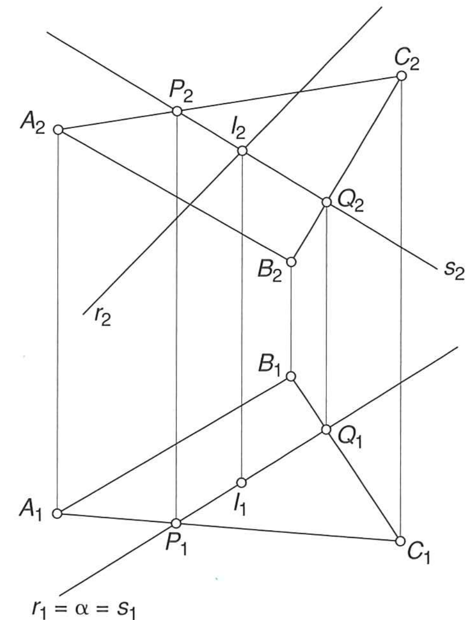


Fig. 8.20. *Intersección de una recta con un plano, método directo.*

Intersección de una recta *r* con un plano α oblicuo

En las Figuras 8.21 y 8.22 se puede apreciar cómo se resuelven algunos casos de intersección de una recta *r* dada con un plano α. Se han utilizado como planos auxiliares los proyectantes de la recta sobre el horizontal o el vertical de proyección respectivamente, es decir, planos verticales o de canto.

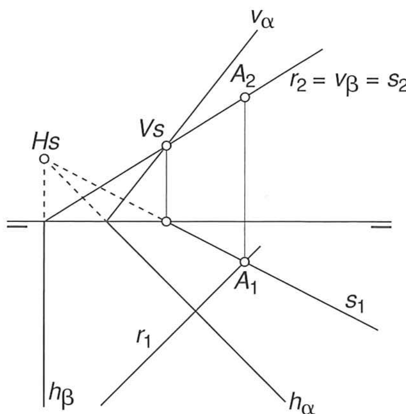


Fig. 8.21. *Intersección de una recta con un plano oblicuo. Plano auxiliar: plano proyectante del vertical, o plano de canto.*

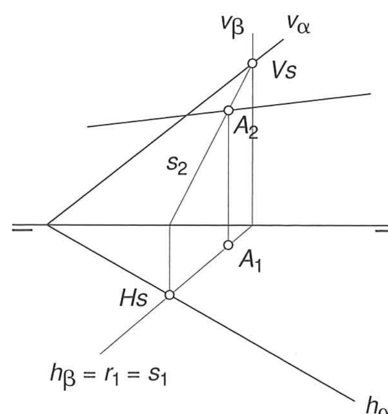


Fig. 8.22. *Intersección de una recta con un plano oblicuo. Plano auxiliar: plano proyectante del horizontal, o plano vertical.*

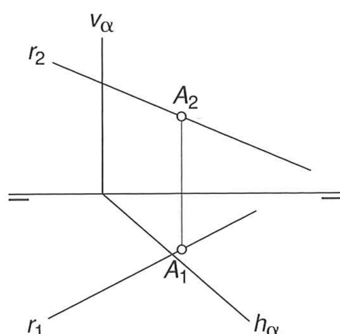


Fig. 8.23. *Intersección de una recta con un plano vertical.*

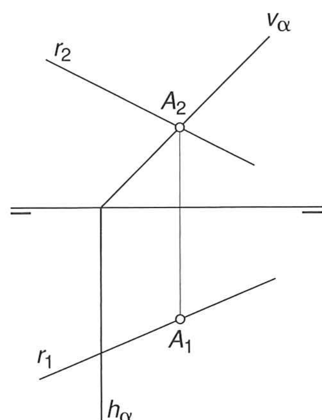


Fig. 8.24. *Intersección de una recta con un plano de canto.*

▶▶▶ Intersección de una recta *r* con un plano α proyectante del horizontal, o plano vertical

Donde la representación r_1 de la recta dada corta a h_α se encuentra A_1, proyección horizontal del punto de intersección de *r* con α. Proyectando ortogonalmente desde A_1 a r_2 se determinará A_2 (Fig. 8.23).

▶▶▶ Intersección de una recta *r* con un plano α proyectante del vertical, o plano de canto

De manera análoga, si el plano es proyectante del vertical se emplea un razonamiento similar al anterior. Donde la representación r_2 de la recta corta a v_α se halla A_2; proyectando desde este punto a r_1 se determina A_1, con lo que queda definido el punto de intersección de la recta *r* con el plano buscado (Fig. 8.24).

▶▶▶ Casos particulares:

***Intersección de una recta* r *vertical con un plano* α*. Intersección de una recta* s *de punta con un plano* β**

En el primer caso (Fig. 8.25), se ha utilizado un plano auxiliar π paralelo al *PV,* y en el segundo (Fig. 26), uno paralelo al *PH*, Ω. En ambos casos, el punto de intersección buscado se determina mediante la aplicación de los procedimientos expuestos anteriormente.

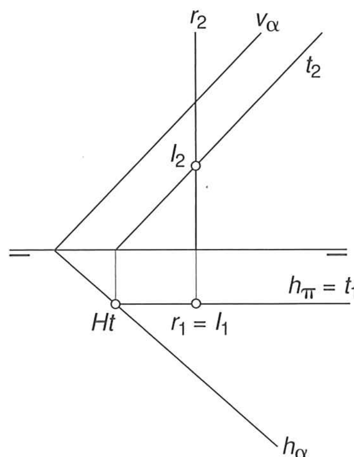


Fig. 8.25. *Intersección de una recta vertical con un plano.*

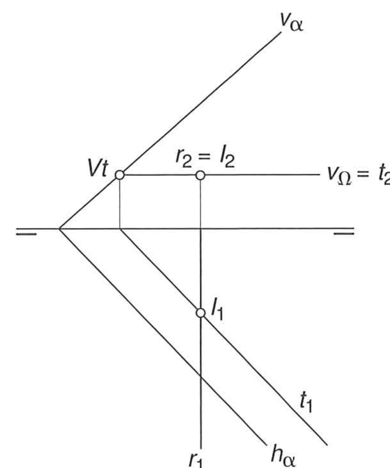


Fig. 8.26. *Intersección de una recta de punta con un plano.*

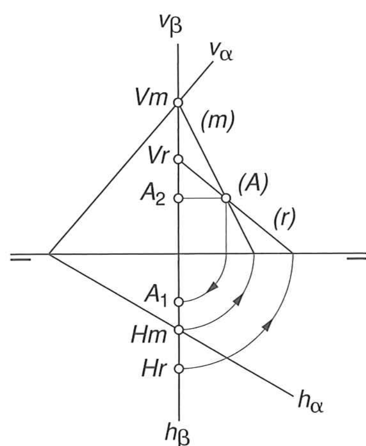


Fig. 8.27. *Intersección de una recta de perfil con un plano.*

▶▶▶ Intersección de una recta de perfil *r* con un plano *V*

Dada la recta $r_1 - r_2$ cuyas trazas son *Vr* y *Hr* y el plano α, el plano auxiliar que se utiliza para contener a este tipo de rectas es el de perfil; por ejemplo β, que contiene a la recta *r*. Como ya es sabido, este plano corta a α según una recta de perfil *m*.

Estas rectas *m* y *r* se abaten, y donde ambas se corten estará el punto *A* de intersección. Desabatiéndolo a su plano, quedarán determinadas sus proyecciones $A_1 - A_2$. (Fig. 8.27)



8.2. Paralelismo

A. Paralelismo entre rectas

Como ya se expuso anteriormente en el apartado dedicado a «Posiciones relativas de dos rectas», dos rectas son paralelas cuando tienen sus proyecciones homónimas paralelas entre sí.

Inversamente, podemos decir que si las proyecciones homónimas de dos rectas son paralelas, las rectas en el espacio también lo son (Fig. 8.28). Como excepción a esta regla están las rectas de perfil que, aun teniendo sus proyecciones paralelas, pueden ser o no paralelas en el espacio.

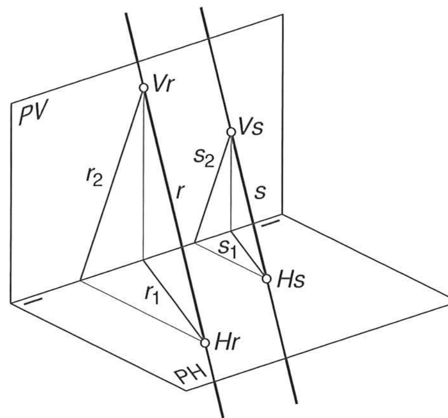


Fig. 8.28. *Dos rectas paralelas y unas proyecciones en sistema diédrico.*

Para comprobar que las rectas *r* y *s* de perfil son paralelas es necesario abatirlas sobre un plano α auxiliar de perfil, para hallar sus trazas y observar si sus representaciones (*r*) y (*s*), abatidas, son o no paralelas. Observa en las Figuras 8.29 y 8.30 un caso con rectas paralelas y otro en que no lo son.

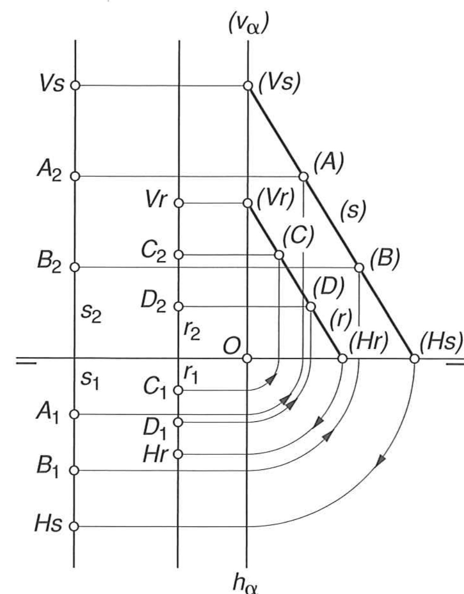


Fig. 8.29. *Dos rectas de perfil paralelas.*

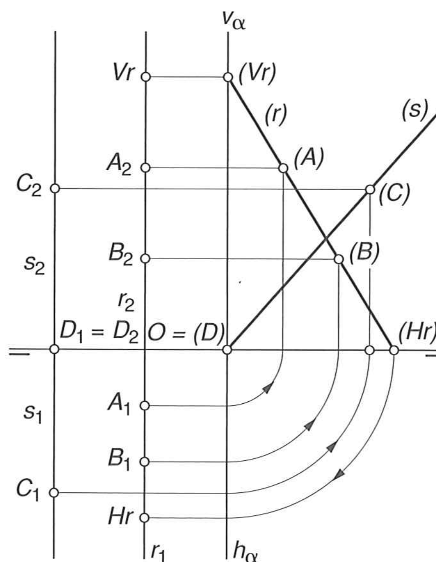


Fig. 8.30. *Dos rectas de perfil no paralelas.*

Paralelismo entre rectas (método directo)

En el método directo también se cumple que dos rectas son paralelas cuando tienen sus proyecciones homónimas paralelas entre sí (Fig. 8.31).

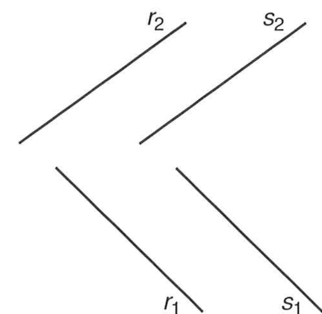


Fig. 8.31. *Rectas paralelas, método directo.*

B. Paralelismo entre recta y plano

Para que una recta sea paralela a un plano se ha de cujplir que lo sea a una recta cualquiera contenida en dicho plano.

Recta *r* paralela a un plano α dado, y que contiene un punto *A* exterior a él

Basta con trazar por las proyecciones del punto *A* dado, y una paralela a cualquier recta contenida en el plano α, por ejemplo, la recta *s*. Es obvio pensar que hay infinitas rectas paralelas a un plano (Fig. 8.32).

Recordemos que, para que una recta pertenezca a un plano, sus trazas tienen que estar situadas en la homónimas del plano (Fig. 8.32).

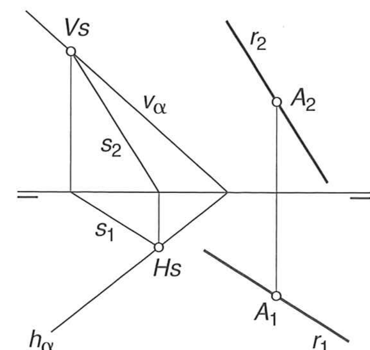


Fig. 8.32. *Recta paralela a un plano.*



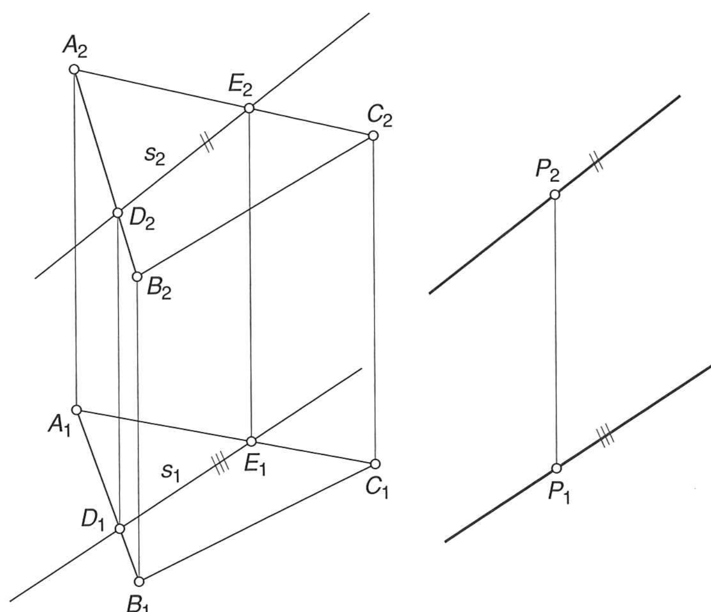


Fig. 8.33. *Recta paralela a un plano, método directo.*

▶▶▶ Recta paralela a un plano (método directo)

Como se expuso anteriormente, para que una recta sea paralela a un plano es que lo sea a una recta cualquiera contenida en dicho plano. En la Figura 8.33 puede observarse cómo se ha trazado una recta *r* paralela a un plano dado *ABC* por un punto *P* exterior a él.

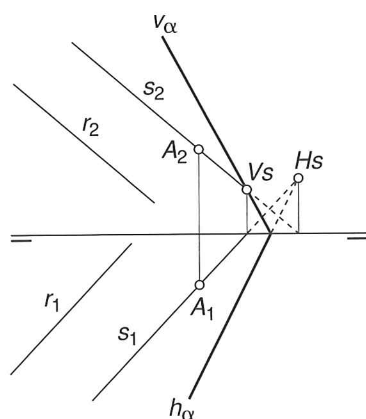


Fig. 8.34. *Plano paralelo a una recta dada que contiene un punto dado.*

▶▶▶ Plano α paralelo a una recta dada, y que contiene un punto *A*

Este caso consiste en trazar un plano que contenga a un punto dado $A_1 - A_2$ y tenga que ser paralelo a una recta también dada $r_1 - r_2$; se resuelve trazando por $A_1 - A_2$ una paralela $s_1 - s_2$ a $r_1 - r_2$; se hallan sus trazas, y cualquier plano que la contenga será una solución posible (Fig. 8.34).

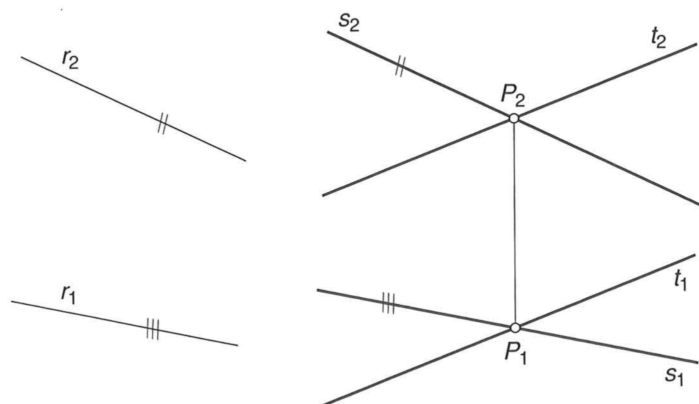
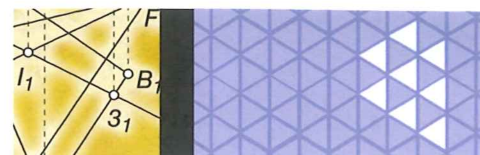


Fig. 8.35. *Plano paralelo a una recta, método directo.*

▶▶▶ Plano paralelo a una recta (método directo)

Un plano es paralelo a una recta cuando contiene al menos una recta paralela a la dada. Observar cómo se ha trazado un plano paralelo a una recta *r* dada por un punto *P* exterior a ella (Fig. 8.35).



C. Paralelismo entre planos

Dos planos paralelos tienen sus trazas homónimas paralelas, dado que se cumple que las rectas de intersección de dos planos paralelos, con cualquier otro plano, son paralelas. De esta afirmación se exceptúan los planos paralelos a la *LT*, puesto que pueden no serlo.

Plano α paralelo a otro β dado, y que contiene un punto *A*

El problema se reduce a trazar por $A_1 - A_2$ dos rectas paralelas respectivamente a dos contenidas en el plano β. Se hallan sus trazas y se unen las de igual nombre entre sí, y así se obtienen las trazas del plano α.

Para agilizar estas operaciones es conveniente utilizar una vertical *r* y una horizontal *s* del plano, puesto que se conocen sus direcciones, y por ello se actúa del modo siguiente: por las trazas *Vr* y *Hs* de estas dos rectas, han de pasar las trazas v_α y h_α del plano solución (Fig. 8.36).

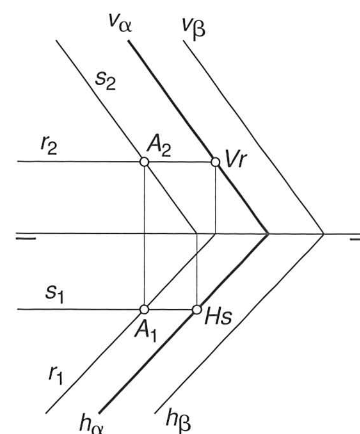


Fig. 8.36. *Plano paralelo a uno dado y que contiene un punto dado.*

Plano paralelo a otro dado (método directo)

En este método se pueden identificar dos planos paralelos cuando sus rectas de intersección con un plano cualquiera son paralelas. Por tanto, los planos paralelos tienen, entre otras, sus rectas notables paralelas.

Como se trata de dibujar un plano paralelo a otro dado *ABC*, en la Figura 8.37 se puede observar que se ha tomado un plano auxiliar proyectante del horizontal que contenga a *P*, punto que ha de contener el plano solución *DEF*, se halla la recta *s* de intersección del proyectante con el plano *ABC*, y por *P* se traza una recta *r* paralela a *s*. Posteriormente, se traza el plano *DEF* que contenga a *r*, dando solución al problema (Fig. 8.37).

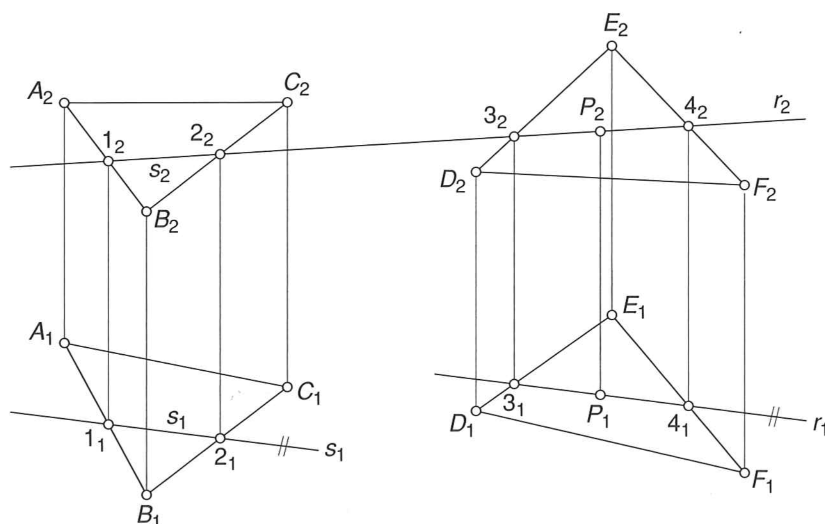


Fig. 8.37. *Plano paralelo a otro dado, método directo.*



8.3. Perpendicularidad

Antes de comenzar este tema conviene recordar los siguientes teoremas:

- Si una recta *r* es perpendicular a un plano α, lo es también a todas las rectas que forman dicho plano (Fig. 8.38). De manera recíproca, una recta será perpendicular a un plano cuando lo sea a dos rectas cualesquiera de dicho plano que no sean paralelas.

- *Teorema de las tres perpendiculares:* si dos rectas *r* y *s* son perpendiculares en el espacio y una de ellas, *r* por ejemplo, es paralela a un plano α, sus proyecciones ortogonales r_1 y s_1 sobre éste serán perpendiculares (Fig. 8.39).

Este principio se cumple también inversamente, es decir, si las proyecciones r_1 y s_1 de dos rectas *r* y *s* del espacio son perpendiculares y la recta, *r* por ejemplo, es paralela o contenida en el plano α de proyección, dichas rectas *r* y *s* son perpendiculares en el espacio (Fig. 8.40).

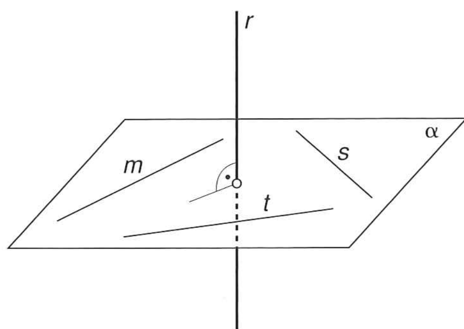


Fig. 8.38. *Si una recta es perpendicular a un plano, lo es también a todas las rectas contenidas en él.*

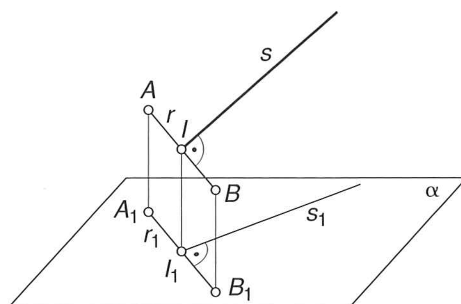


Fig. 8.39. *Teorema de las tres perpendiculares.*

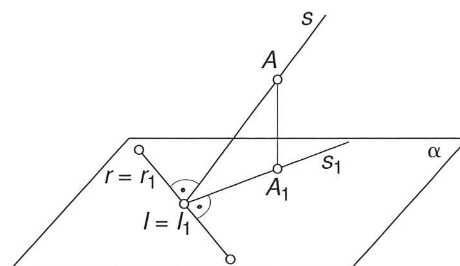


Fig. 8.40. *Teorema de las tres perpendiculares a la inversa.*

Recta perpendicular a un plano

Para que una recta sea perpendicular a un plano se ha de cumplir que las proyecciones de la recta sean perpendiculares a las trazas del plano.

Si se quiere trazar, desde un punto *A* dado, una recta *r* perpendicular a un plano α, es suficiente con trazar desde las representaciones A_1 y A_2 del punto y las proyecciones r_1 y r_2 perpendiculares a las trazas del plano, es decir, a v_α y h_α. (Fig.8.41)

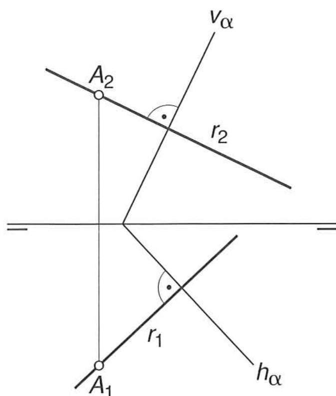


Fig. 8.41. *Recta perpendicular a un plano.*

Recta perpendicular a un plano (método directo)

Para trazar por un punto *P* una recta *r* perpendicular al plano *ABC*, basta con trazar por *P* una recta que tenga sus proyecciones r_1 y r_2 perpendiculares, respectivamente, a la proyección horizontal de una recta horizontal del plano, y a la vertical de otra recta, también del plano, que sea frontal (Fig. 8.42).

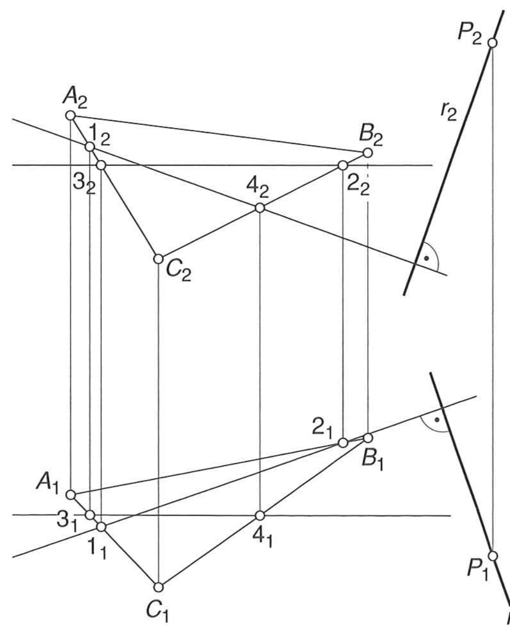
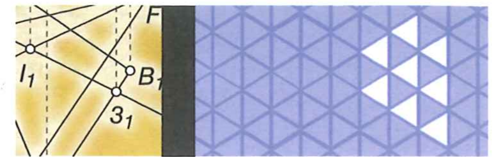


Fig. 8.42. *Recta perpendicular a un plano, método directo.*



▶▶▶ Plano perpendicular a una recta

Análogamente, para que un plano sea perpendicular a una recta las trazas del plano han de ser perpendiculares a las proyecciones de la recta.

Para dibujar por un punto A dado un plano α perpendicular a la recta r, bastará con trazar por A_1 y A_2 una horizontal s del plano α cuya proyección s_1 sea perpendicular a r_1, y una frontal t de α, también trazada por las proyecciones del punto A.

Como puede apreciarse en la Figura 8.43, su representación t_2 ha de ser perpendicular a r_2, así se podrán situar las trazas del plano α pedido.

Es conveniente apuntar que con sólo una de las rectas, s o t, es suficiente para determinar el plano α. Véase la Figura 8.44, donde se ha utilizado una horizontal s del plano α para dar solución al problema.

Fig. 8.43. *Plano perpendicular a una recta.*

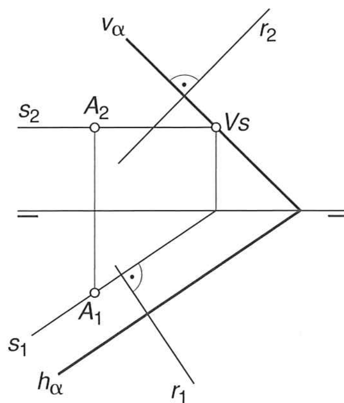


Fig. 8.44. *Plano perpendicular a una recta frontal.*

Situada la recta s_1 - s_2, por su traza Vs se traza v_α perpendicular a r_2, y donde ésta corta a la LT se dibuja hα, paralela a s_1. En el caso de querer aplicar una recta frontal se actuaría de manera similar a la expuesta.

▶▶▶ Plano perpendicular a una recta (método directo)

El plano perpendicular a la recta r que contenga a un punto P, se halla trazando por P dos rectas, respectivamente, una frontal s, y otra horizontal t, de manera que tengan sus proyecciones s_2 y t_1 perpendiculares a las proyecciones correspondientes de la recta r dada (Fig. 8.45).

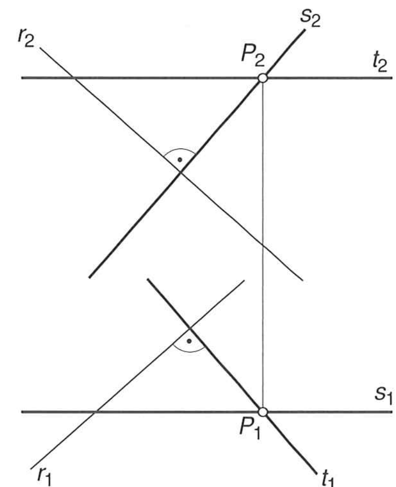


Fig. 8.45. *Plano perpendicular a una recta, método directo.*

▶▶▶ Plano perpendicular a otro

Un plano α será perpendicular a otro β cuando uno de ellos, por ejemplo el α, contenga una recta r perpendicular al otro. Por tanto, todos los planos que pasen por la recta r serán perpendiculares a β; de ahí que las soluciones a este problema puedan ser infinitas.

Para trazar por un punto A dado un plano α perpendicular a otro β, se actúa del siguiente modo: por el punto A_1 - A_2 se traza una recta r perpendicular al plano β y, como se expuso anteriormente, todos los planos que contengan las trazas de r (Vr y Hr) serán perpendiculares al plano β (Fig. 8.46).

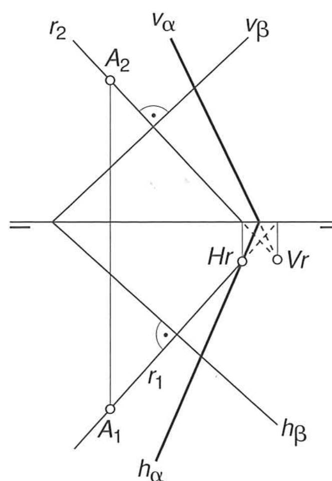
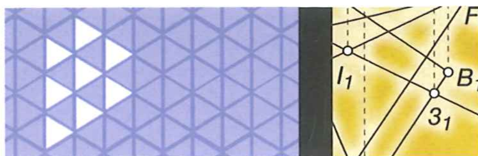


Fig. 8.46. *Plano perpendicular a otro.*



▶▶▶ Plano perpendicular a otro (método directo)

Se trata de dibujar un plano perpendicular a otro dado *ABC* y que contenga al punto *P*. Se traza por *P* una recta *r* perpendicular al plano dado *ABC*; para ello se trazará *r* a dos de las rectas del plano, por ejemplo una horizontal *s*, y a otra frontal *t*; se traza por *P* otra recta cualquiera *m* que junto con *r*, define el plano perpendicular buscado (Fig. 8.47).

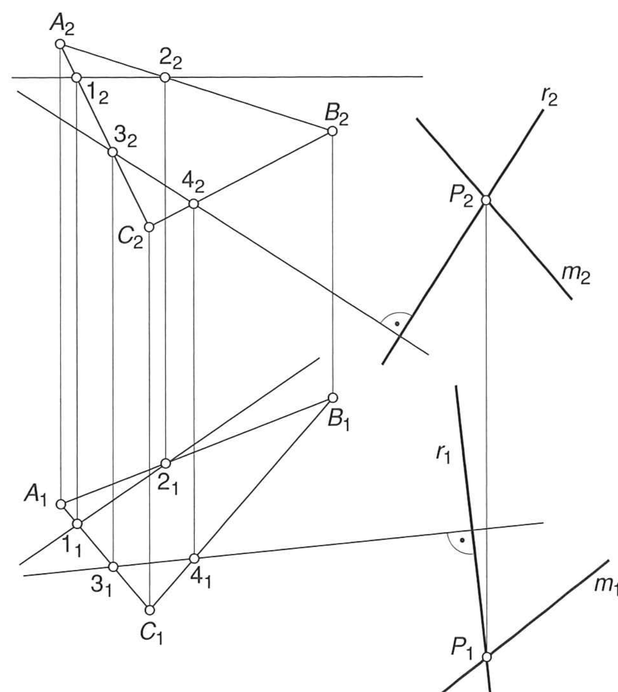


Fig. 8.47. *Plano perpendicular a otro, método directo.*

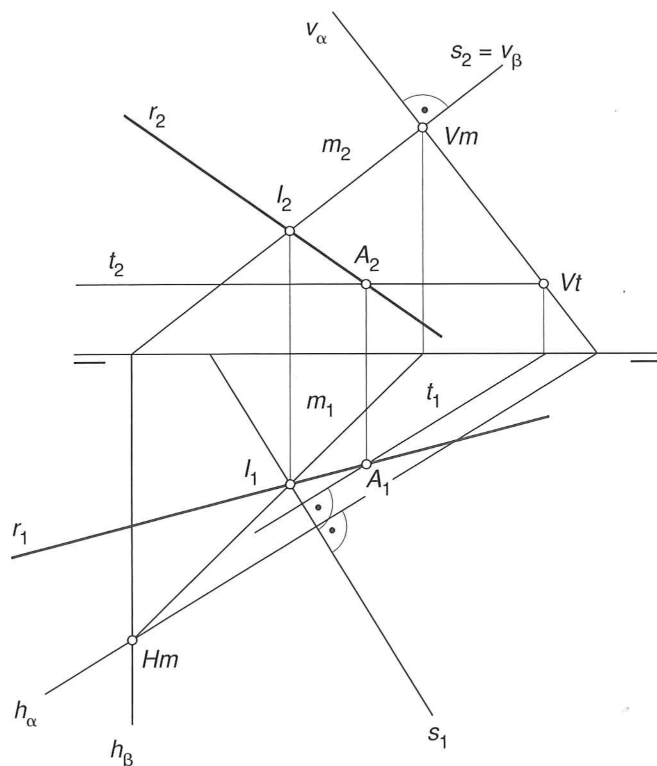


Fig. 8.48. *Recta perpendicular a otra.*

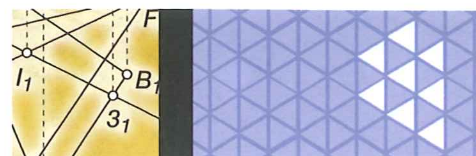
▶▶▶ Recta perpendicular a otra

Cualquier recta que esté contenida en un plano perpendicular a una recta será perpendicular a ella.

Para trazar una recta *r* perpendicular a otra dada y que pase por un punto *A* conocido, basta con trazar un plano α perpendicular a *s* y que contenga al punto *A*; para ello, recordar cómo se traza un plano perpendicular a una recta que contenía un punto dado. Se halla el punto *I* de intersección de α con *s* y, uniendo éste punto con *A*, se obtiene la recta *r* solución del problema (Fig. 8.48).

▶▶▶ Recta perpendicular a otra (método directo)

Se observa que dos rectas son perpendiculares entre sí, si una de ellas forma parte de un plano perpendicular a la otra recta. Para trazar por un punto *P* una recta *r* perpendicular a otra dada *s*, se ha de dibujar por *P* un plano perpendicular a *s*. Cualquier recta del plano que contenga a *P* es perpendicular a la recta *s* (ver la Figura 8.45 más arriba).



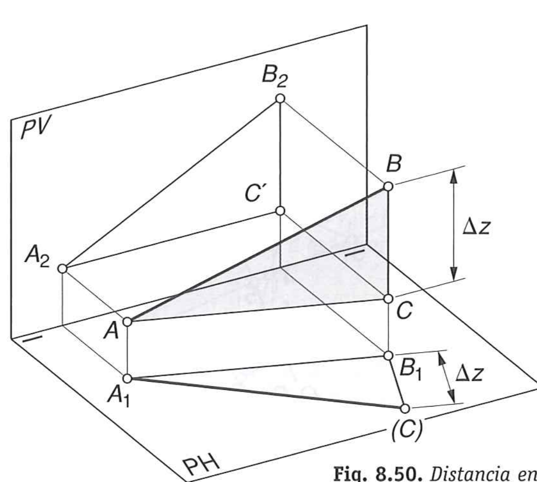
8.4. Verdadera magnitud. Distancias

Los aspectos desarrollados bajo este apartado constituyen una aplicación directa de los conceptos tratados en la perpendicularidad.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B es la longitud del segmento que los une. Para hallar su verdadera magnitud se utiliza el artificio de abatirlo sobre el horizontal o el vertical de proyección por medio del plano proyectante que lo contiene sobre uno de los citados planos.

Veamos por ejemplo, el segmento AB de la Figura 8.50; su verdadera magnitud es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos son: uno, la proyección horizontal A_1B_1 de los puntos, y el otro, la diferencia de cota existente entre ambos puntos, o sea, B_2C'.



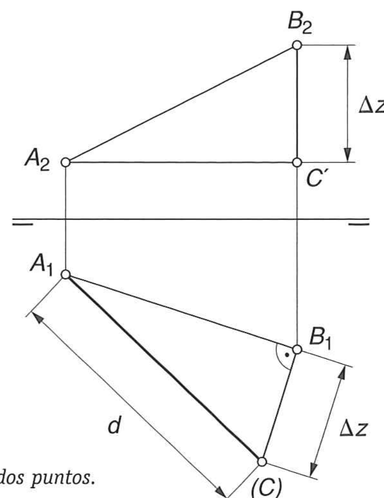


Fig. 8.50. *Distancia entre dos puntos.*

Si se abate el segmento AB sobre el horizontal, es decir, por B_1 se traza una perpendicular al segmento A_1 B_1, y sobre ella se lleva la distancia B_2 C', diferencia de cota entre los puntos A y B que se llama Δ_z, se obtiene el punto (C), que unido con A_1 determina la distancia real entre los puntos A y B.

Distancia entre dos puntos (método directo)

La distancia que existe entre dos puntos A y B es igual a la longitud del segmento AB.

Si un segmento es paralelo a un plano de proyección, PH o PV, allí en el plano al que es paralelo se proyecta según su verdadera magnitud.

Para hallar la verdadera magnitud del segmento AB a partir de sus proyecciones se actúa de manera similar a la expuesta en el sistema diédrico «clásico». Véase en la Figura 8.51 el proceso seguido para resolver el problema.

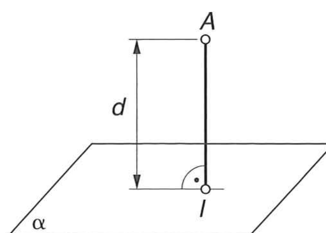
Fig. 8.51. *Distancia entre dos puntos, método directo.*

Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto A a un plano α es el segmento perpendicular al plano definido por el citado punto A y su intersección I con α.

Por tanto, para determinar la distancia del punto $A_1 - A_2$ al plano α se actúa del modo siguiente:

1. Se trazan por las proyecciones $A_1 - A_2$ del punto las perpendiculares $r_1 - r_2$ al plano α.
2. Se halla el punto de intersección I de la recta r con el plano α, para lo que se utiliza un plano de apoyo proyectante β horizontal de la recta, que corta a α conforme a la recta $s_1 - s_2$ la cual nos sirve para situar el punto de intersección I buscado.
3. Por tanto, el segmento $A_1A_2 - I_1I_2$ es la distancia pedida. Para hallar su verdadera magnitud es suficiente con aplicar lo expuesto anteriormente sobre distancia entre dos puntos (Fig.8.52).



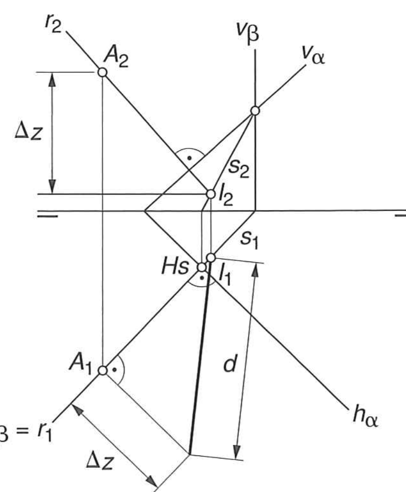
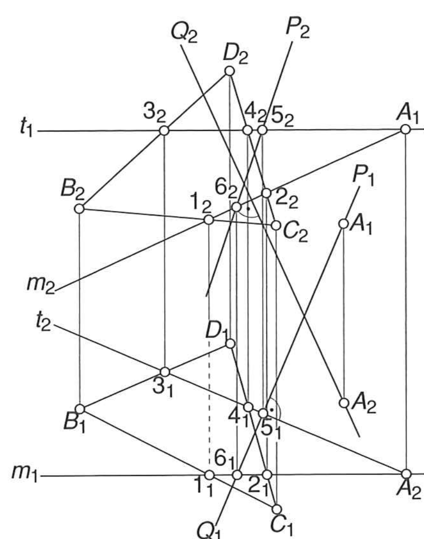
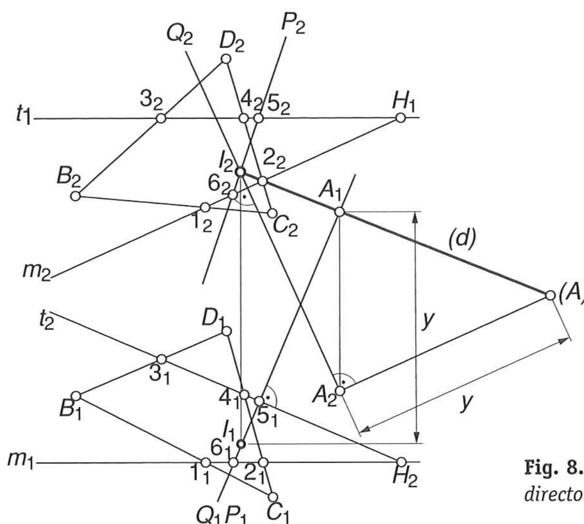


Fig. 8.52. *Distancia de un punto a un plano.*





Distancia de un punto a un plano (método directo)

Como se expuso anteriormente, la distancia de un punto *A* a un plano *BCD* es el segmento perpendicular al plano definido por el citado punto *A* y su intersección *I* con *BCD*.

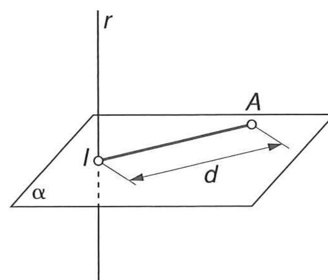
Véase en la Figura 8.53 el proceso seguido para resolver el problema.

Fig. 8.53. *Distancia de un punto a un plano, método directo.*

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto *A* a una recta *r* es la longitud existente entre dicho punto y el punto *I* de intersección de la recta *r* con la perpendicular a ella trazada desde *A*.

Esta distancia se determina trazando por el punto *A* un plano α perpendicular a la recta dada *r*, para lo cual hay que aplicar cómo se trazaba un plano perpendicular a una recta. Se halla su punto de intersección *I*, y basta con medir el segmento *AI* para obtener la solución del problema. Véanse las operaciones llevadas a cabo para resolver este problema en la Figura 8.54.



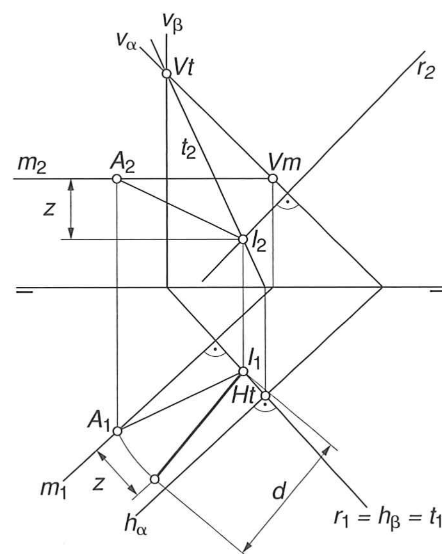


Fig. 8.54. *Distancia de un punto a una recta.*

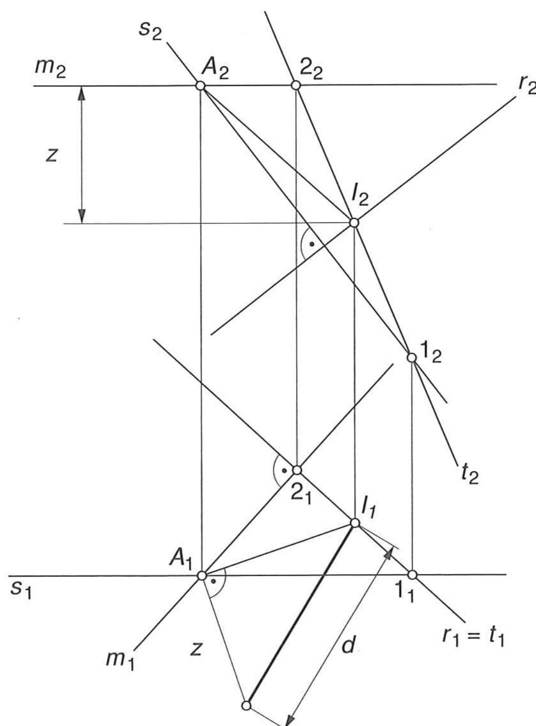


Fig. 8.55. *Distancia de un punto a una recta, método directo.*

Distancia de un punto a una recta (método directo)

Para dar solución al problema se actúa del modo siguiente:

1. Por el punto $A_1 - A_2$ se hace pasar un plano α perpendicular a la recta *r* dada. El plano α queda determinado por una frontal $s_1 - s_2$ perpendicular a r_2, y una horizontal $m_1 - m_2$ perpendicular a r_1. Se halla el punto $I_1 - I_2$ de intersección del plano con la recta *r*, para lo que se utiliza el proyectante del horizontal de *r*, que aparece como $t_1 - t_2$.

2. Se une el punto $A_1 - A_2$ con el $I_1 - I_2$, y se halla la verdadera magnitud de este segmento (Fig. 8.55).



▶▶▶ Distancia entre rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas *r* y *s* está determinada por la longitud del segmento *JI;* son puntos de intersección de una recta *t* perpendicular común a dichas rectas.

Para hallar la distancia *JI* entre dos rectas paralelas *r* y *s,* se traza un plano α perpendicular a ambas, determinándose los puntos *J* e *I* de intersección de éstas con α. Observa en la Figura 8.56 cómo se ha desarrollado este problema.

Las rectas dadas son $r_1 - r_2$ y $s_1 - s_2$, y el plano auxiliar perpendicular a ambas α. Las rectas *r* y *s* cortan a α en los puntos $J_1 - J_2$ e $I_1 - I_2$, obtenido por medio de los planos de apoyo proyectantes $v_\beta - h_\beta$ y $v_\Omega - h_\Omega$, cuyas rectas de intersección con α son las rectas $m_1 - m_2$ y $l_1 - l_2$. El segmento *d* es la verdadera magnitud de *JI*.

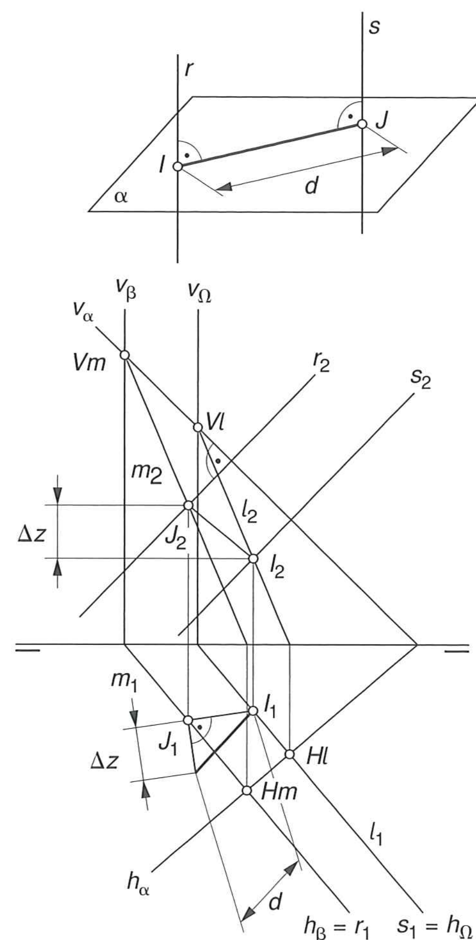


Fig. 8.56. *Distancia entre rectas paralelas.*

▶▶▶ Distancia entre planos paralelos

La distancia entre dos planos paralelos α y β está dada por la longitud del segmento *JI* que estos planos delimitan con sus intersecciones sobre cualquier recta perpendicular a ambos.

Para hallar la distancia entre los planos α y β basta con hallar los puntos de intersección *J* e *I* de una recta perpendicular a ellos. Para llevar a cabo esta operación se traza una recta $r_1 - r_2$ perpendicular a los planos dados α y β, esta recta corta al plano α en el punto $J_1 - J_2$ y al plano β en el $I_1 - I_2$. Se ha utilizado un plano auxiliar Ω proyectante vertical de la recta. La longitud *d* es la verdadera magnitud de la distancia entre α y β (Fig. 8.57).

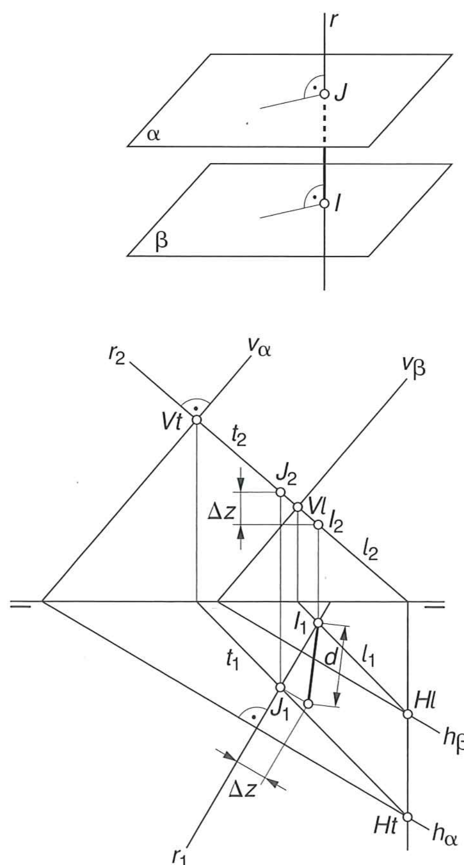


Fig. 8.57. *Distancia entre planos paralelos.*

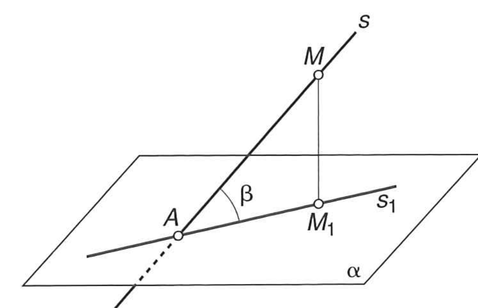


Fig. 8.58. *Ángulo de una recta con un plano.*

8.5. Ángulos

Antes de comenzar este tema conviene recordar los siguientes aspectos:

- Denominamos **ángulo de la recta** s con un plano α al ángulo agudo β que s realiza mediante su proyección ortogonal s_1 sobre dicho plano (Fig. 8.58).
- La figura geométrica descrita por dos planos α y β que se cortan, determinándose en su intersección t, se conoce con el nombre de **ángulo diedro** γ; a los citados planos, caras, y A_t aristas del diedro (Fig.8.59).

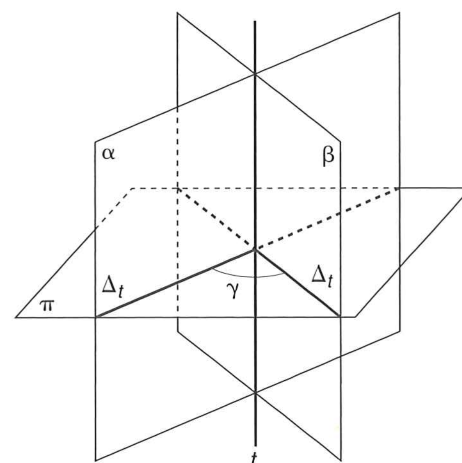


Fig. 8.59. *Ángulo diedro.*

A. Ángulos que forma una recta con los planos de proyección

Con el plano horizontal

El ángulo β que forma una recta r con el plano horizontal es el determinado por ella y su proyección r_1. Para hallar la verdadera magnitud de dicho ángulo se procede del siguiente modo:

Se hace girar la recta r alrededor de un eje e perpendicular al plano horizontal hasta situarla sobre el plano vertical en la posición $H'_r - Vr$; de esta manera se habrá obtenido el ángulo β que forma la recta r con el horizontal de proyección en verdadera magnitud (Fig. 8.60).

Con el plano vertical

En este caso se opera aplicando el mismo razonamiento expuesto para el plano horizontal. El eje e que se toma ahora ha de ser una recta de punta, y la recta r dada habrá que situarla mediante un giro sobre el plano horizontal, quedando así definido, en verdadera magnitud, el valor del ángulo β (Fig. 8.61).

Ángulos de una recta con los planos de proyección *(PV, PH, PP)*, método directo

Como se deduce de lo expuesto anteriormente, el ángulo que forma una recta cualquiera con un plano de proyección es el que describe dicha recta y su proyección ortogonal sobre él. Basándose en la obtención de la verdadera magnitud de un segmento, se determina el valor del ángulo que la recta forma con los planos de proyección, *PH, PV* y *PP*, plano de perfil. Véase en la Figura 8.62 la solución gráfica.

El ángulo α es el que forma la recta con el *PH*, el β con el *PV*, y por último, el π con el plano de perfil, *PP*.

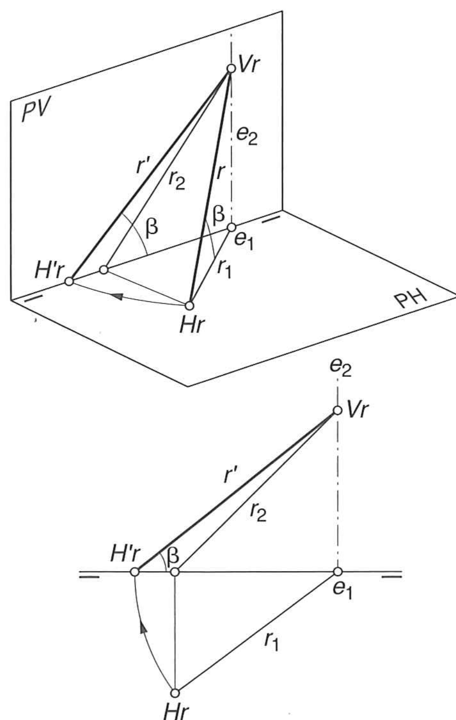


Fig. 8.60. *Ángulo de una recta con el plano horizontal.*

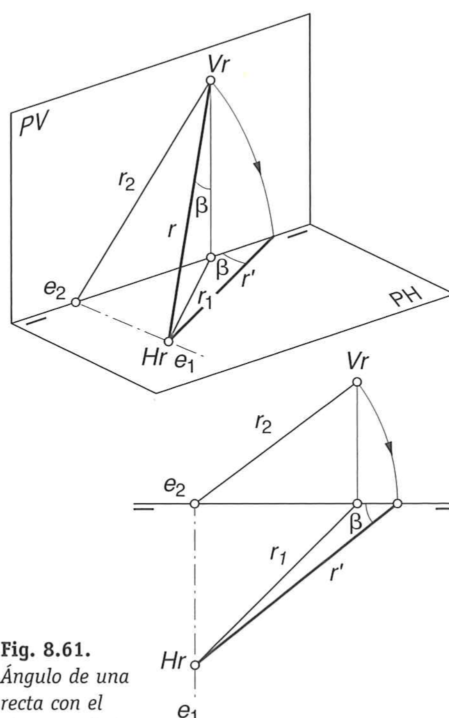


Fig. 8.61. *Ángulo de una recta con el plano vertical.*

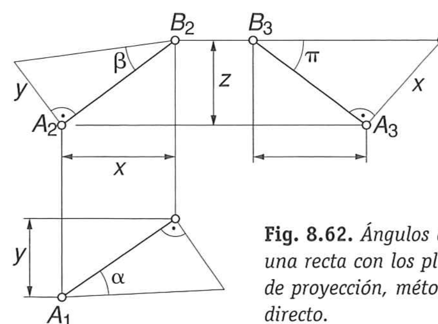


Fig. 8.62. *Ángulos de una recta con los planos de proyección, método directo.*



B. Ángulos que un plano forma con cada uno de los planos de proyección

Con el plano horizontal

Para hallar el ángulo β que determina un plano α cualquiera con *PH*, basta con trazar un plano auxiliar π perpendicular a la traza hα, que define el ángulo correspondiente. Como puede observarse en la Figura 8.63a, uno de sus lados *Ht Vt* es recta de máxima pendiente de α, y el otro *Ht* T'_2 es su proyección sobre el *PH*.

Por tanto, abatiendo el triángulo cuyos vértices son los puntos *Vt* T'_2 *Ht* sobre el *PV* alrededor de la charnela *Vt* T'_2 se determina el valor del ángulo β en verdadera magnitud. En la Figura 8.63b puede observarse el proceso seguido.

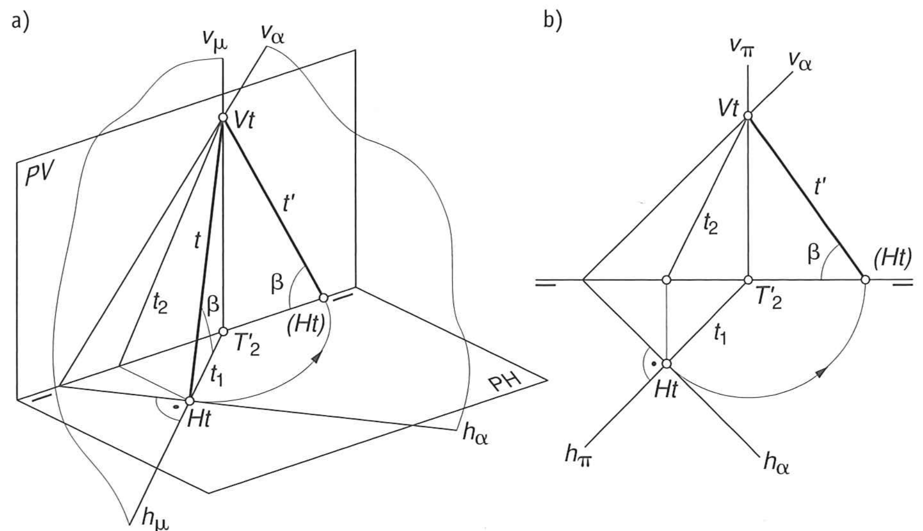


Fig. 8.63. *Ángulo que un plano forma con el horizontal.*

Con el plano vertical

El ángulo β que forma un plano α cualquiera con el *PV* se obtiene del mismo modo que en el caso anterior. No obstante, en la Figura 8.64 se presenta el desarrollo gráfico del problema, dejando al alumno su reconstrucción lógica, una vez indicado el proceso que se debe de seguir.

Ángulos que un plano forma con cada uno de los planos de proyección (método directo)

Como se ha podido deducir de lo anteriormente expuesto, el ángulo que forma un plano cualquiera con el *PH* es igual al ángulo que describe la recta de máxima pendiente de dicho plano con el *PH* (Fig. 8.65).

Del mismo modo, el ángulo que forma un plano con el *PV*, es igual al que describe la recta de máxima inclinación del citado plano con el *PV* (Fig. 8.66).

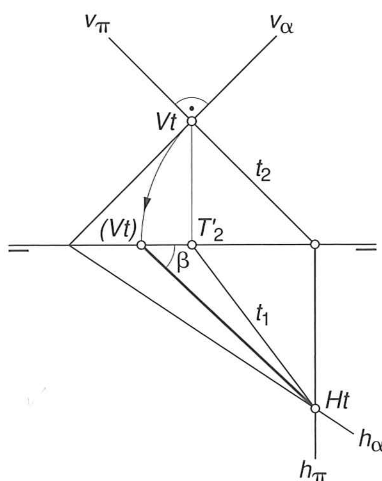


Fig. 8.64. *Ángulo que un plano forma con el vertical.*

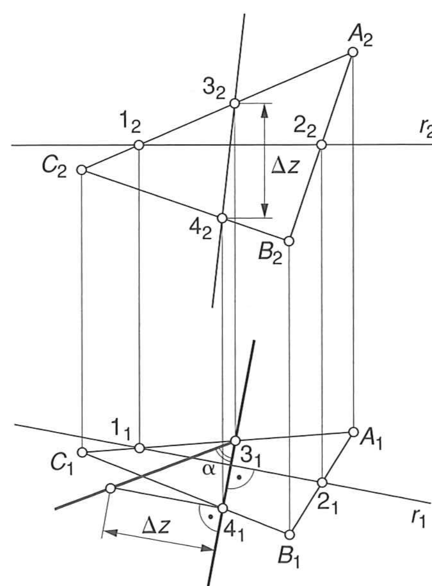


Fig. 8.65. *Ángulo que un plano forma con el horizontal, método directo.*

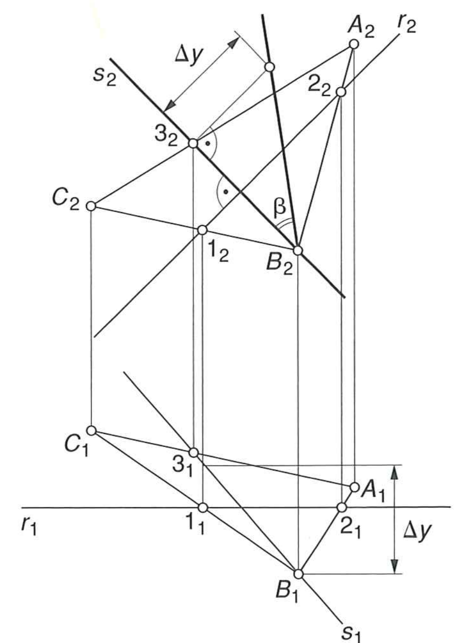
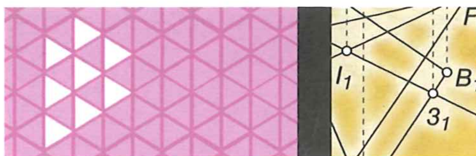


Fig. 8.66. *Ángulo que un plano forma con el vertical, método directo.*



8. Sistema diédrico ortogonal (II). Método directo (II)

Actividades del sistema diédrico ortogonal (II) y el método directo (II)

Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. Explica por escrito en qué consiste el método general de intersección entre planos. Apóyate si lo ves necesario en trazados gráficos.

2. Explica por escrito cómo se realiza en el sistema diédrico la intersección de una recta con un plano. Apóyate si lo ves necesario en trazados gráficos.

3. ¿Cuándo se dice que dos rectas son paralelas en el sistema diédrico?

4. ¿Cómo se hace para trazar una recta paralela a un plano dado en el sistema diédrico? ¿Y un plano paralelo a otro dado?

5. ¿Cuál es el procedimiento a seguir en el sistema diédrico para que una recta sea perpendicular a un plano dado?

6. Explica por escrito cómo se halla la distancia entre dos puntos dados en el sistema diédrico. Apóyate si lo ves necesario en trazados gráficos.

7. Explica por escrito cómo se halla el ángulo que forma una recta con los planos de proyección. Apóyate si lo ves necesario en trazados gráficos.

Ejercicios

Sobre papel blanco formato A4 dibuja a lápiz los siguientes ejercicios, teniendo en cuenta que la unidad de medida es el milímetro:

1. Por el punto *A* (-30, 10, 25) traza una recta *r* perpendicular el primer bisector.

2. Dibuja un plano α (30, 30, 30) perpendicular a otro β que contenga al punto *A* (20, 20, 30).

3. Por el punto *A*(0, 10, 45), traza una recta *m* que corte a otra *r A* (-10, 10, 15) *B* (30, 40, 50), y sea perpendicular a *s C* (-15, 0, 25) *D* (35, 50, 25).

4. Encuentra la distancia del punto *A* (30, 0, 0) a la recta *r A* (-30, 0, 20) *B* (30, 25, 35).

5. Determina la distancia entre dos muros de un jardín que son paralelos. Las proyecciones diédricas del primero son α (-20, -15, 30), mientras que el segundo contiene al punto *A* (20, 30, 35).

6. Dado el plano α traza otro paralelo a 40 mm de distancia.

7. Sobre el plano α (-30, 30, 30) se apoya una pirámide recta de 60 mm de altura; se sabe que los vértices de la base son los puntos *A* (0, 20, *Z*), *B* (40, 0, *Z*) y *C* (20, 35, *Z*). Se pide:

   a) Las proyecciones diédricas de la pirámide.

   b) La longitud real de las aristas *AB* y *CV*.

   Se denominará con la letra *V* al vértice opuesto a la base de la pirámide.

8. Dada la recta *r A* (0, 10, 35) *B* (30, 25, 50), a partir del punto *A*, en dirección hacia el segundo diedro, determina un segmento por sus proyecciones diédricas cuya longitud real sea 55 mm.

9. Halla los ángulos que tiene la recta *r A* (-30, 30 10) *B* (30, 10, 35), con los planos de proyección.

10. Halla, aplicando el método directo, la intersección de los planos *ABC* y *CDE*. Copia los datos y pásalos a escala 3:1 (Fig. 8.67).

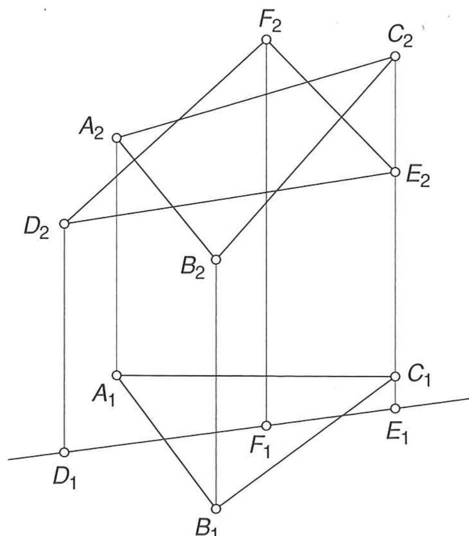


Fig. 8.67. *Ejercicio 10, enunciado.*

11. Halla, aplicando el método directo, la intersección de la recta *r* con el plano *ABC*. Copia los datos y pásalos a escala 3:1 (Fig. 8.68).

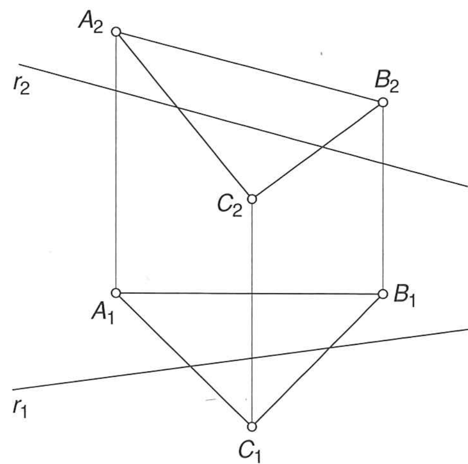


Fig. 8.68. *Ejercicio 11, enunciado.*

12. Halla, aplicando el método directo, un plano paralelo a la recta *r* y que contenga al punto *A*. Copia los datos y pásalos a escala 3:1 (Fig. 8.69).

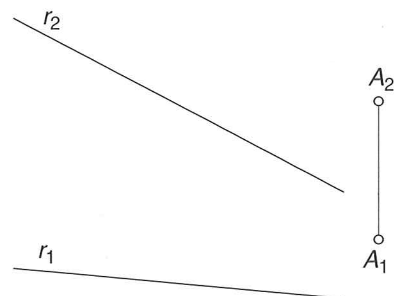
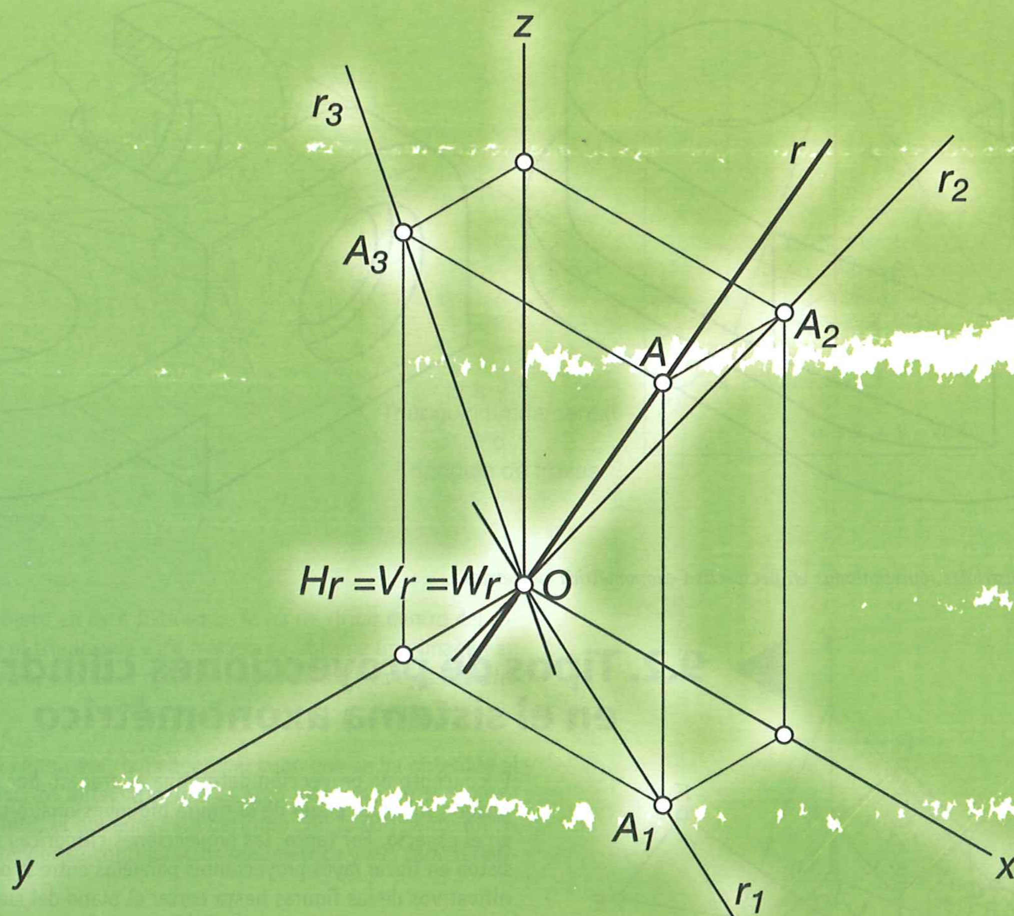


Fig. 8.69. *Ejercicio 12, enunciado.*

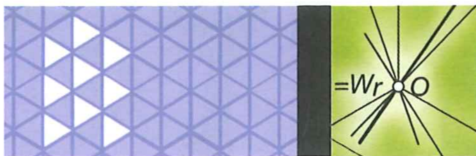
09

Sistema de representación axonométrico



El sistema axonométrico es otro de los procedimientos para representar objetos sobre un soporte bidimensional, por ejemplo, el papel. Al igual que el sistema diédrico, nos permite conocer las peculiaridades que configuran al objeto respecto a las formas y los volúmenes; y además, este sistema posibilita tener una visión general del cuerpo.

El sistema axonométrico está basado en el hecho de que todos los sólidos situados en el espacio pueden referirse sobre un triedro trirrectángulo (ZOXY) que, mediante sus ejes OZ, OX y OY, nos definen las magnitudes de longitud anchura y altura de los objetos. Este sistema es muy utilizado por la facilidad con que se representan los cuerpos y por su rápida comprensión, de ahí su uso en el diseño industrial.



9.1. Sistema axonométrico

El sistema axonométrico es uno de los procedimientos para representar objetos sobre un soporte bidimensional, por ejemplo, el papel. Permite conocer de una sola vez las peculiaridades que configuran al objeto respecto a las formas y los volúmenes, es decir, nos da una visión general del cuerpo.

Este sistema está basado en el hecho de que todos los sólidos situados en el espacio pueden referirse sobre un triedro trirrectángulo (*ZOXY*) que, mediante sus ejes *OZ*, *OX* y *OY*, nos definen las magnitudes de longitud, anchura y altura de los objetos. El espacio en este sistema queda dividido en ocho triedros trirrectángulos, también llamados octantes. Este sistema es muy utilizado por la facilidad con que se representan los cuerpos y por su rápida comprensión, de ahí su uso en los diferentes campos de la ingeniería, la arquitectura y el diseño (Fig. 9.1).

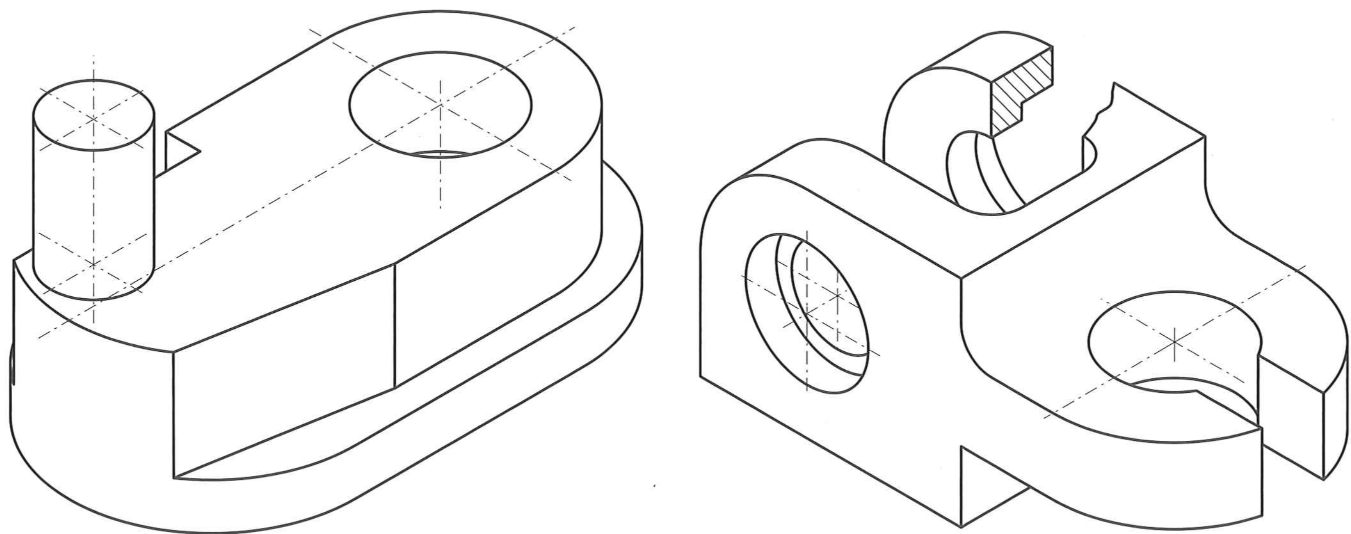


Fig. 9.1. *Piezas industriales representadas en perspectiva axonométrica isométrica.*

9.2. Tipos de proyecciones cilíndricas en el sistema axonométrico

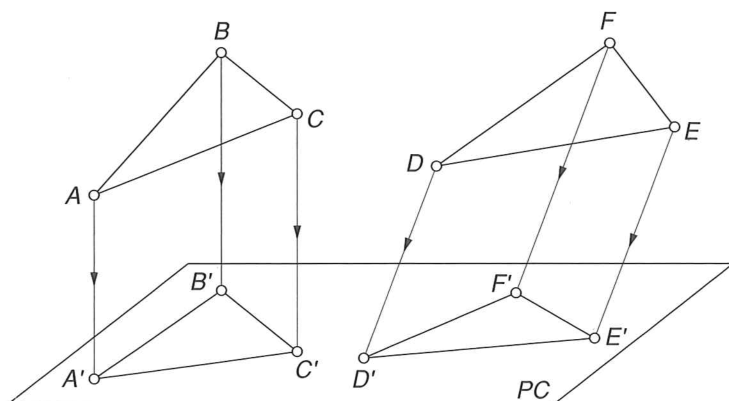


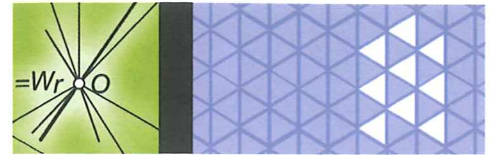
Fig. 9.2. *Axonometría ortogonal y oblicua.*

El concepto de proyección determina el proceso por el que se obtiene una imagen sobre un plano de la figura bidimensional o tridimensional situada en el espacio. Por tanto, las proyecciones cilíndricas son aquellas que consisten en trazar rayos proyectantes paralelos entre sí por los puntos más significativos de las figuras hasta cortar el plano del cuadro o de proyección, también denominado plano de dibujo.

El sistema axonométrico está formado por dos grandes bloques de perspectivas axonométricas (Fig. 9.2):

- La primera de ellas, la **axonometría ortogonal,** se denomina así por estar basada en una proyección cilíndrica ortogonal.

- La segunda, la **axonometría oblicua,** se fundamenta en una proyección cilíndrica oblicua.



9.3. Fundamentos del sistema axonométrico ortogonal

Las proyecciones en el plano del cuadro o de proyección de las aristas del triedro trirrectángulo (*ZOXY*), también llamados ejes, resultan al proyectar ortogonalmente todos los puntos que forman dichos ejes.

Para ello, se hallan los puntos de intersección de éstos con el plano del cuadro, con lo que se obtienen los puntos *A*, *B* y *C*. Uniéndolos con el punto *O*, proyección ortogonal de (*O*), donde se cortan los ejes axonométricos, se obtienen las proyecciones de los ejes, y si, además, se unen los puntos traza (*A*, *B*, *C*) entre sí, se determina el **triangulo fundamental** o **triángulo de trazas.**

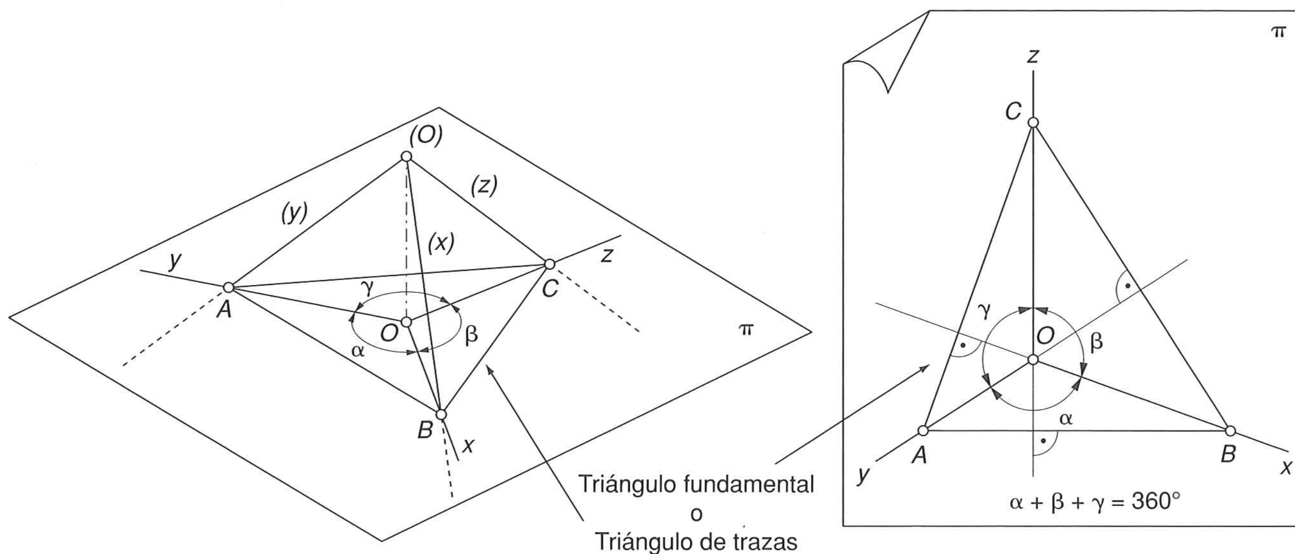


Fig. 9.3. *Triángulo de trazas.*

Para representar un objeto en este sistema se le ha de situar dentro del espacio que comprende el triedro; de esta manera se obtiene una imagen en perspectiva del sólido además de la representación de los tres ejes del triedro.

Como se aprecia en la Figura 9.4, la imagen del cubo que se ha obtenido al aplicar el proceso descrito anteriormente es algo diferente de la imagen real de éste. No obstante, el poliedro está definido con la suficiente precisión como para comprender su configuración volumétrica y sus características formales.

Cuando se proyecta un objeto en este sistema, sus magnitudes varían; la razón existente entre el tamaño de un objeto real y su imagen proyectada se denomina **coeficiente de reducción.**

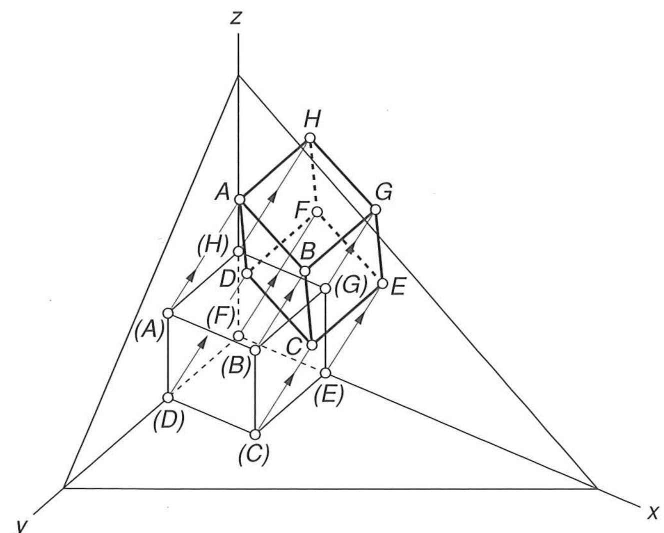


Fig. 9.4. *Representación de un cubo*

A. Nomenclatura de los elementos del sistema

En este sistema de representación se utiliza la siguiente nomenclatura, cuyo uso se ejemplifica en la Figura 9.3 (ver más arriba):



O	Origen del sistema o vértice del triedro trirrectángulo.
XOY	Plano horizontal
XOZ	Plano vertical
YOZ	Plano de perfil o segundo plano vertical.
π	Plano del cuadro o de proyección, también denominado plano del dibujo.
X, Y, Z	Ejes axonométricos o coordenados.
α	Ángulo que forman los ejes *XOY*.
β	Ángulo que forman los ejes *XOZ*.
γ	Ángulo que forman los ejes *YOZ*.
ABC	Triángulo fundamental o de trazas.

La suma de α, β y γ es siempre igual a 360°.

B. Tipos de axonometría ortogonal

Al proyectar los ejes axonométricos (*X, Y, Z*) sobre el plano del cuadro, forman entre sí los ángulos α, β y γ, cuyos valores difieren dependiendo de la posición que estos ejes tengan respecto al plano. Las diferencias de ángulos generan las tres axonometrías siguientes:

- **Sistema axonométrico isométrico:** los tres ángulos, α, β y γ son iguales. El coeficiente de reducción es el mismo para los tres ejes (Fig. 9.5).
- **Sistema axonométrico dimétrico:** dos ángulos son iguales y otro es distinto; por tanto, dos coeficientes de reducción son iguales y el otro desigual (Fig. 9.6).
- **Sistema axonométrico trimétrico:** todos los ángulos son diferentes, al igual que los coeficientes de reducción (Fig. 9.7).

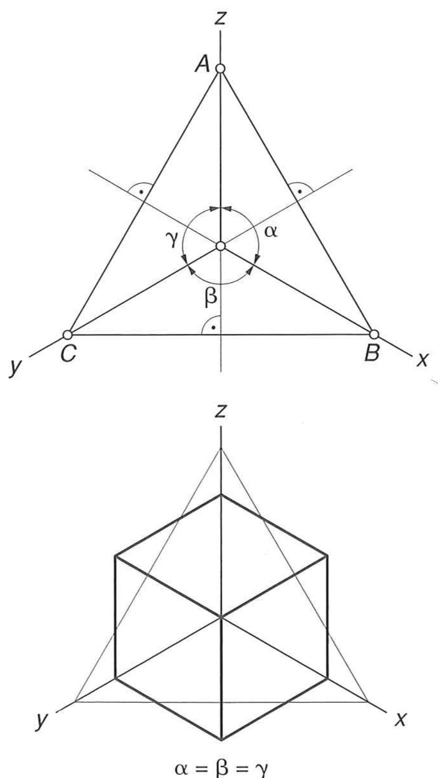


Fig. 9.5. *Sistema axonométrico isométrico.*

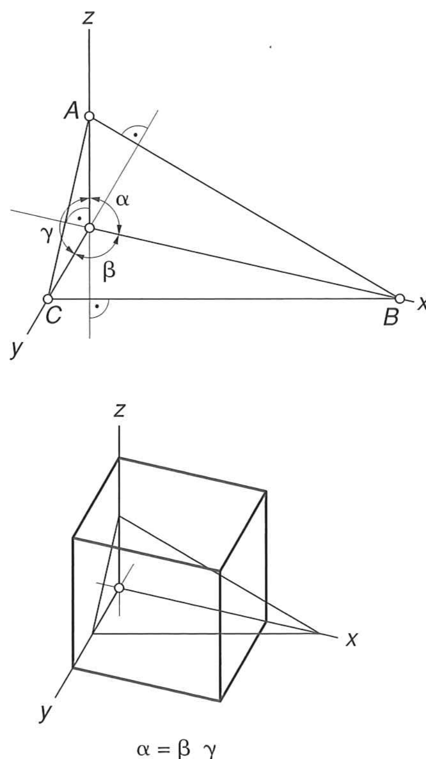


Fig. 9.6. *Sistema axonométrico dimétrico.*

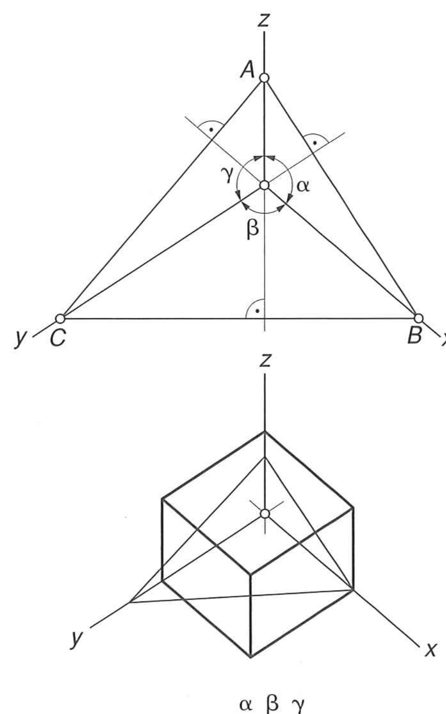


Fig. 9.7. *Sistema axonométrico trimétrico.*



C. Escala axonométrica y coeficiente de reducción

Ya se ha señalado que el sistema axonométrico tiene como base de referencia un triedro trirrectángulo. Al proyectar una longitud cualquiera situada en los ejes axonométricos sobre el plano del cuadro, ésta se ve condicionada por una determinada reducción que es motivada por el valor del ángulo que cada eje forma con el plano del cuadro.

Como puede deducirse de lo expuesto, se produce una proporcionalidad entre la magnitud real y su representación sobre el plano del cuadro, que es denominada **escala axonométrica.**

Si se toma, por ejemplo, sobre el eje X un punto A, a una distancia U del origen O, es decir, $AO = U$, siendo U una unidad métrica; y se proyecta A y O sobre el plano del cuadro π, se determinan las proyecciones $A_1\ O_1 = U_x$, siendo U_x la unidad que corresponde al eje X_1, y como ya se expuso anteriormente, la proporción entre U y U_x es la que se denomina escala axonométrica del eje X (Fig. 9.8).

La relación U_x/U entre dos unidades se llama **coeficiente de reducción C_x**; de manera similar ocurre que: $C_y = U_y/U$; $C_z = U_z/U$. Por tanto, para hallar la escala axonométrica de cualquiera de los tres ejes se ha de multiplicar el valor de la unidad real de cada eje por su correspondiente coeficiente de reducción.

No debe de olvidarse que el coeficiente de reducción depende del valor del ángulo que forman, en cada caso, los ejes con el plano del cuadro.

En el caso de la perspectiva isométrica, donde los ángulos son iguales, se verifica que $U_x = U_y = U_z$; por tanto, $C_x = C_y = C_z$; estas igualdades conducen a que el coeficiente de reducción sea igual para los tres ejes y éste sea de $C = 0{,}816$. Cuando este coeficiente se hace coincidir con 1, se dice que se está realizando un **dibujo isométrico o perspectiva isométrica normalizada;** sin embargo, cuando se aplica, se obtiene una **perspectiva isométrica** o **sistema isométrico.**

D. Determinación gráfica de la escala axonométrica

Previamente a ver cómo se determina una escala de manera gráfica en el sistema axonométrico, es conveniente recordar qué es un triángulo de trazas. Esta figura resulta al seccionar el triedro trirrectángulo por un plano del cuadro π cualquiera y proyectarlo sobre él.

La característica más importante de este triángulo en representación axonométrica es que cada uno de sus lados es perpendicular al eje axonométrico que contiene al vértice opuesto (Fig. 9.9).

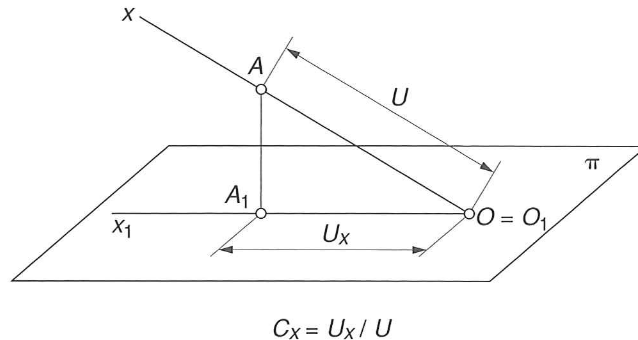
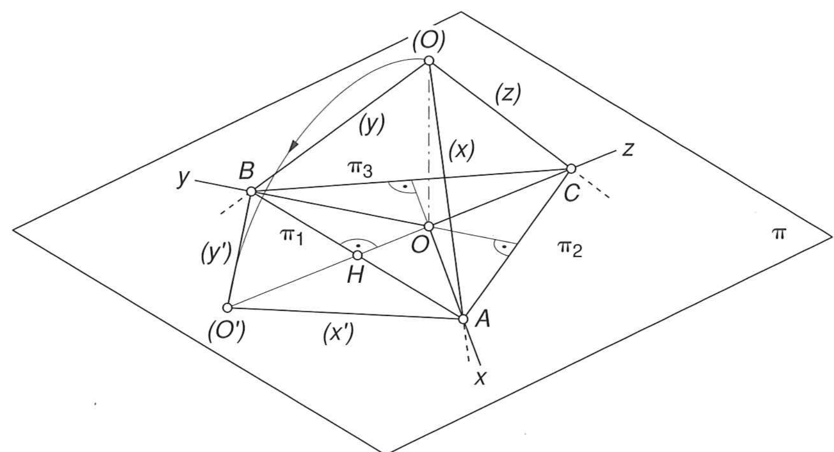


Fig. 9.8. *Sistema axonométrico trimétrico.*



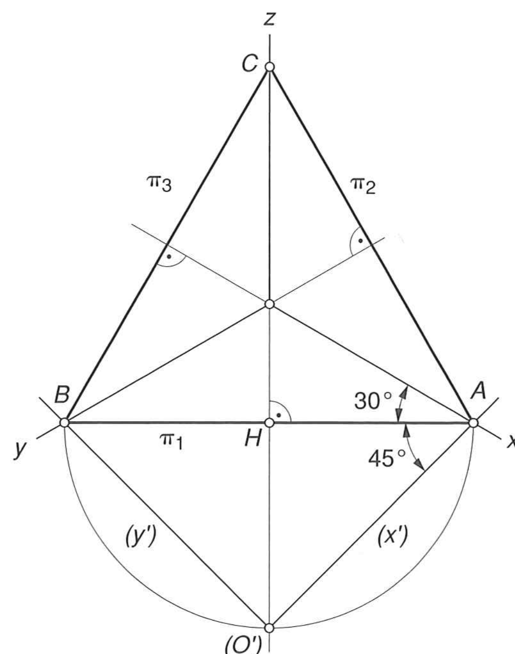
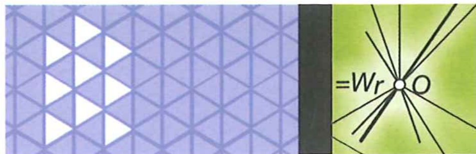


Fig. 9.9. *Triángulo de trazas del sistema isométrico.*



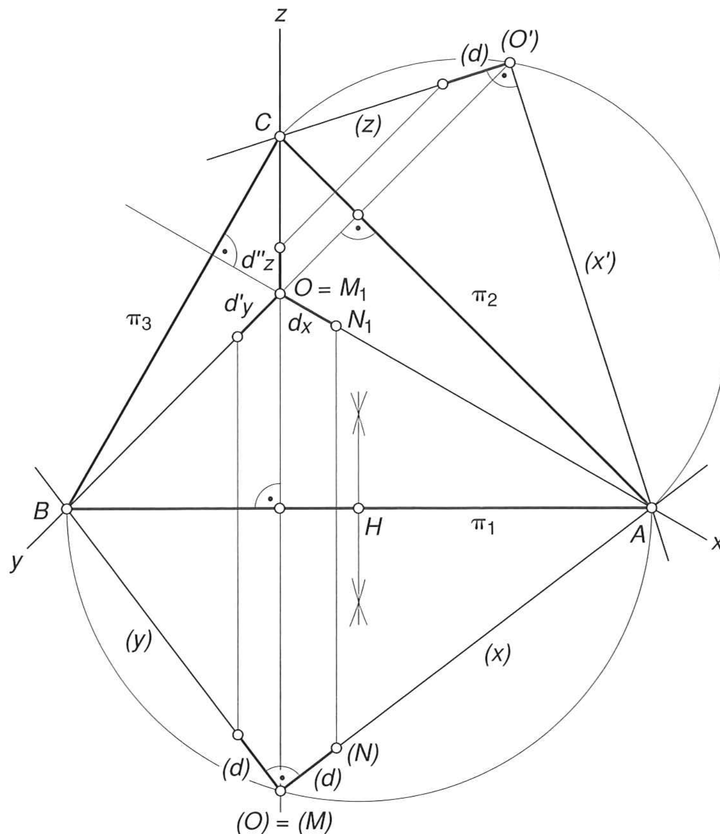


Fig. 9.10. *Determinación de la escala gráfica de un sistema axonométrico.*

A continuación, para determinar la escala gráfica de cualquier sistema axonométrico se actúa del modo siguiente:

1. Se parte de un triedro trirrectángulo de ejes *X*, *Y* y *Z*, y de un plano del cuadro π que corta al citado triedro según un triángulo de trazas de lados *AB*, *AC* y *BC*. En el caso del sistema axonométrico isométrico el triángulo de trazas es equilátero, no teniendo repercusión en ninguna de las perspectivas axonométricas (isométrica, dimétrica y trimétrica) la distancia a la que se sitúe el plano del cuadro respecto al origen del sistema escogido.

2. Se abate sobre el plano del cuadro el triángulo *AOB*, que es rectángulo en el espacio y, por ello, su representación abatida es *A*(*O*)*B*.

   Para ello, por el punto *O* se traza la perpendicular al lado *AB* que hace de eje o charnela en el abatimiento. Se halla la mediatriz de *AB*, obteniendo el punto *H*, centro de la semicircunferencia de radio *AH* que donde ésta corta a la perpendicular se obtiene (*O*) abatido.

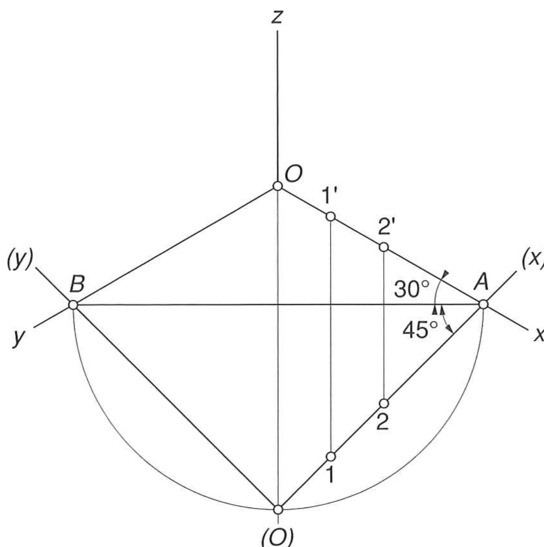
   La construcción llevada a cabo está basada en el arco capaz del segmento *AB* y del ángulo de 90°; cualquier punto de la semicircunferencia unido con *A* y *B* forma un ángulo recto.

3. Las rectas que contienen *A*(*O*) y *B*(*O*) son los ejes (*X*) e (*Y*) respectivamente, abatidos y que, por tanto, se encuentran en verdadera magnitud.

   Sobre estos ejes se pueden llevar segmentos en verdadera magnitud y desabatirlos. Para realizar esta operación se procede como puede apreciarse en la Figura 9.10: dado el segmento (*MN*) se trazan por (*M*) y (*N*) perpendiculares hasta que éstas corten, en este caso, al eje *X*, y se obtiene el segmento M_1N_1.

4. Repitiendo esta operación, ahora con el triángulo *AOC*, se determinan los ejes (*X*) y (*Z*) abatidos, como se comprueba en la Figura 9.10.

Una manera sencilla para construir la escala isométrica mediante la observación de los ángulos que forman los ejes en verdadera magnitud y en proyección es con la escuadra y el cartabón. En la Figura 9.11 se observan las operaciones realizadas.



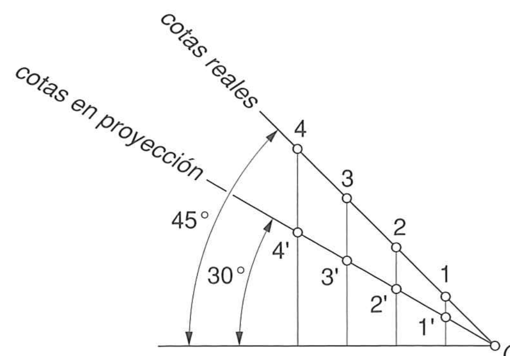
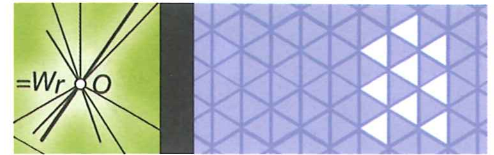


Fig. 9.11. *Construcción de una escala isométrica con escuadra y cartabón.*



9.4. Representación del punto

Un punto A está representado por sus proyecciones sobre los planos coordenados XOY, ZOX y ZOY mediante las siguientes anotaciones: A_1, A_2 y A_3, respectivamente.

Para hallar estas proyecciones y la perspectiva del punto o proyección directa, es decir, la representación de este punto sobre el plano del cuadro, es suficiente con situar sus coordenadas, A (X, Y, Z), sobre los ejes y trazar paralelas a los mismos. Los valores de las coordenadas del punto se han reducido previamente a su representación, como ya se ha explicado anteriormente.

Las proyecciones que determinan un punto toman las siguientes denominaciones:

- Proyección horizontal (plano XOY), A_1.
- Proyección vertical (plano XOZ), A_2.
- Proyección de perfil (plano YOZ) A_3.
- Proyección directa, A.

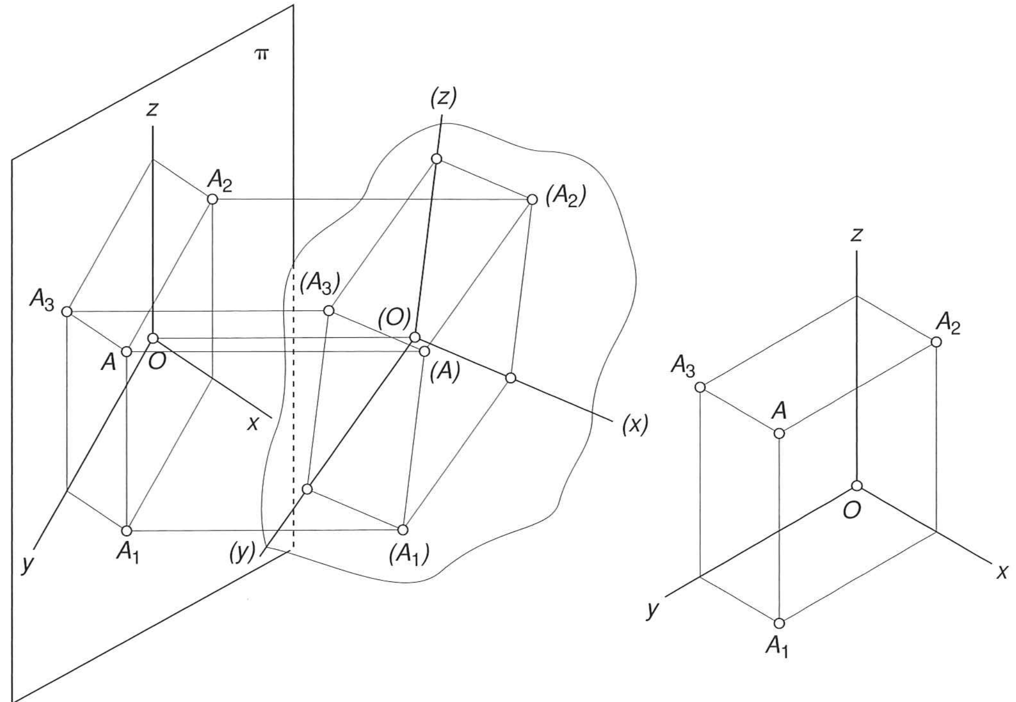


Fig. 9.12. *Representación del punto.*

Dos proyecciones son suficientes para determinar la posición exacta de un punto.

A. Posiciones del punto

El espacio queda dividido en este sistema en ocho triedros trirrectángulos, siendo el primero donde está situado el espectador; por tanto, todos los elementos que estén situados en él serán vistos, mientras que en los demás como norma se entenderán ocultos.

Puntos situados en los triedros

En las siguientes figuras se representan los puntos situados en cada uno de los ocho triedros:

- **Primer triedro.** Los puntos situados en el primer triedro tienen las tres coordenadas positivas, A (X, Y, Z) (Fig. 9.13).

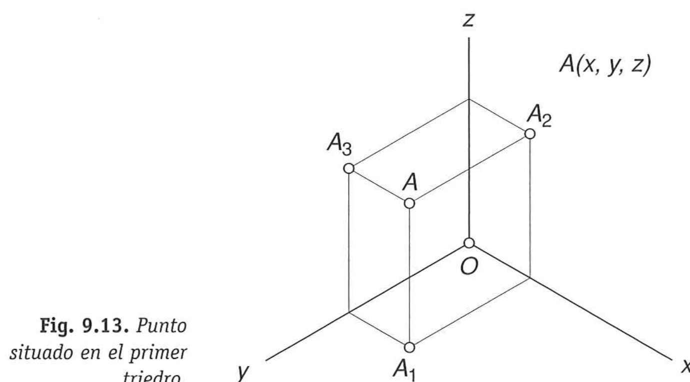


Fig. 9.13. *Punto situado en el primer triedro.*

- **Segundo triedro.** Los puntos del segundo triedro tienen las coordenadas: B $(X, -Y, Z)$ (Fig. 9.14).

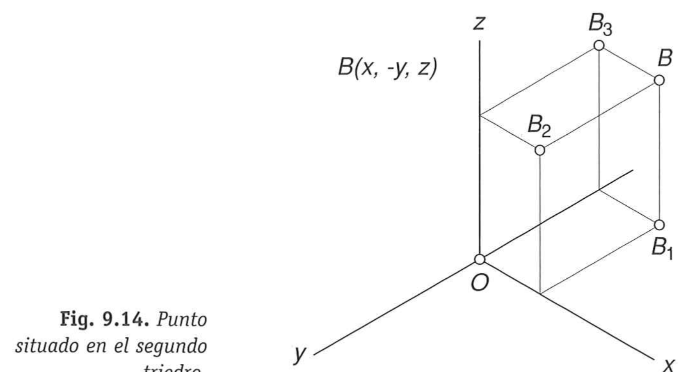


Fig. 9.14. *Punto situado en el segundo triedro.*

- **Tercer triedro.** Los puntos del tercer triedro tienen las coordenadas: *C* (-*X*, –*Y*, *Z*) (Fig. 9.15).

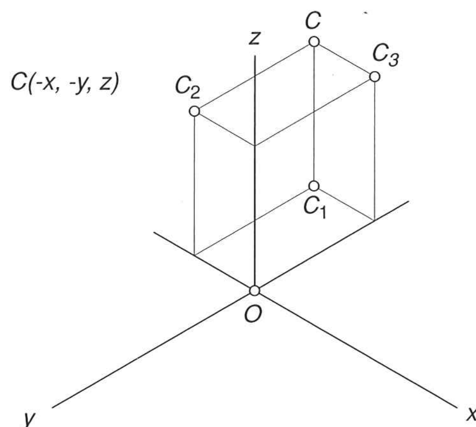


Fig. 9.15. *Punto situado en el tercer triedro.*

- **Cuarto triedro.** Los puntos del cuarto triedro tienen sus coordenadas: *D* (–*X*, *Y*, *Z*) (Fig. 9.16).

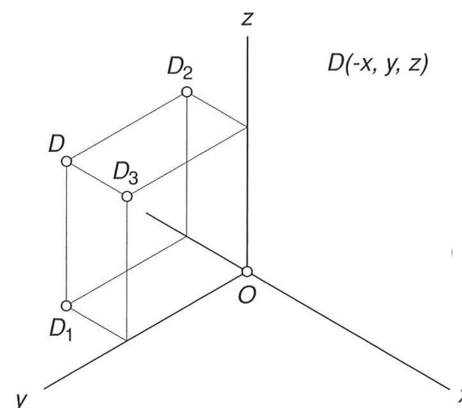


Fig. 9.16. *Punto situado en el cuarto triedro.*

- **Quinto triedro.** Los puntos del quinto triedro tienen sus coordenadas: *E* (*X*, *Y*, –*Z*) (Fig. 9.17).

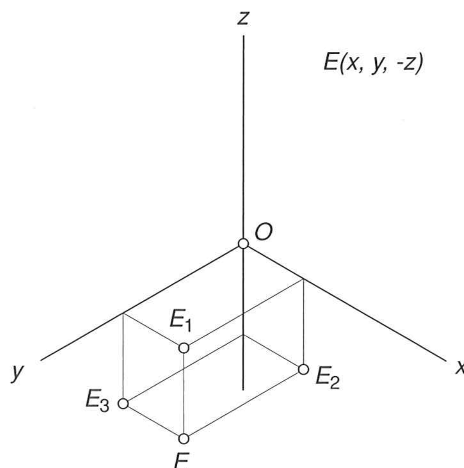


Fig. 9.17. *Punto situado en el quinto triedro.*

- **Sexto triedro.** Los puntos del sexto triedro tienen las coordenadas: *F* (*X*, –*Y*, –*Z*) (Fig. 9.18).

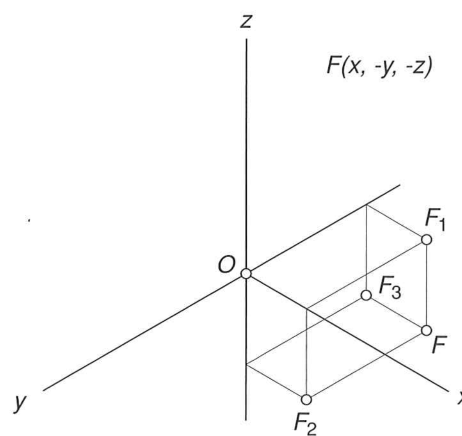


Fig. 9.18. *Punto situado en el sexto triedro.*

- **Séptimo triedro.** Los puntos del séptimo triedro tienen las coordenadas: *G* (–*X*, –*Y*, –*Z*) (Fig. 9.19).

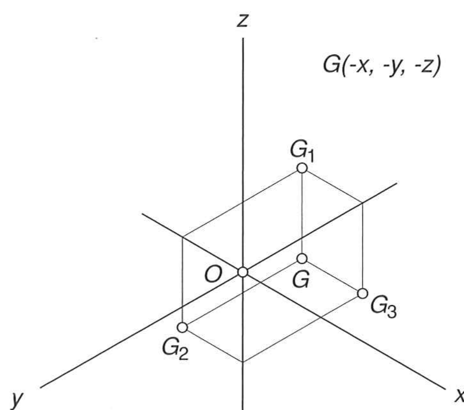


Fig. 9.19. *Punto situado en el séptimo triedro.*

- **Octavo triedro.** Los puntos del octavo triedro tienen las coordenadas: *H* (–*X*, *Y*, –*Z*) (Fig. 9.20).

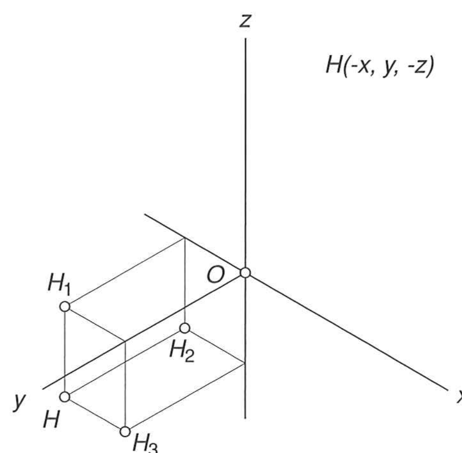
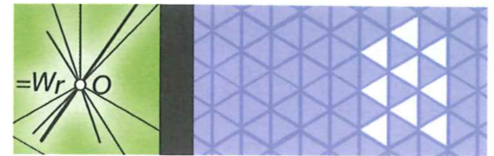


Fig. 9.20. *Punto situado en el octavo triedro.*



▶▶▶ Puntos situados en los planos axonométricos

***Puntos situados en el plano horizontal* (XOY)**

Los puntos que están situados en el plano *XOY*, al formar parte de él se caracterizan por tener su coordenada $Z = 0$. Tienen cuatro posiciones dentro de los ocho triedros (Fig. 9.21).

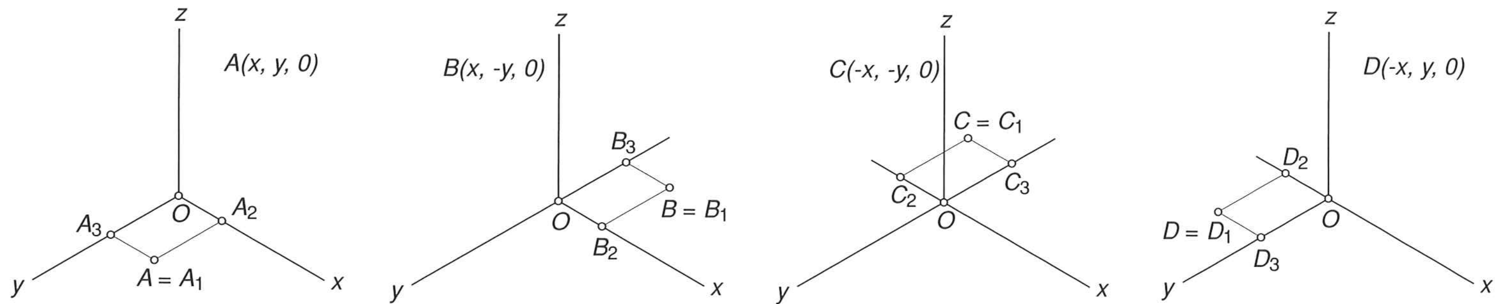


Fig. 9.21. *Representación de puntos situados en el plano horizontal.*

***Puntos situados en el plano vertical* (XOZ)**

Los puntos que están situados en el plano *XOZ*, al formar parte de él se caracterizan por tener su coordenada $Y = 0$. Tienen cuatro posiciones dentro de los ocho triedros (Fig. 9.22).

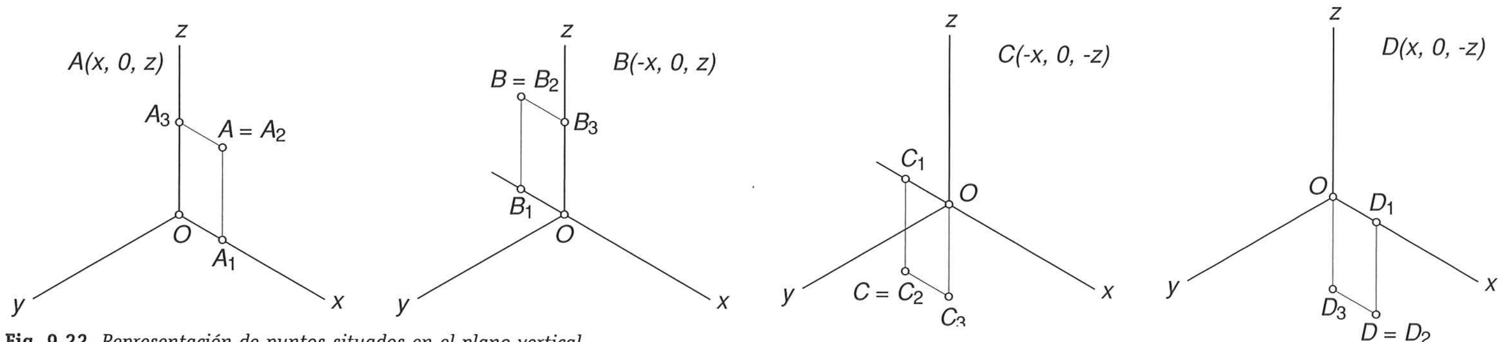


Fig. 9.22. *Representación de puntos situados en el plano vertical.*

***Puntos situados en el plano de perfil* (YOZ)**

Los puntos que están situados en el plano *YOZ*, al formar parte de él se caracterizan por tener su coordenada $X = 0$. Tienen cuatro posiciones dentro de los ocho triedros (Fig. 9.23).

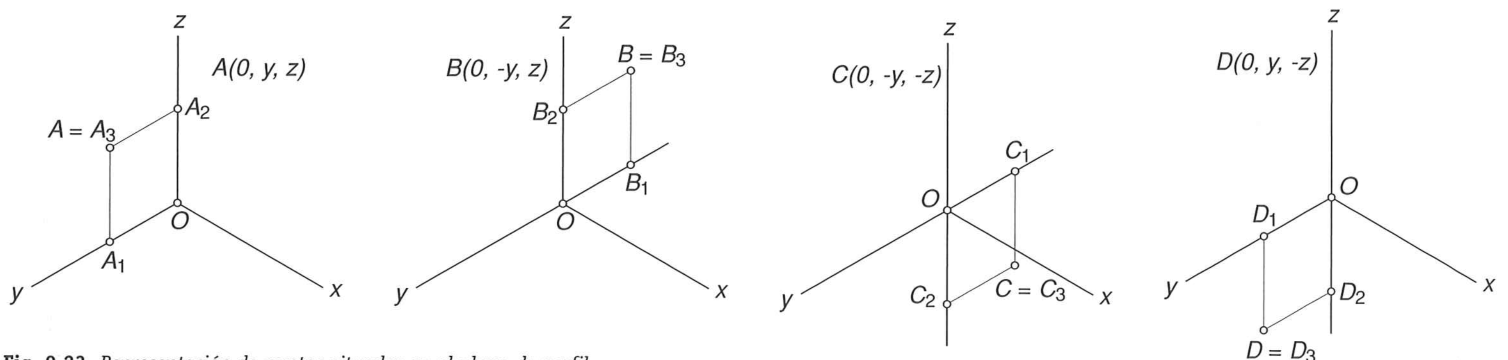


Fig. 9.23. *Representación de puntos situados en el plano de perfil.*



▶▶▶ Puntos situados en los ejes axonométricos

Puntos situados en el eje coordenado X

Los puntos que están situados en el eje *X*, al formar parte de él se caracterizan por tener sus coordenadas $Y = 0$, y $Z = 0$. Tienen dos posiciones dentro de los ocho triedros (Fig. 9.24).

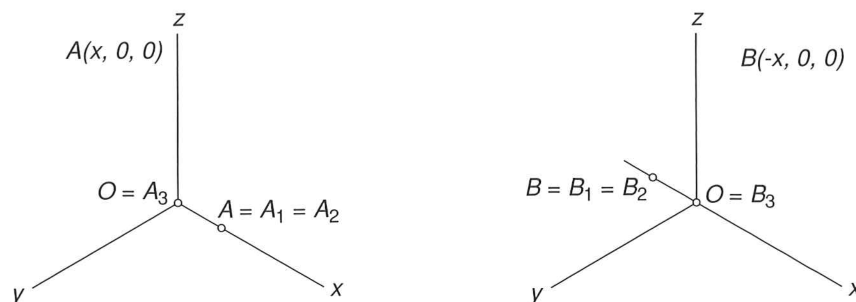


Fig. 9.24. *Representación de puntos situados en el eje coordenado* X.

Puntos situados en el eje coordenado Y

Los puntos que están situados en el eje *Y*, al formar parte de él se caracterizan por tener sus coordenadas $X = 0$, y $Z = 0$. Tienen dos posiciones dentro de los ocho triedros (Fig. 9.25).

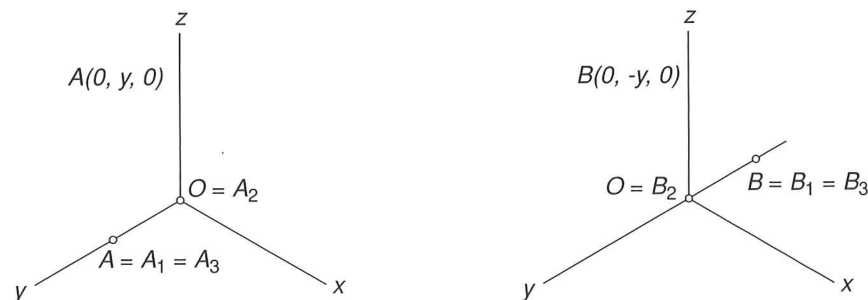


Fig. 9.25. *Representación de puntos situados en el eje coordenado* Y.

Puntos situados en el eje coordenado Z

Los puntos que están situados en el eje *Z*, al formar parte de él se caracterizan por tener sus coordenadas $X = 0$, e $Y = 0$. Tienen dos posiciones dentro de los ocho triedros (Fig. 9.26).

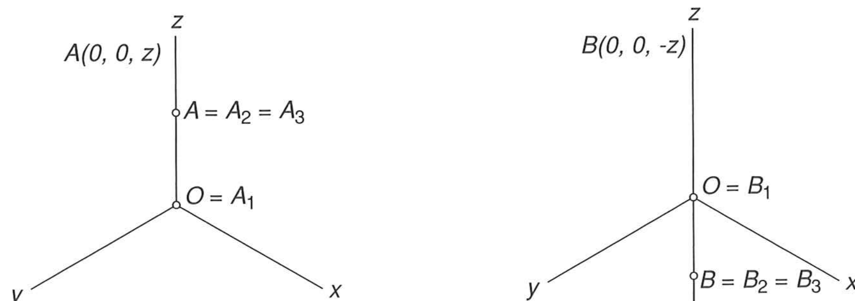


Fig. 9.26. *Representación de puntos situados en el eje coordenado* Z.

Punto situado en el origen O

Al estar situado en el origen del sistema este punto se caracteriza por tener sus tres coordenadas igual a cero, es decir, $O = (0, 0, 0)$ (Fig. 9.27).

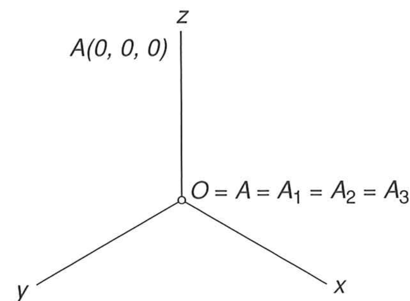
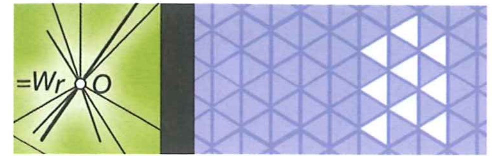


Fig. 9.27. *Representación de puntos situados en el origen* O.



9.5. Representación de la recta

La recta viene representada, como mínimo, por dos de sus cuatro proyecciones, r_1 , r_2, r_3 , y r, proyección directa. Si se conocen las proyecciones de dos de sus puntos, se puede representar la recta que los contiene; para eso, basta con unir las proyecciones homónimas de los puntos, y así se habrá obtenido su representación. En la Figura 9.28 queda reflejado el proceso que se ha seguido para representar en este sistema una recta dada por dos puntos *A* y *B*.

Por consiguiente, las proyecciones que determinan una recta toman las siguientes denominaciones:

- Proyección horizontal (plano *XOY*), r_1.
- Proyección vertical (plano *XOZ*), r_2.
- Proyección de perfil (plano *YOZ*) r_3.
- Proyección directa, *r*.

De lo explicado se deduce que un punto pertenece a una recta si sus proyecciones homónimas coinciden, es decir, A_1 debe de estar formando parte de r_1, y A_2 de r_2.

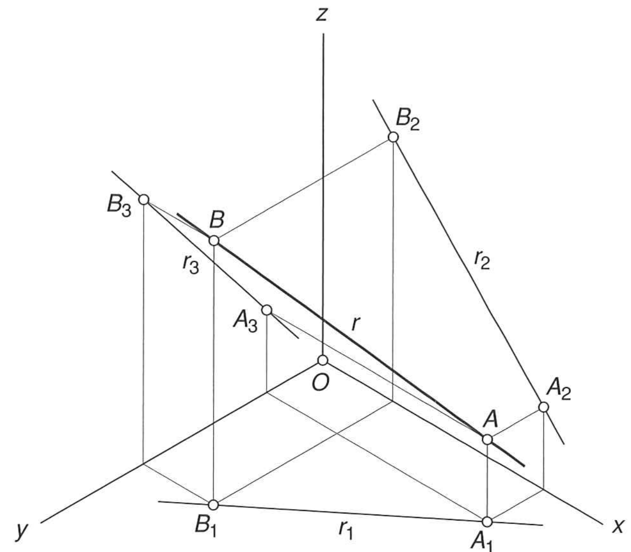


Fig. 9.28. *Representación de una recta.*

A. Trazas, y partes vistas y ocultas de la recta

Las trazas de una recta son los puntos en los que la recta hace intersección con los planos de proyección. En el sistema axonométrico, para hallar las trazas de una recta *r* dadas sus proyecciones r_1 y *r*, se actúa como se ve en la Figura 9.29.

La **traza horizontal de la recta, H_r,** es la intersección de la recta *r* con el plano *XOY*, y se determina donde se corta la proyección directa de la recta, es decir, *r*, con la proyección horizontal r_1. También se puede hallar del siguiente modo: donde r_2 corta al eje *X* se traza una paralela al eje *Y*, y donde ésta corte a *r* o r_1, se obtiene H_r.

La **traza vertical, V_r,** es la intersección de la recta r con el plano *XOZ*, y se halla donde se corta la proyección directa de la recta, es decir, *r*, con la proyección vertical r_2. También se puede hallar del siguiente modo: donde r_1 corta al eje *X* se traza una paralela al eje *Z*, y donde ésta corte a *r* o a r_2, se obtiene V_r.

La **traza sobre el plano de perfil,** o **vertical segunda, W_r,** es la intersección de la recta *r* con el plano *YOZ*, y se halla donde se corta la proyección directa de la recta, es decir, *r*, con la proyección vertical r_3. También se puede hallar del siguiente modo: donde r_1 corta al eje *Y* se traza una paralela al eje *Z*, y donde ésta corte a *r* o a r_3, se obtiene W_r .

Las **partes vistas de una recta,** plano o sólido, como se expuso anteriormente, son aquellas que están situadas en el primer triedro. En el caso de la recta, los puntos que separan la parte vista de la oculta son sus puntos traza, dado que a partir de ellos la recta pasa de un triedro a otro.

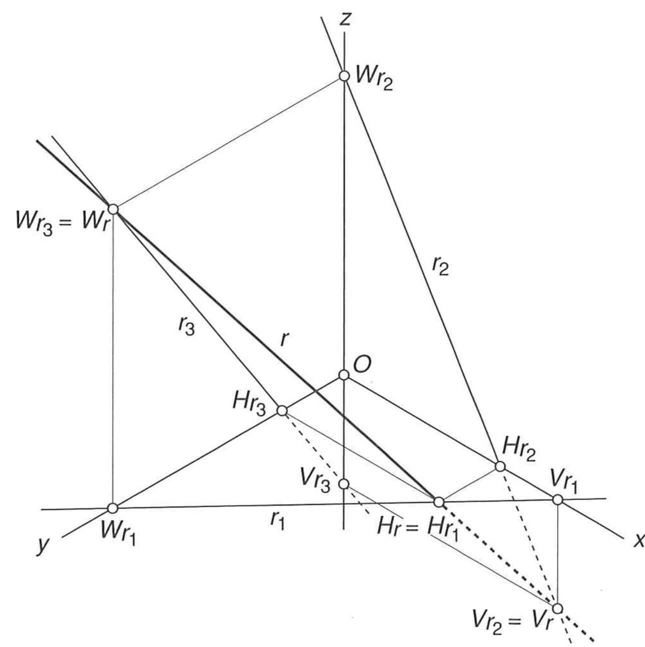
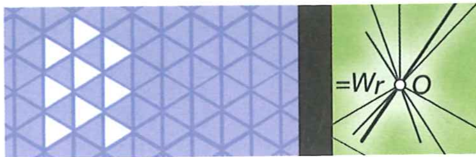


Fig. 9.29. *Trazas de una recta en sistema axonométrico.*



B. Posiciones de la recta

Rectas situadas en los planos axonométricos

Este tipo de rectas, al estar contenidas en los planos axonométricos, se caracterizan por tener la proyección directa de la recta coincidiendo con la proyección correspondiente al plano en que ella está contenida, y lógicamente las otras dos proyecciones están situadas sobre los ejes axonométricos.

En las Figuras 9.30, 9.31 y 9.32 se han representado tres ejemplos de los múltiples casos que existen de rectas contenidas en los planos *XOY*, *XOZ* e *YOZ*, respectivamente.

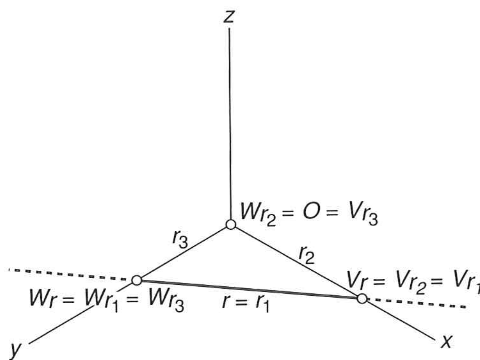


Fig. 9.30. *Recta situadas en el plano* XOY.

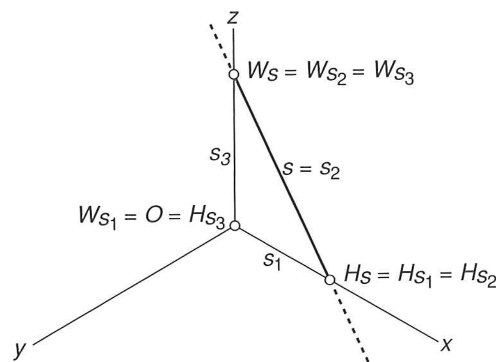


Fig. 9.31. *Recta situadas en el plano* XOZ.

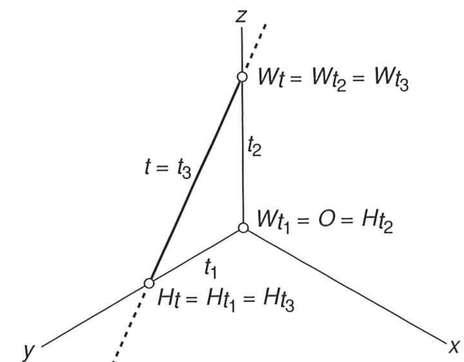


Fig. 9.32. *Recta situadas en el plano* YOZ.

Rectas paralelas a los planos axonométricos

Estas rectas se caracterizan por tener la proyección directa siempre paralela a la proyección de ellas sobre el plano al cual son paralelas.

En la Figura 9.33 se ha representado una recta horizontal (paralela al plano *XOY*); en la Figura 9.34, una recta frontal (paralela al plano *XOZ*); y en la Figura 9.35, una recta frontal segunda (paralela al plano *YOZ*).

Como en el caso anterior, los ejemplos presentados de rectas son unos de los infinitos casos que existen, y que cumplen las características propias de este tipo de rectas.

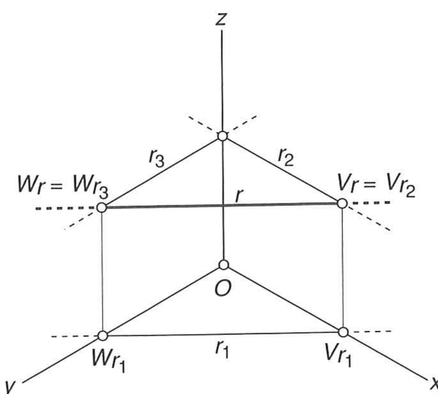


Fig. 9.33. *Recta paralela al plano* XOY.

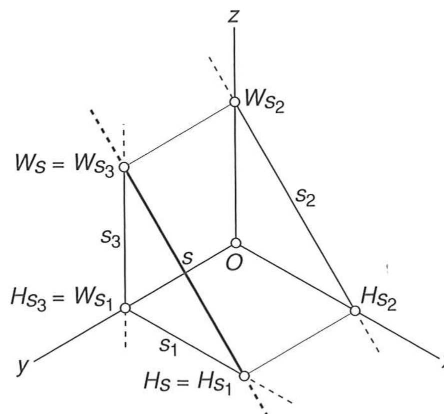


Fig. 9.34. *Recta paralela al plano* XOZ.

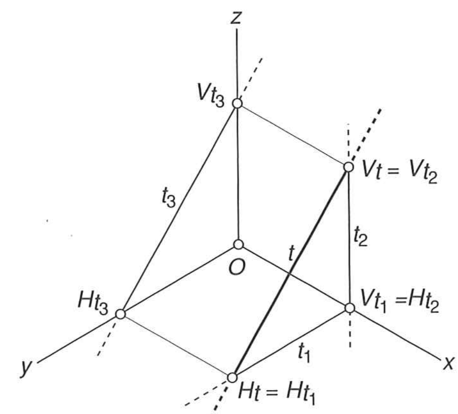
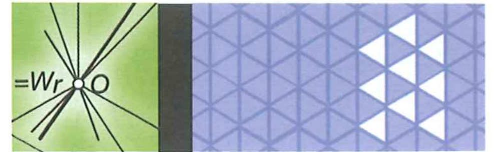


Fig. 9.35. *Recta paralela al plano* YOZ.



▶▶▶ Rectas paralelas a los ejes axonométricos

Las rectas que son paralelas a uno de los ejes axonométricos se identifican por que son perpendiculares al plano formado por los otros dos ejes restantes. Se han escogido para su observación las siguientes: en la Figura 9.36, se ha representado una recta paralela al eje *X*, o de punta al plano vertical segundo (*YOZ*); en la Figura 9.37, una recta paralela al eje *Y*, o de punta al plano vertical (*XOZ*); y en la Figura 9.38, una recta paralela al eje *Z*, o vertical al plano horizontal (*XOY*).

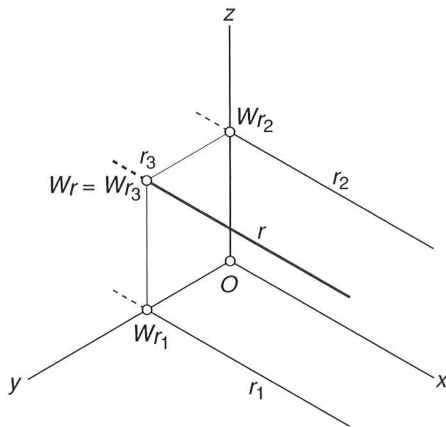


Fig. 9.36. *Recta paralela al eje* X.

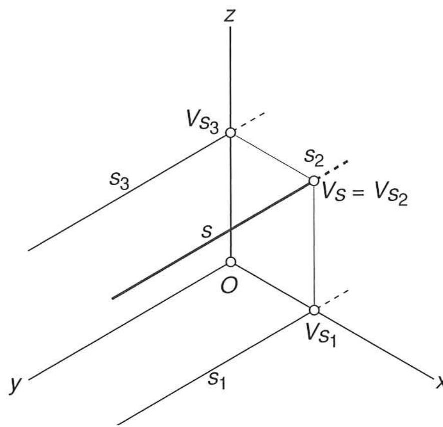


Fig. 9.37. *Recta paralela al eje* Y.

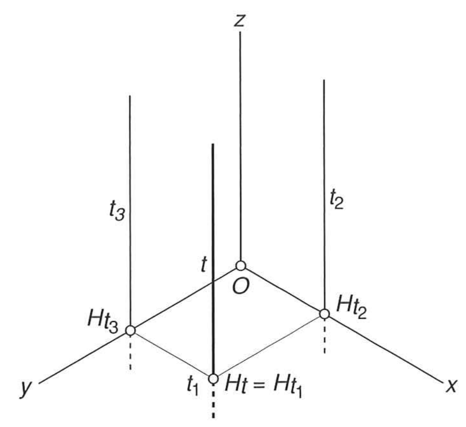


Fig. 9.38. *Recta paralela al eje* Z.

▶▶▶ Rectas oblicuas que cortan a los ejes axonométricos

Se han tomado como ejemplos de este tipo de rectas las que aparecen en las Figuras 9.39, 9.40 y 9.41, que se cortan con los ejes *X*, *Y* y *Z*, respectivamente.

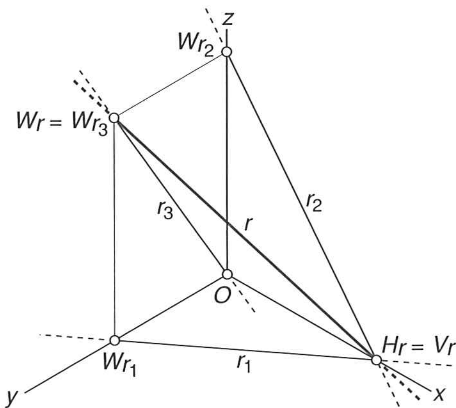


Fig. 9.39. *Recta que corta el eje* X.

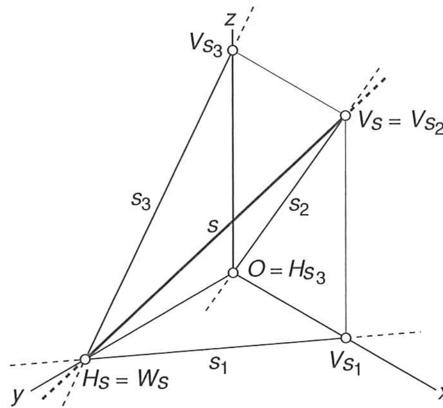


Fig. 9.40. *Recta que corta el eje* Y.

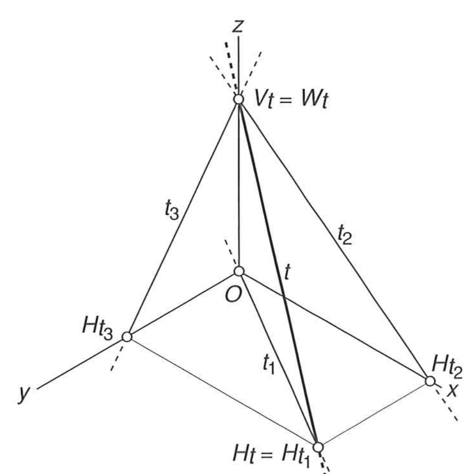


Fig. 9.41. *Recta que corta el eje* Z.

Rectas que pasan por el origen del sistema axonométrico

Al pasar por el origen del triedro estas rectas, sus tres trazas coinciden en el citado punto; para representar las proyecciones de este tipo de rectas es conveniente apoyarse en otro punto, por ejemplo *A*, y así poder representarla correctamente (Fig. 9.42).

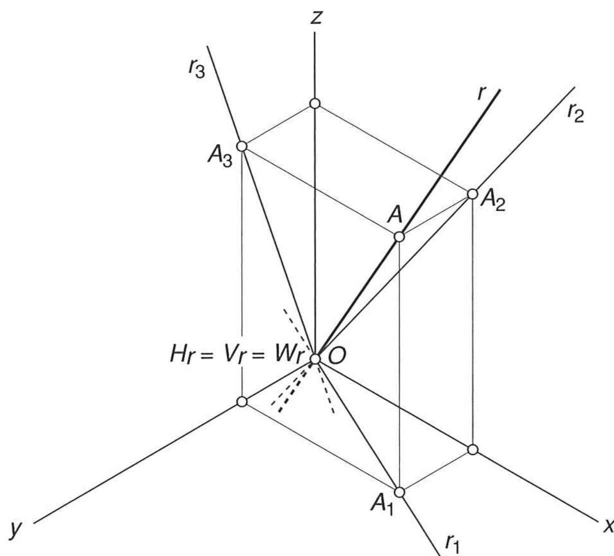


Fig. 9.42. *Recta que pasa por el origen del sistema axonométrico.*

Rectas perpendiculares al plano del cuadro

Se caracterizan estas rectas porque su proyección directa se representa como un punto, en el que coinciden las proyecciones directas de todos los puntos de la citada recta, y además, las proyecciones, r_1, r_2, y r_3, de la recta sobre los planos axonométricos, son paralelas a los ejes del sistema (Fig. 9.43).

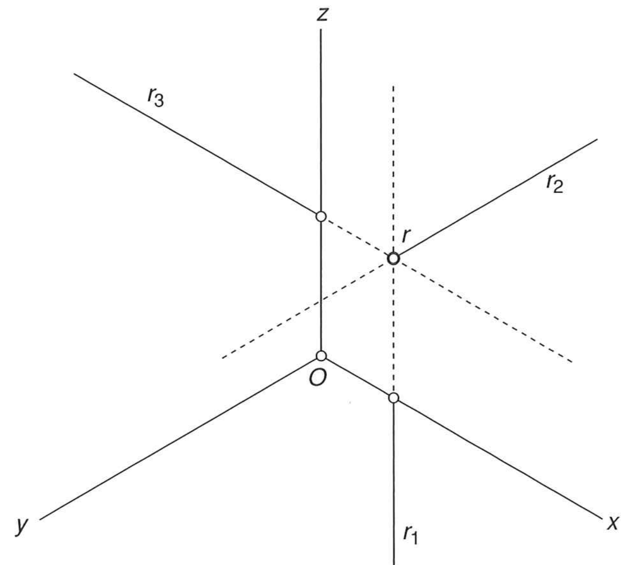


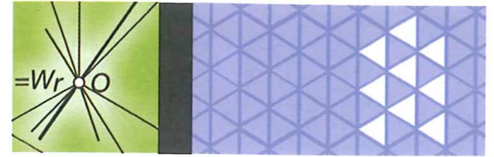
Fig. 9.43. *Recta perpendicular al plano del cuadro.*

9.6. Representación del plano

En el sistema axonométrico ortogonal, un plano α está determinado por las trazas de éste con los planos del triedro trirrectángulo, es decir, la intersección de α con *XOY* determina la traza α_1; con *XOZ*, la traza α_2; y por último, con *YOZ*, la traza α_3, definiendo el llamado triángulo entre trazas.

Las trazas de un plano α se cortan dos a dos en los puntos de intersección de α con los ejes axonométricos, y se denominan del modo siguiente: T_x, T_y y T_z. Estos puntos representan las coordenadas axonométricas del plano, α (α_x, α_y, α_z). Para trabajar con los valores dados en las coordenadas, previamente hay que aplicarle el correspondiente coeficiente de reducción.

Un plano puede estar determinado, al igual que en el sistema diédrico, por tres puntos no alineados, dos rectas que se cortan, una recta y un punto exterior a ella, o dos rectas paralelas.



A. Relaciones de pertenencia entre punto, recta y plano

Para que una recta esté contenida en un plano, las trazas de la recta han de estar formando parte de las trazas del plano.

Para que un punto pertenezca a un plano, ese punto debe corresponder a una de las rectas que configuran el plano. Para ello, las proyecciones homónimas del punto han de coincidir con las de la recta.

La recta *r* situada en el plano α se observa que cumple lo citado anteriormente (Fig. 9.44).

La traza V_r de la recta está formando parte de la traza α_2 del plano; la H_r está sobre la traza α_1 ; y por último, la W_r también está dentro de la traza α_3 del plano.

El punto *A* señalado pertenece a la recta *r* y, por tanto, al plano α.

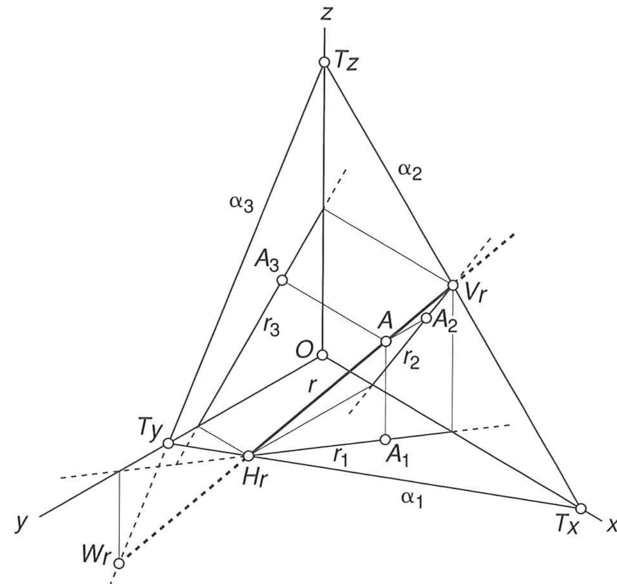


Fig. 9.44. *Punto perteneciente a una recta contenida en un plano.*

Trazado de un plano dados tres puntos no alineados

Se opera de igual modo que en el sistema diédrico ortogonal, es decir, se unen los puntos dos a dos para obtener dos rectas que se cortan en uno de ellos. Se hallan las trazas de cada recta, y se unen las trazas homólogas de cada una de las rectas, determinando así las trazas del plano que contiene a los puntos.

Veamos cómo se halla un plano α que viene dado por los puntos *A*, *B* y *C*:

1. Se unen mediante una recta *r* los puntos *A* y *B*; de igual modo, con la recta *s* se unen *B* y *C*.

2. Se hallan las trazas H_r, V_r, y W_r de la recta *r*, se realiza la misma operación con la recta *s* determinando las trazas H_s, V_s y W_s.

3. Se unen las trazas horizontales H_r con H_s para obtener la traza horizontal α_1.

Esta operación se repite, tanto con V_r y V_s para hallar la traza vertical α_2, como con W_r y W_s para determinar la traza α_3.

En caso de que el plano sea oblicuo a los planos coordenados, las trazas α_1 y α_2 deben cortarse en el eje *X* en el punto T_x; las trazas α_2 y α_3 en el eje *Z* en el punto T_z; y por último, las trazas α_1 y α_3 en el eje *Y* en el punto T_y.

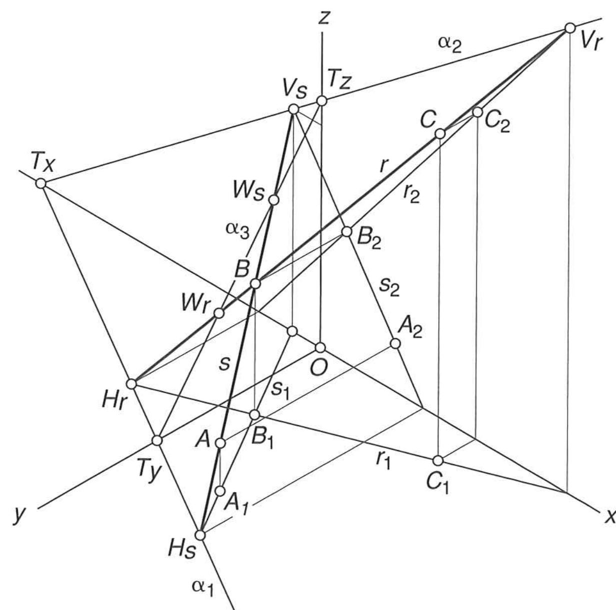


Fig. 9.45. *Trazado de un plano a partir de tres puntos.*



Rectas pertenecientes a un plano α

Rectas oblicuas

Se denomina así a las rectas que, perteneciendo al plano α, son oblicuas a los planos coordenados del sistema, y por tanto, tiene traza con ellos. Un ejemplo de este tipo de recta son las trazadas, *r* y *s* de las Figuras 9.45 (ver más arriba).

Rectas horizontales del plano

Son las que, perteneciendo al plano α, son paralelas al plano horizontal (*XOY*); por tanto, estas rectas carecen de traza con ese plano. Otra característica es que las proyecciones *r* y r_1 son paralelas a la traza del plano α_1, y las proyecciones r_2 y r_3 son paralelas a los ejes *X* e *Y*, respectivamente (Fig. 9.46).

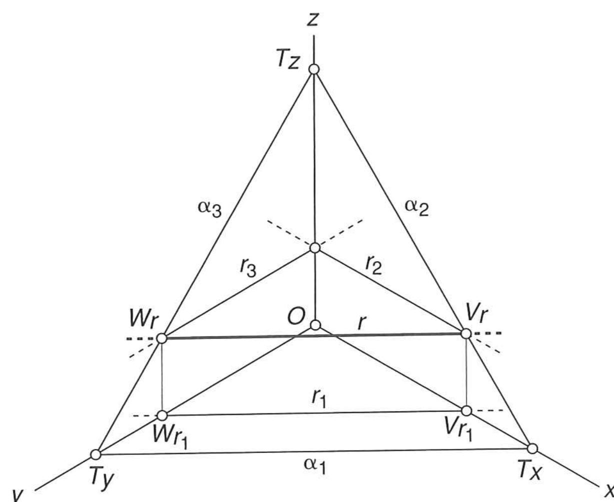


Fig. 9.46. *Recta horizontal del plano.*

Rectas frontales de plano

Son las que, perteneciendo al plano α, son paralelas al plano vertical (*XOZ*); por tanto, estas rectas carecen de traza con ese plano. Las proyecciones *r* y r_2 son paralelas a la traza del plano α_2, y las proyecciones r_1 y r_3 son paralelas a los ejes *X* y *Z*, respectivamente (Fig. 9.47).

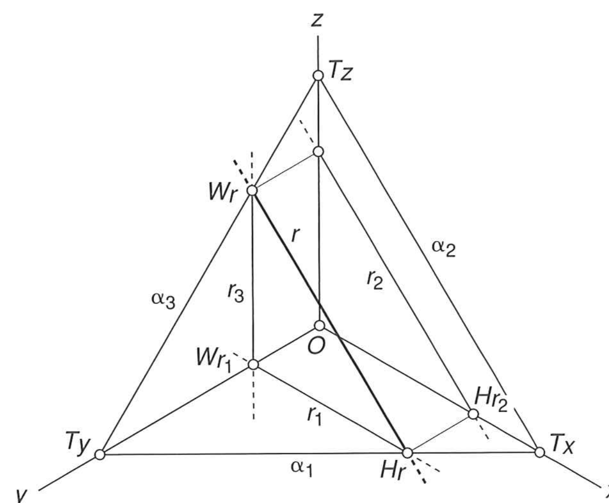


Fig. 9.47. *Recta frontal del plano.*

Rectas frontales segundas del plano

Son las que, perteneciendo al plano α, son paralelas al plano vertical segundo (*YOZ*); por tanto, estas rectas carecen de traza con ese plano. Las proyecciones *r* y r_3 son paralelas a la traza del plano α_3 , y las proyecciones r_1 y r_2 son paralelas a los ejes *Y* y *Z*, respectivamente.

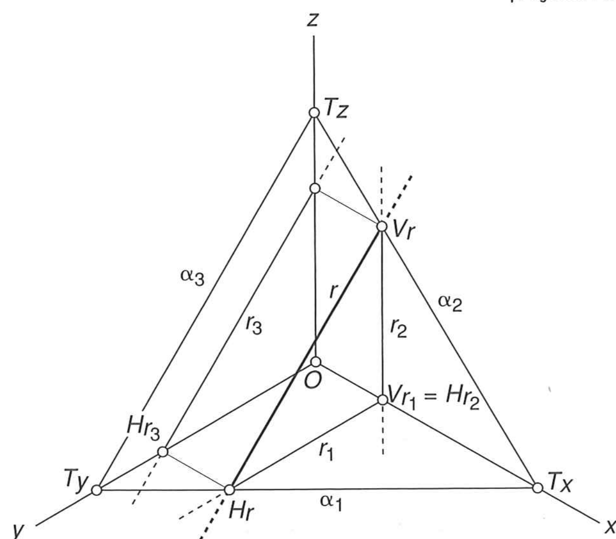


Fig. 9.48. *Recta frontal segunda del plano.*



B. Posiciones del plano

Planos perpendiculares a los planos axonométricos

Existen los siguientes casos:

- Que el plano, α, sea perpendicular al plano *XOY*, es decir al horizontal, y por tanto tiene, como puede apreciarse en la Figura 9.49, las trazas α_2 y α_3 paralelas al eje axonométrico *Z*.

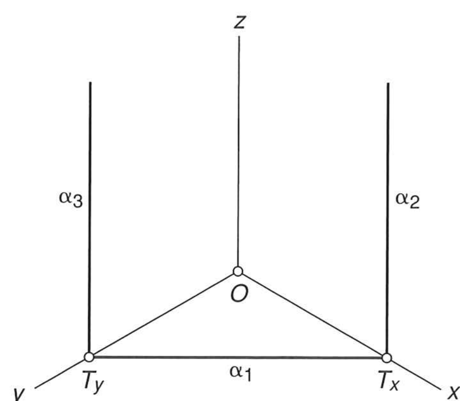


Fig. 9.49. *Plano perpendicular al plano* XOY.

- Que el plano, β, sea perpendicular al plano *XOZ*, es decir al vertical, por lo que las trazas β_1 y β_3 son paralelas al eje *Y* (Fig. 9.50).

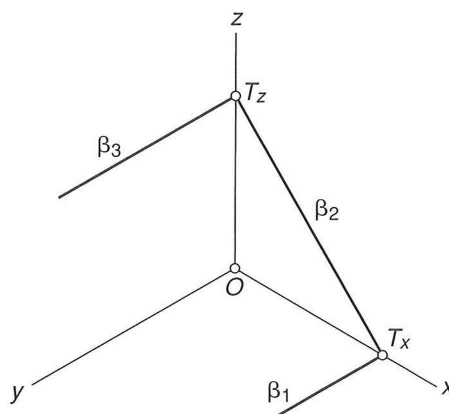


Fig. 9.50. *Plano perpendicular al plano* XOZ.

- Que el plano, γ, sea perpendicular al plano *YOZ*, es decir al plano de perfil o vertical segundo, por tanto las trazas γ_1 y γ_2 son paralelas al eje *X* (Fig. 9.51).

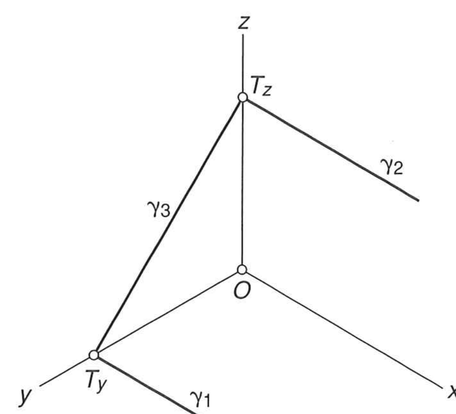


Fig. 9.51. *Plano perpendicular al plano* YOZ.

Planos paralelos a los planos axonométricos

Existen los siguientes casos:

- Que el plano, α, sea paralelo al plano *XOY*, es decir al horizontal, y por tanto tiene la traza α_2 paralela al eje *X*, y α_3 paralela al eje *Y* (Fig. 9.52).

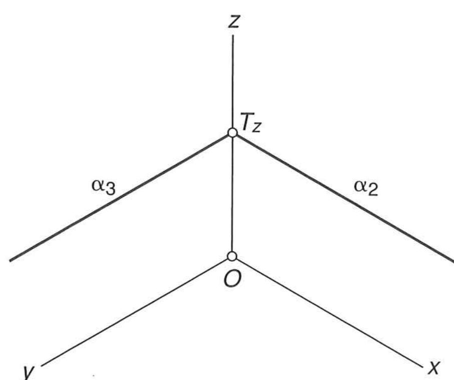


Fig. 9.52. *Plano paralelo al plano* XOY.

- Que el plano, β, sea paralelo al plano *XOZ*, es decir al vertical, por lo que la traza β_1 es paralela al eje *X*, y β_3 es paralela al eje *Z* (Fig. 9.53).

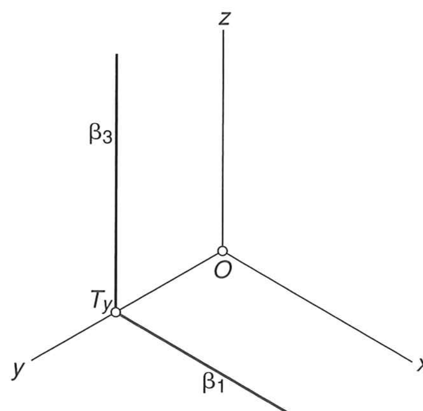


Fig. 9.53. *Plano paralelo al plano* XOZ.

- Que el plano, γ, sea paralelo al plano *YOZ*, es decir al plano de perfil o vertical segundo, por tanto la traza γ_1 es paralela al eje *Y*, y γ_2 es paralela al eje *Z* (Fig. 9.54).

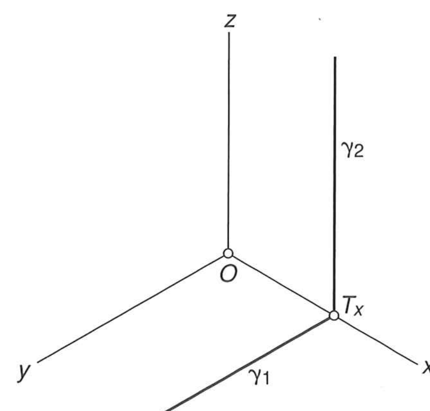
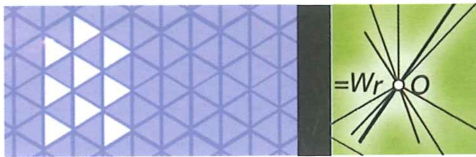


Fig. 9.54. *Plano paralelo al plano* YOZ.



▶▶▶ Planos que contienen a los ejes axonométricos

Existen los siguientes casos:

- Que el plano, α, contenga al eje *X*, las trazas α_1 y α_2 están contenidas en el propio eje *X* (Fig. 9.55).

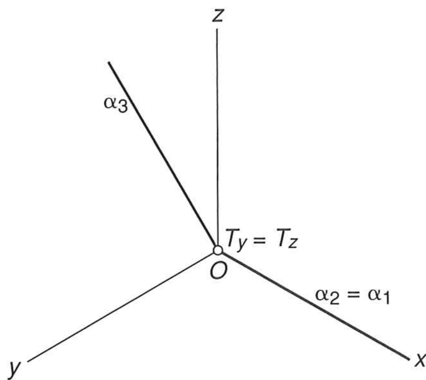


Fig. 9.55. *Plano que contiene al eje X.*

- Que el plano, β, contenga al eje *Y*, las trazas β_1 y β_3 están contenidas en el propio eje *Y* (Fig. 9.56).

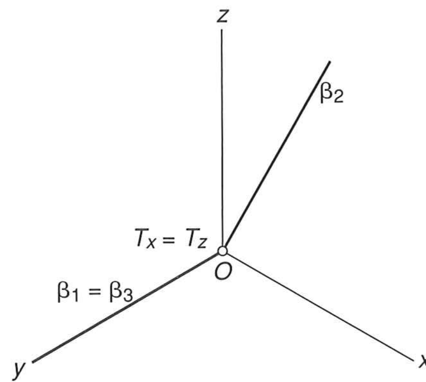


Fig. 9.56. *Plano que contiene al eje Y.*

- Que el plano, γ, contenga al eje *Z*, las trazas γ_2 y γ_3 están contenidas en el propio eje *Z* (Fig. 9.57).

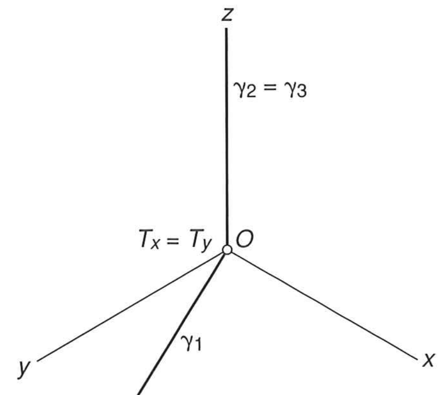
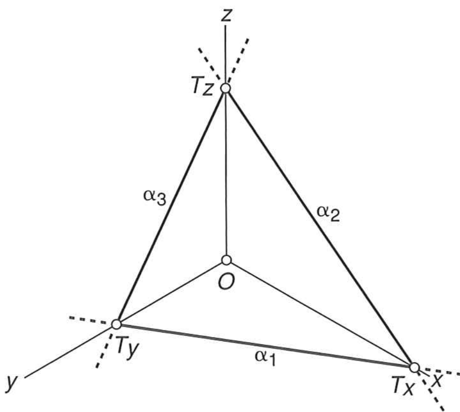
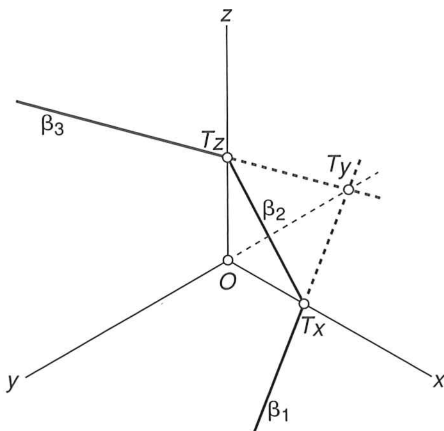


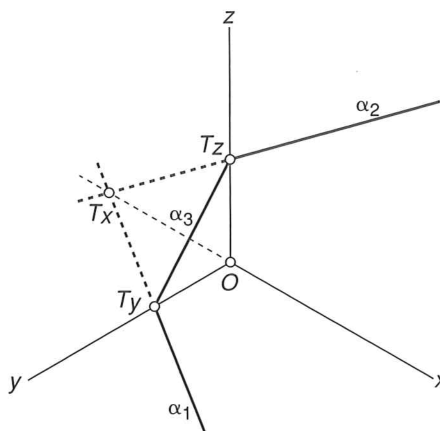
Fig. 9.57. *Plano que contiene al eje Z.*

▶▶▶ Planos oblicuos a los planos axonométricos

Existen infinitos planos oblicuos a los planos axonométricos, por tanto veremos de manera gráfica algunos de los más significativos (Fig. 9.58).







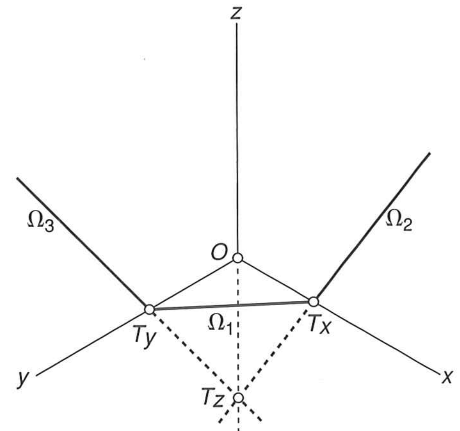
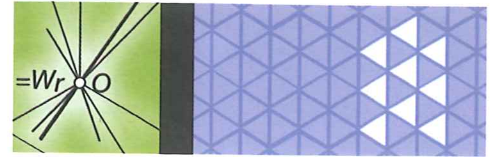


Fig. 9.58. *Planos oblicuos a los planos axonométricos.*



▶▶▶ Planos perpendiculares al plano del cuadro

Se caracteriza este tipo de planos porque al proyectarse sobre el plano de cuadro aparece como una línea recta; esto es debido a que sus tres trazas son coincidentes (Fig. 9.59).

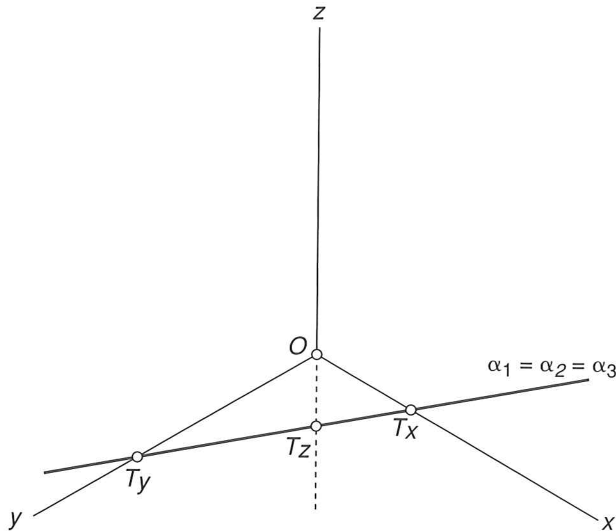


Fig. 9.59. *Plano perpendicular al plano del cuadro.*

▶▶▶ Plano paralelo al plano del cuadro

Un plano paralelo al plano del cuadro es, como se explicó anteriormente, un triángulo de trazas; por tanto, se caracteriza porque sus lados son perpendiculares a los ejes axonométricos del sistema (Fig. 9.60).

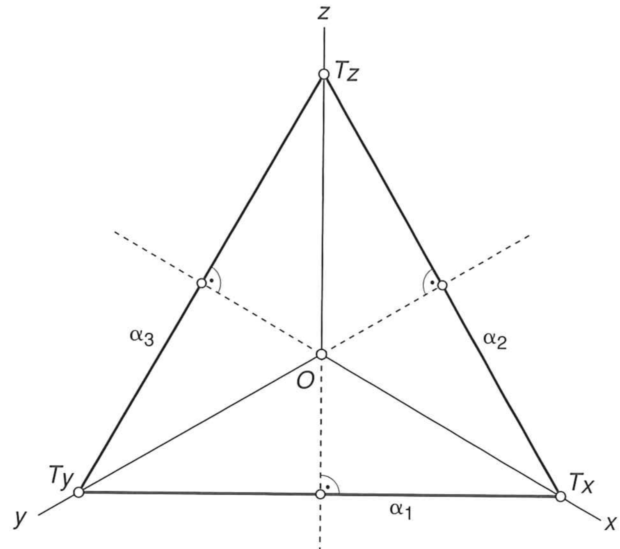


Fig. 9.60. *Plano paralelo al plano del cuadro.*

9.7. Intersección entre planos

La intersección entre dos planos es una recta, de igual modo que en el sistema diédrico ortogonal, y ésta debe cumplir la condición de estar simultáneamente situada en los dos planos.

Por tanto, para hallar la recta de intersección entre dos planos basta con determinar dónde se cortan las trazas homónimas de los planos, y los puntos obtenidos son las trazas de la recta de intersección.

Dados los planos α y β, se ve que las α_1 y β_1 se cortan en el punto H_r, que es una traza de la recta de intersección. Las trazas α_3 y β_3 también se cortan en el punto W_r, que es otro de los puntos necesarios para que la recta de intersección quede determinada.

Como puede verse en la Figura 9.61, es suficiente con hallar dos de las tres posibles trazas que tiene la recta.

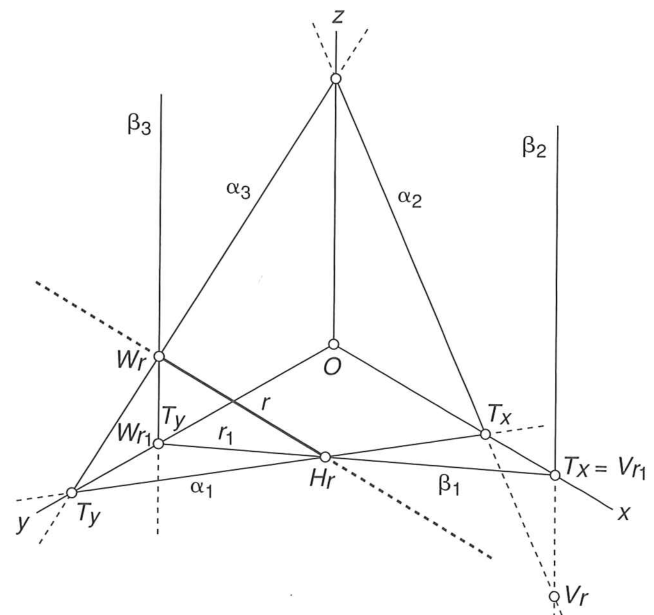


Fig. 9.61. *Intersección entre dos planos.*

9.8. Intersección entre recta y plano

Para determinar el punto de intersección de una recta con un plano se actúa como en el sistema diédrico ortogonal.

Veamos los pasos a dar con un ejemplo: dada la recta r, hallar su intersección con el plano α.

1. Se traza un plano β que contenga a la recta r. Para ello, es aconsejable tomar planos que sean proyectantes, en este caso se ha hecho pasar el plano β perpendicular al plano coordenado *XOY*.

   Lógicamente β_1, traza horizontal del plano auxiliar, coincide con la proyección r_1 de la recta.

2. Se halla la intersección del plano α con el plano auxiliar β, de la manera expuesta anteriormente en el apartado "Intersección entre planos", obteniendo de este modo la recta de intersección s.

3. Donde la recta s corta a la recta r queda determinado el punto I de intersección de la recta con el plano (Fig. 9.62).

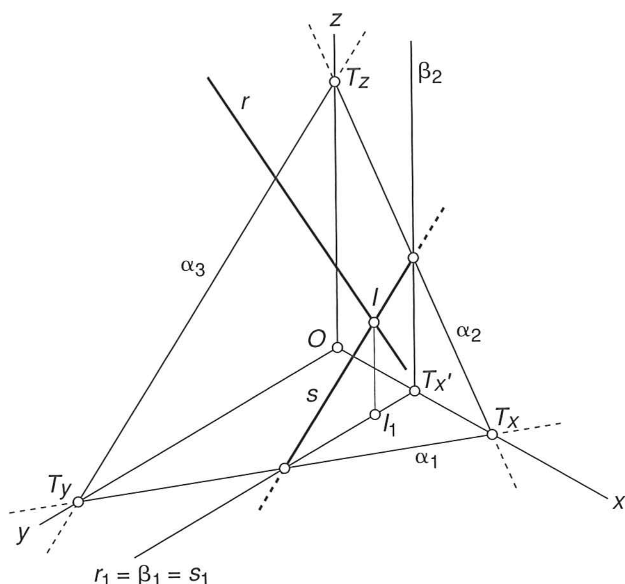


Fig. 9.62. *Intersección entre una recta y un plano.*

9.9. Trazado de formas planas

La mejor estrategia para dibujar formas planas complejas consiste en inscribirlas en otras de configuración más sencilla, como cuadrados o rectángulos. Así, se trazan las perspectivas de estas figuras elementales de apoyo y sobre ellas se sitúan los puntos importantes, como vértices, centros o puntos significativos de curvas de la figura que se quiere representar.

Veamos el desarrollo gráfico seguido para representar un pentágono regular en los diferentes planos axonométricos (*XOY*, *XOZ* e *YOZ*), en dibujo isométrico, o en sistema isométrico; en éste último los valores de las coordenadas de los puntos se han de reducir previamente a su representación (Fig. 9.63).

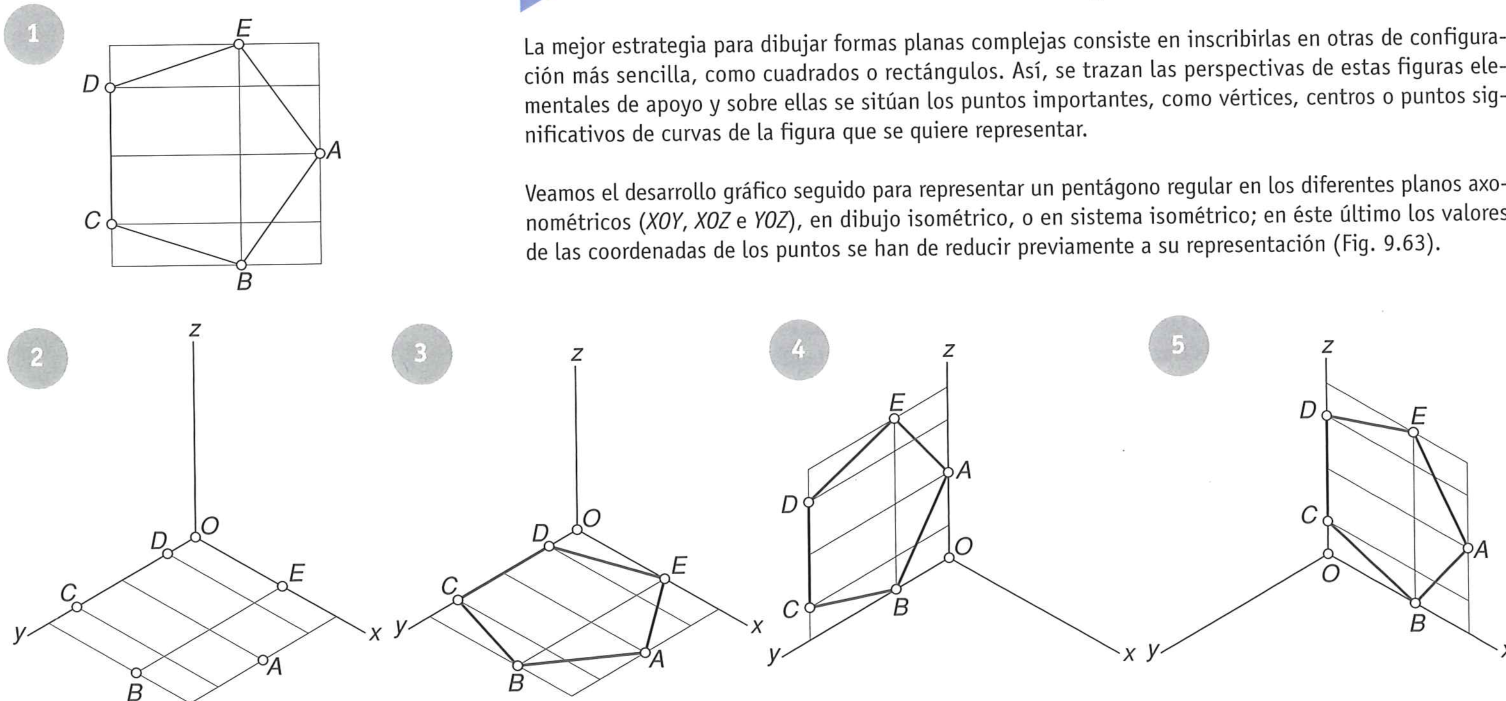
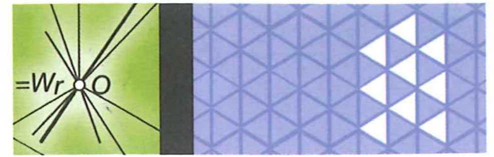


Fig. 9.63. *Trazado de un pentágono regular en los tres planos axonométricos.*



Supongamos que se necesita representar una figura cuyos lados no son paralelos a los ejes, pero que dicha figura sí es paralela a uno de los planos coordenados, por ejemplo al *XOY*, con una distancia *d* a él. Los datos son los que se desprenden de la Figura 9.64, y los pasos dados para su solución, los siguientes:

1. Se sitúa el cuadrado en una retícula ortogonal.
2. Se dibuja la retícula en perspectiva, trazando paralelas a los ejes.
3. Se sitúan los vértices del cuadrado sobre la retícula y se construye éste.
4. Desde los vértices A_1, B_1, C_1 y D_1, se trazan paralelas al eje Z, y sobre ellas se lleva la distancia d con lo que resultan los vértices de la figura, *A*, *B*, *C* y *D*.

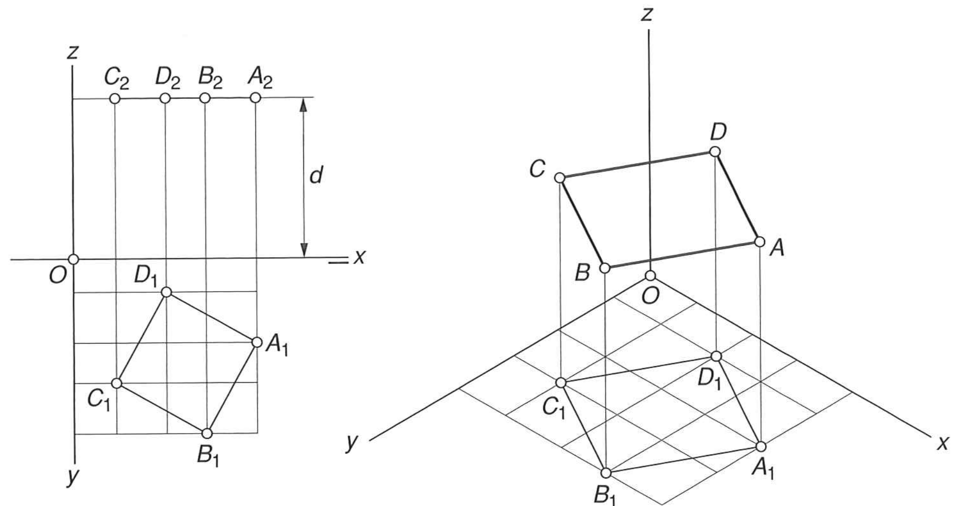


Fig. 9.64. *Representación de un cuadrado paralelo a XOY, pero de lados no paralelos a ningún eje.*

A. Trazado de la circunferencia

La representación de la circunferencia en el sistema isométrico es una elipse. Sin embargo, en el denominado dibujo isométrico se admite el óvalo inscrito en el rombo, figura en la que se transforma el cuadrado circunscrito a la circunferencia como sustituto de la elipse isométrica.

En primer lugar, veamos cómo se transforma una **circunferencia en elipse** en el **sistema axonométrico,** y los pasos dados para su representación en el plano *XOY*, o en cualquier otro plano paralelo a él:

1. Se parte del cuadrado que circunscribe a la circunferencia *A*, *B*, *C* y *D*; se trazan las diagonales y las paralelas medias del cuadrado, obteniendo ocho puntos al hacer intersección la circunferencia con ellas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8).
2. Este cuadrado se transforma en el rombo *A'*, *B'*, *C'* y *D'*, una vez aplicada la reducción que tiene el sistema isométrico a los lados del cuadrado.

   Se trazan también sus diagonales y paralelas medias.

   Sobre un lado del rombo, y perpendicular a él, se traza una semicircunferencia inscrita en la mitad del cuadrado *A*, *B*, *C* y *D*.
3. Se obtiene la elipse con ocho puntos; cuatro son los puntos tangentes al rombo (1, 3, 5 y 7), y los cuatro restantes son los que determinan las diagonales trazadas al citado rombo (2, 4, 6 y 8).
4. Una vez hallados los puntos, se unen éstos a mano alzada o con plantillas de curvas.

La construcción de la elipse como transformada de una circunferencia en los planos *XOZ* e *YOZ* se realiza de la misma manera que se a realizado la contenida o paralela al plano *XOY* (Fig. 9.65).

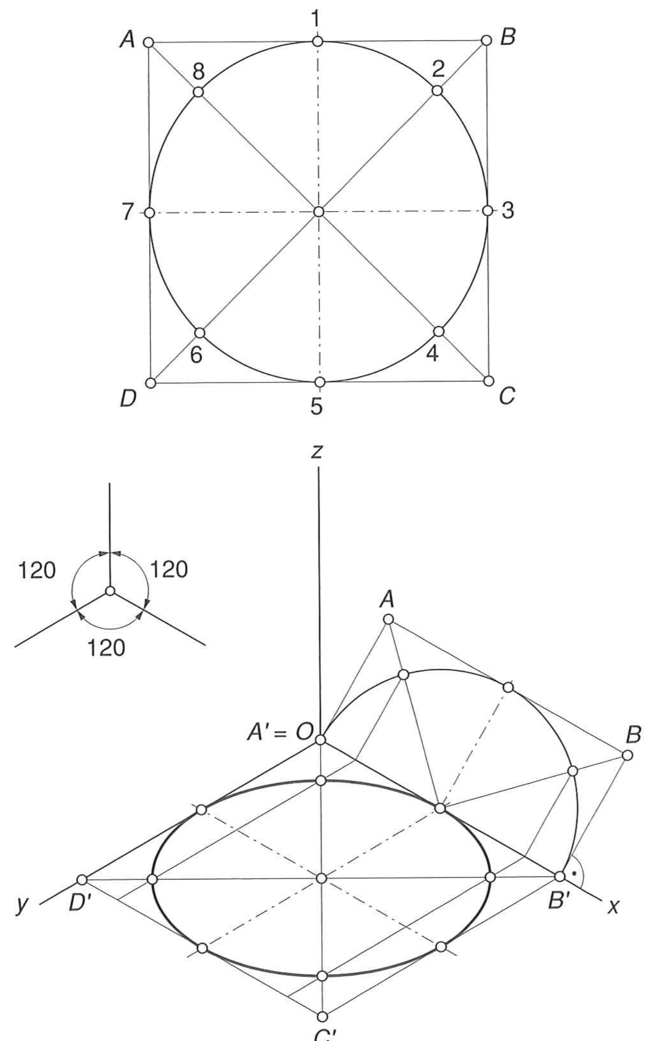
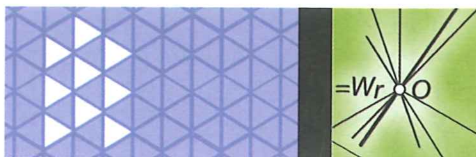
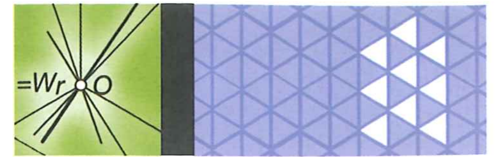


Fig. 9.65. *Trazado de una circunferencia contenida en el plano XOY.*



Por otro lado, en la Figura 9.66 pueden seguirse los procesos de los que resultan las transformadas de las **circunferencias en óvalos**, en el **dibujo isométrico** sobre los planos *XOY*, *XOZ* e *YOZ*, o sus paralelos.

Fig. 9.66. *Trazado de circunferencias contenidas en los tres planos axonométricos por medio de óvalos.*



9.10. Trazado de sólidos

Para representar sólidos en el sistema axonométrico en general, y ahora en particular en perspectiva isométrica, conviene partir de los datos más significativos del cuerpo volumétrico. Esta información suele venir dada por el sistema diédrico mediante sus representaciones en planta, alzado y vista lateral.

Para pasar de la representación de un cuerpo en el sistema diédrico a perspectiva isométrica es importante que su posición no varíe en el cambio. Para ello, se debe respetar la situación del cuerpo respecto a los planos de proyección. Por tanto, los ejes isométricos tendrán que coincidir con el sistema de coordenadas de la representación diédrica.

En la representación del sólido que se ve a continuación se puede observar el proceso de elaboración que se ha seguido para llegar a su perspectiva isométrica partiendo de su representación en el sistema diédrico.

1. Se hacen proyecciones en el sistema diédrico de un sólido o se parten de ellas.

2. Se dibuja un sistema de ejes coordenados para situar los puntos 1, 2, 3 ...y 9 de la base del sólido.

3. Las coordenadas pasan a ser los ejes isométricos. Se transportan las medidas tomadas en las proyecciones diédricas, con sus debidas reducciones en el caso de querer hacer una perspectiva isométrica (sistema isométrico), o sin reducción caso de realizar simplemente un dibujo isométrico.

4. Se llevan a las aristas laterales del sólido sus correspondientes alturas, reducidas o no dependiendo del caso, y se completa su trazado (Fig. 9.67).

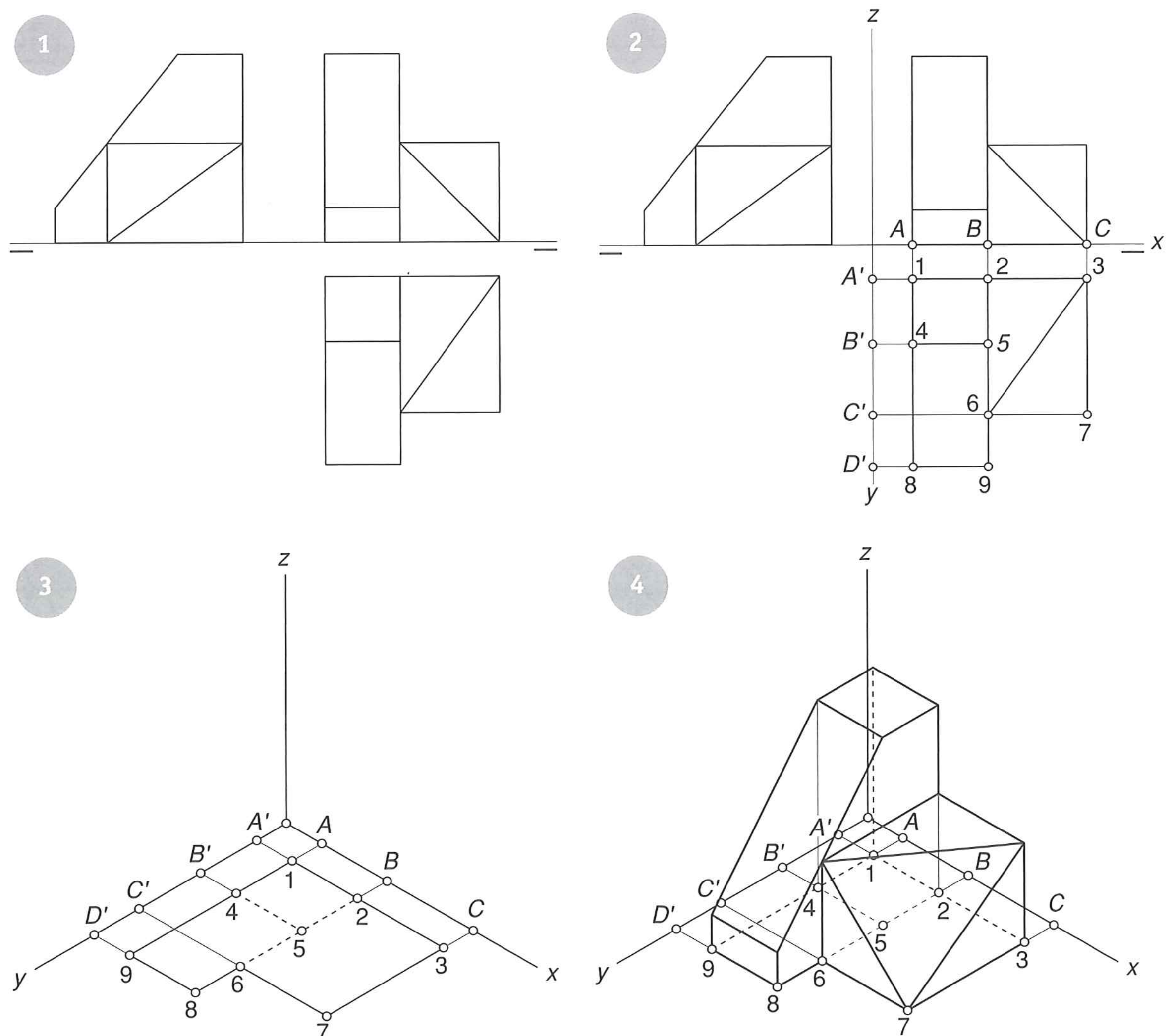


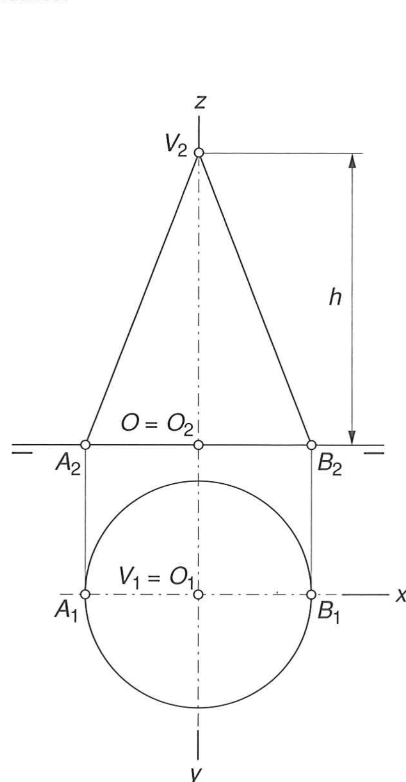
Fig. 9.67. *Trazado de un sólido en el sistema isométrico.*

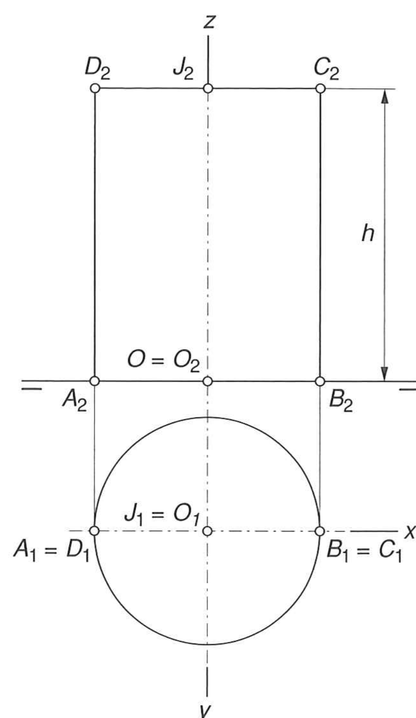
A. Sólidos de revolución: cono y cilindro rectos

Este tipo de sólidos tiene como base la circunferencia que ya se ha estudiado anteriormente.

Su representación en isométrica se reduce a aplicar el método de construcción de la mencionada circunferencia y, conocidas las alturas del cono y del cilindro, bastará con situarlas a partir del centro de la base, sobre su eje, para determinar el centro de la circunferencia de la base superior del cilindro o vértice del cono.

En las Figuras 9.68 y 9.69 se puede ver el modo en que se han construido estos sólidos en dibujo isométrico.





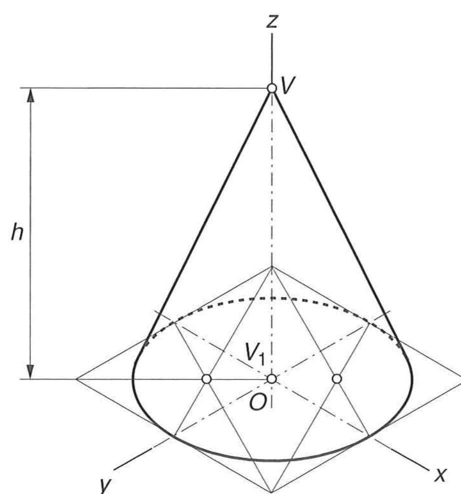


Fig. 9.68. *Cono en perspectiva isométrica.*

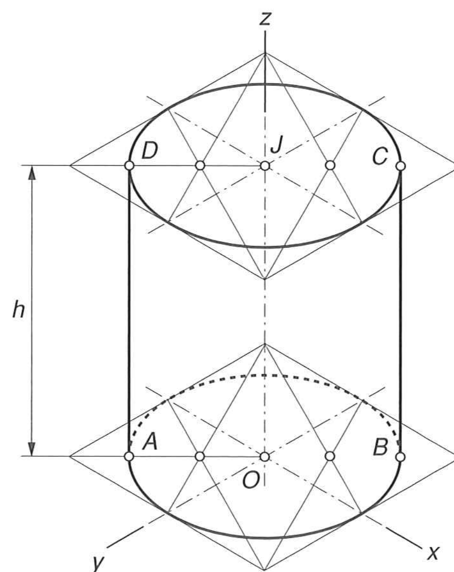
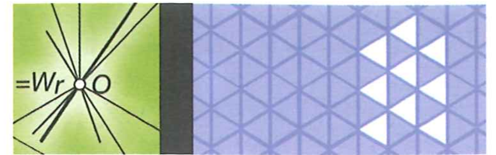


Fig. 9.69. *Cilindro en perspectiva isométrica.*



▶▶▶ Pirámide y prisma rectos

En la construcción de estos sólidos se procede de manera similar a los casos del cono y del cilindro rectos, con la única diferencia de que la pirámide y el prisma tienen base poligonal en vez de circunferencias, y aristas en lugar de generatrices. En las Figuras 9.70 y 9.71 se puede seguir los trazados efectuados para su realización, también dentro del concepto de dibujo isométrico.

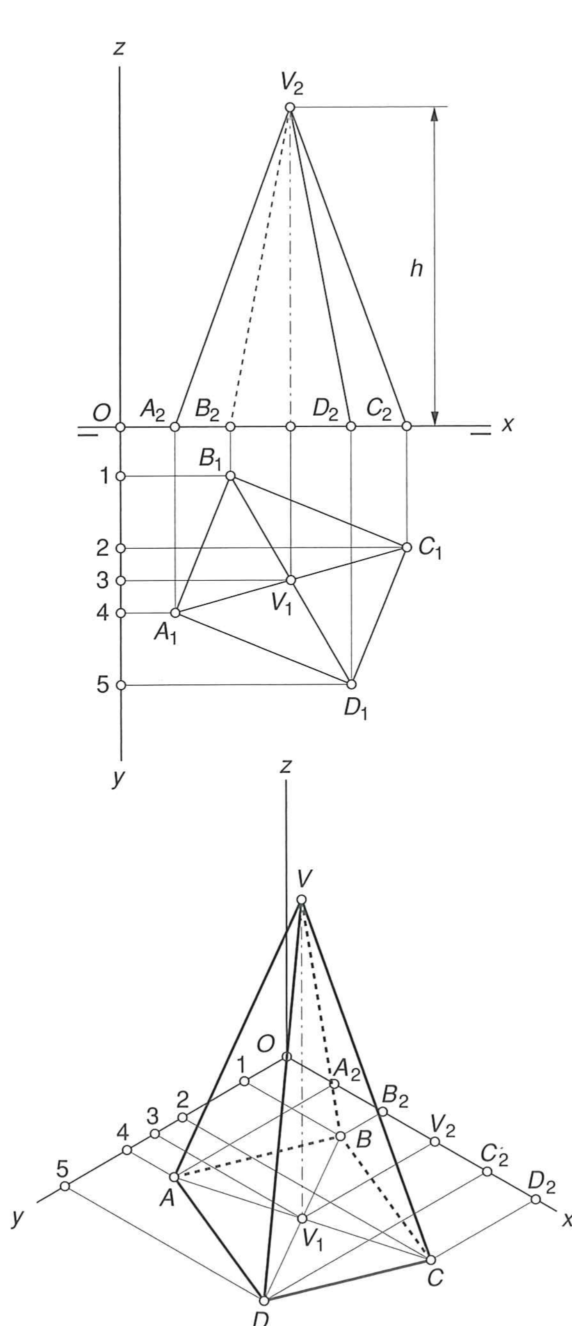


Fig. 9.70. *Pirámide recta.*

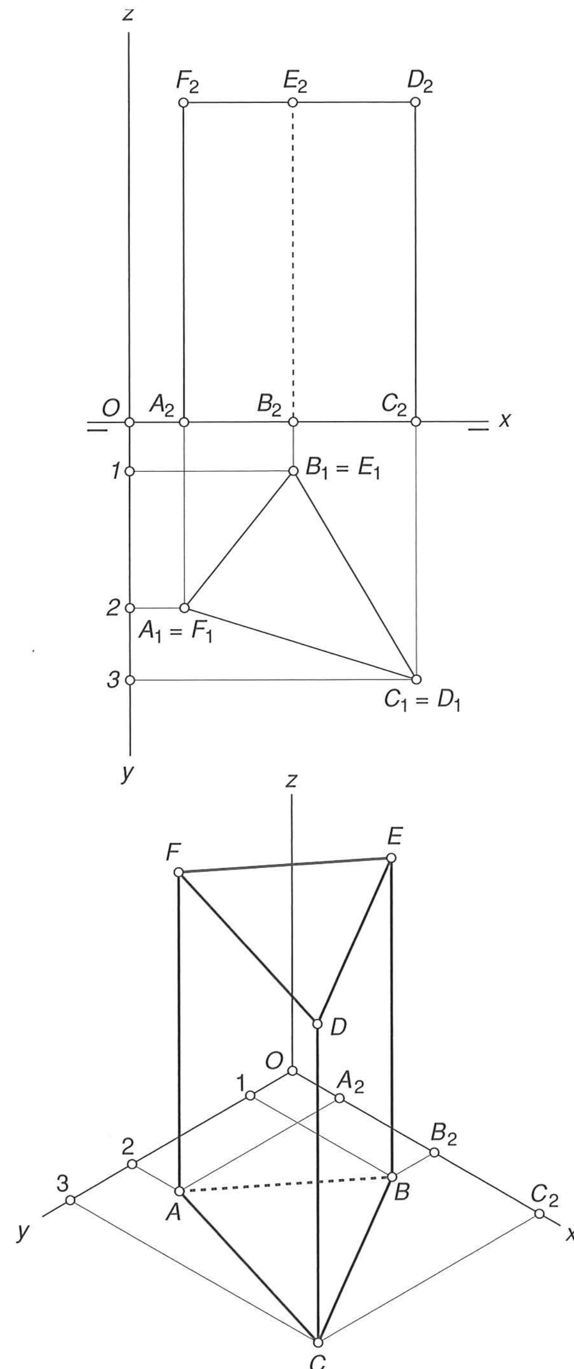
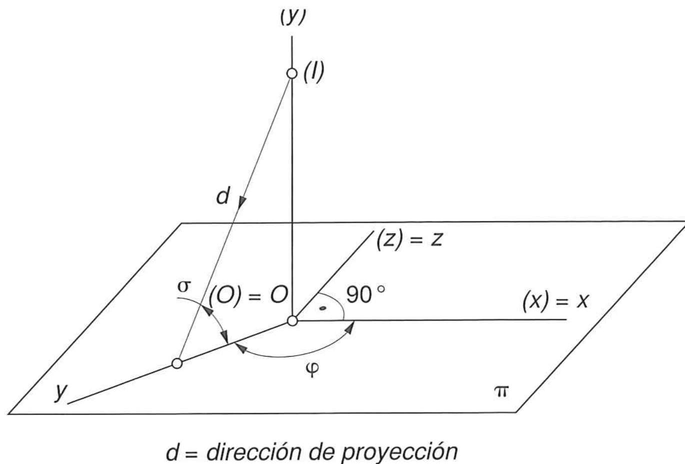


Fig. 9.71. *Prisma triangular.*

9.11. Sistema axonométrico oblicuo. Perspectiva caballera



El sistema axonométrico, visto anteriormente, se basaba en un triedro trirrectángulo sobre cuyos planos coordenados se proyectaban ortogonalmente los elementos a dibujar. Además, el conjunto de proyecciones obtenidas sobre los planos citados se proyectaba de nuevo sobre otro plano, que se denominaba plano del cuadro, o plano de dibujo.

Sin embargo, el sistema de perspectiva caballera es un caso particular del sistema axonométrico oblicuo, el cual está fundamentado en proyecciones cilíndricas, pero oblicuas al plano del cuadro, y en la perspectiva caballera éste es el plano *XZ* del triedro trirrectángulo o paralelo a él.

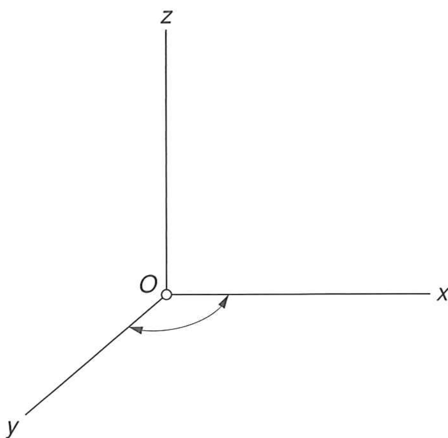


Fig. 9.72. *Construcción de la perspectiva caballera.*

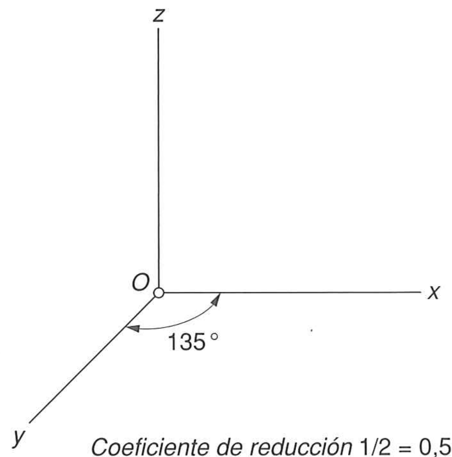


Fig. 9.73. *Perspectiva caballera normalizada.*

De lo expuesto se deduce que la perspectiva caballera se caracteriza por:

a) El plano del cuadro π es, como se ha explicado, el *ZX* o paralelo a él. Esto significa que todos los elementos paralelos a dicho plano (segmentos, figuras, etc.) se ven en verdadera magnitud. Esto supone que no tienen ninguna reducción las medidas paralelas a los ejes *X* y *Z*. Ello supone sin duda una ventaja a la hora de representar figuras complejas respecto a los otros sistemas axonométricos vistos; por ejemplo, figuras donde esté presente la circunferencia u otros elementos oblicuos a los citados ejes.

b) El eje *Y* se proyecta de forma oblicua sobre el plano del cuadro π. La inclinación que este eje tenga con π puede ser, en principio, cualquiera; no obstante, la norma UNE 1031-75 dicta que el ángulo φ que forma el eje *Y* con el *X* sea de 135°, 225° y 315°; el coeficiente de reducción para el citado eje y sus paralelas ha de estar comprendido entre los valores de 0,5 y 0,7 (Figs. 9.72 y 9.73).

A. Ángulo de posición

Se denomina así el ángulo en proyección que forma el eje *Y* con el eje *X*, medido en sentido de las agujas del reloj. Dependiendo de cuál sea su valor, va a permitir representar, y por tanto observar, sólidos desde diferentes puntos de vista (Fig. 9.74).

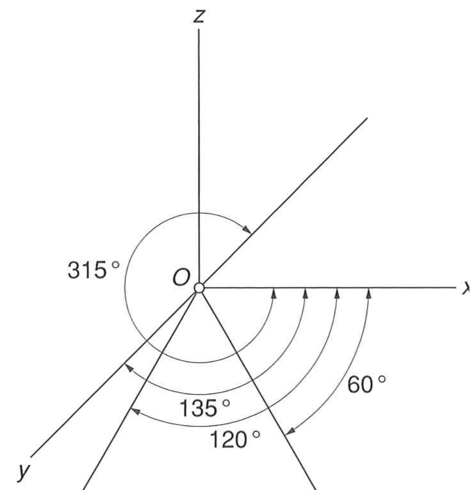
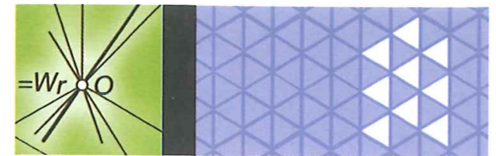


Fig. 9.74. *Distintos ángulos de posición.*



En la Figura 9.75 se exponen los casos más usuales, dentro de las infinitas posiciones que pueden adoptar según sean los valores del ángulo *XOY*.

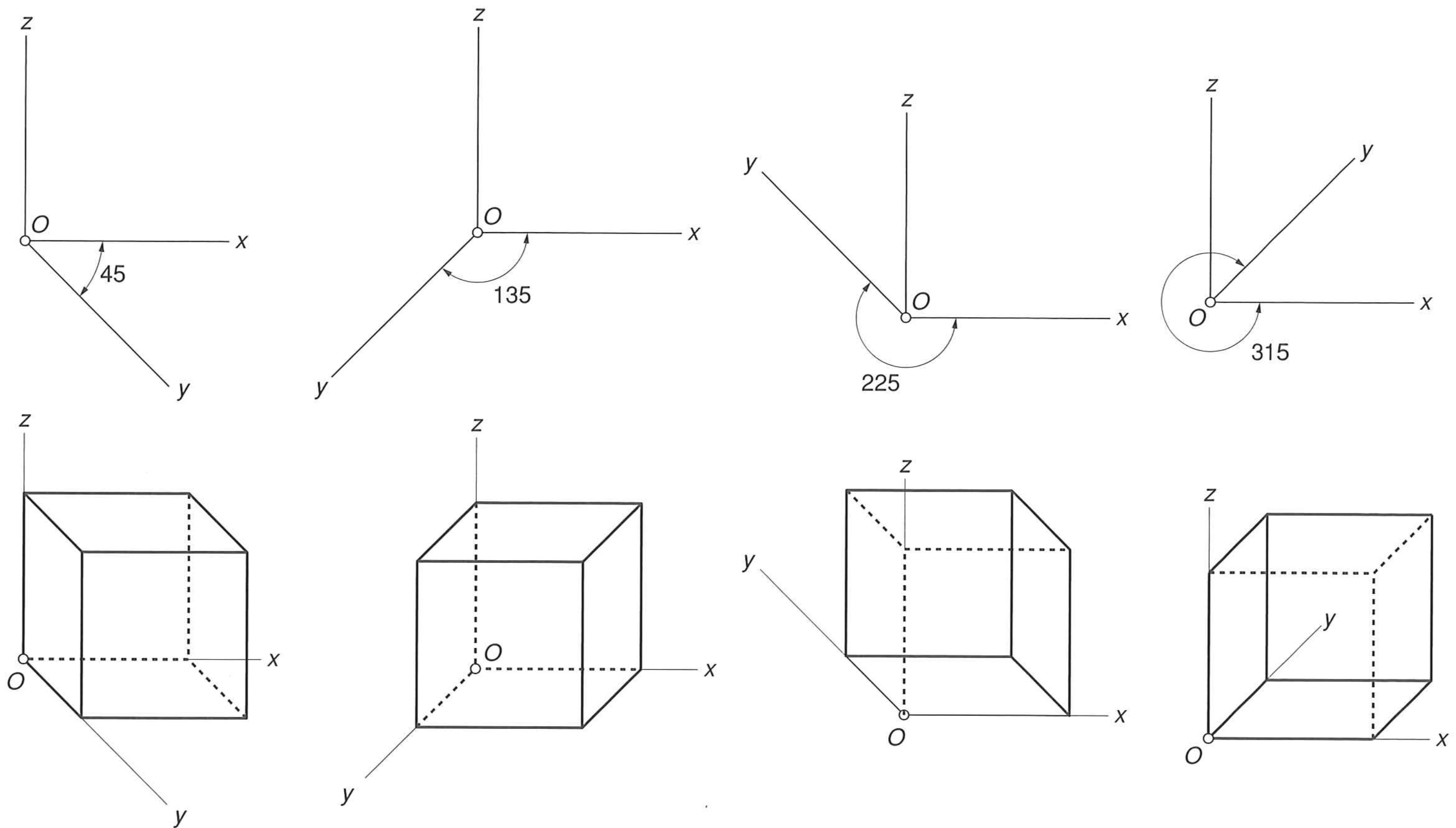


Fig. 9.75. *Distintas posiciones del ángulo* XOY.

B. Coeficiente de reducción

Como puede apreciarse en la Figura 9.76, los ejes *X* y *Z* forman parte del plano del cuadro y, por tanto, están en verdadera magnitud, pero al proyectar el eje *Y* sobre el plano del cuadro no permanece en verdadera magnitud. Se forma una relación métrica entre las magnitudes reales, es decir, las del espacio y las obtenidas en el dibujo al ser proyectadas las primeras.

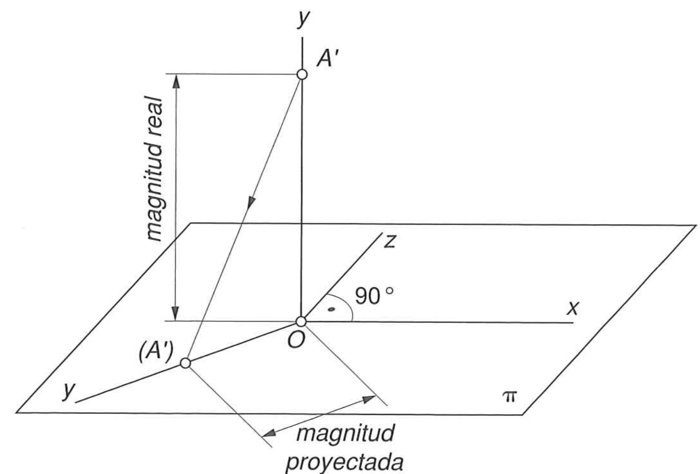


Fig. 9.76. *Magnitud real y magnitud proyectada del eje* Y.

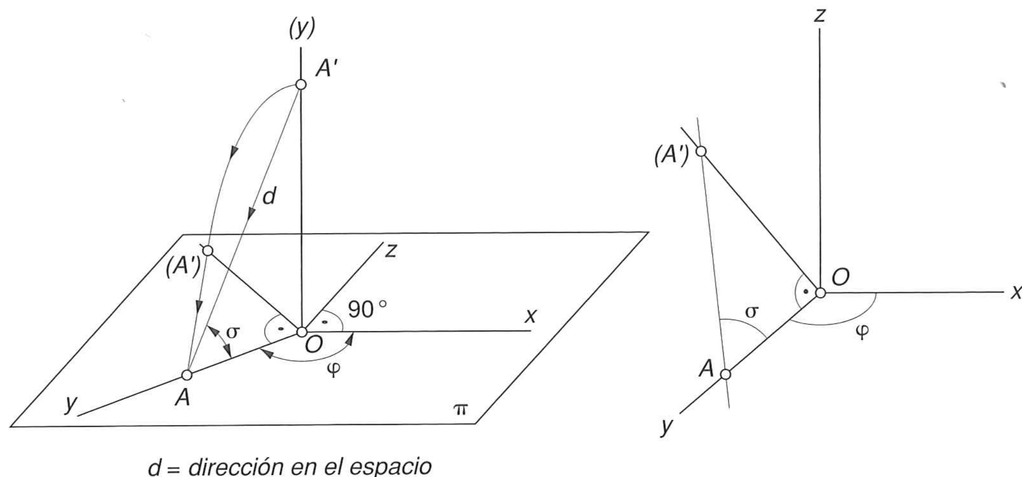


Fig. 9.77. *Cálculo de la relación entre la inclinación del eye* Y *y el coeficiente de reducción.*

Tal relación métrica se conoce como **Coeficiente de reducción,** y viene determinado por la letra μ. El valor del coeficiente de reducción μ, depende de la inclinación, σ, que tiene la dirección de proyección sobre el plano del cuadro. En la Figura 9.77 se puede observar que el ángulo σ, aplicando trigonometría, vale:

tg σ = $OA'/OA \rightarrow OA = OA'/\text{tg}\ \sigma$;
si consideramos que $OA' = 1$,
se cumple que : $OA = 1/\text{tg}\ \sigma \rightarrow OA = \text{cotg}\ \sigma = \mu$.

Como se expuso anteriormente, los coeficientes de reducción suelen estar comprendidos entre los valores de 0,5 y 0,7.

Para poder trabajar en perspectiva caballera es obligatorio conocer el coeficiente de reducción del eje *Y*, y el ángulo *XOY* = φ.

C. Aplicación de los coeficientes de reducción

Una vez definido el sistema con el que se va a dibujar en perspectiva caballera, por ejemplo, el ángulo *XOY* = φ, 135° , y el coeficiente de reducción μ = 2/3, se actúa del modo siguiente:

1. Se abate el eje *Y* sobre el plano del cuadro, es decir, *XOZ*, obteniendo (*Y*) que es perpendicular al eje *X*.

2. Sobre el eje (*Y*) abatido, y a partir del punto *O* se sitúa el denominador del coeficiente de reducción, en este caso tres unidades, obteniendo el punto (3). Sobre el eje *Y*, y a partir también del punto *O*, se lleva el numerador, dos unidades, determinando el punto 2.

3. Se unen los puntos (3) y 2 para determinar la dirección de reducción que establece la correspondencia entre medidas reales que se sitúan en el eje (Y), y las medidas pasadas por el coeficiente de reducción que se obtienen sobre el eje *Y*. Siendo *O*(3) = *O*2/ μ (Fig. 9.78).

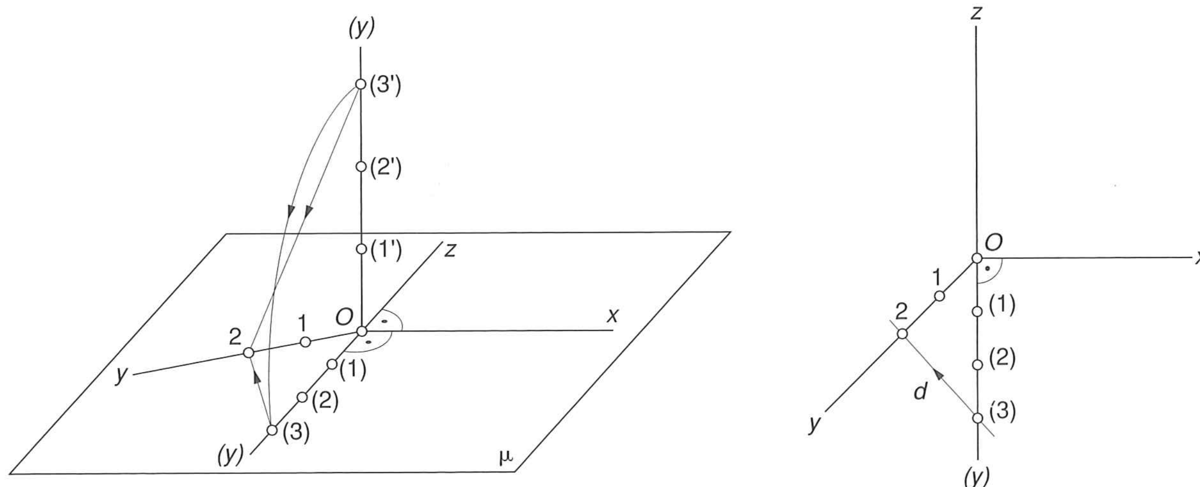
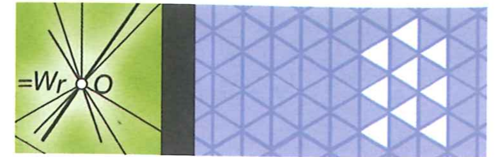


Fig. 9.78. *Aplicación de un coeficiente de reducción.*



En la Figura 9.79 se puede observar cómo un punto *A* en verdadera magnitud situado en el plano *XOY*, si se le aplica lo expuesto anteriormente, se obtiene su representación en perspectiva con el consiguiente coeficiente de reducción.

Desde su posición abatida (*A*), sobre el plano *OX*(*Y*), se traza una perpendicular al eje *X*, y desde el punto de intersección con ésta se traza una paralela al eje *Y*. Desde (*A*) se traza otra paralela, esta vez a la dirección que establece la correspondencia entre medidas reales y las pasadas por el coeficiente de reducción, determinando de este modo la perspectiva buscada.

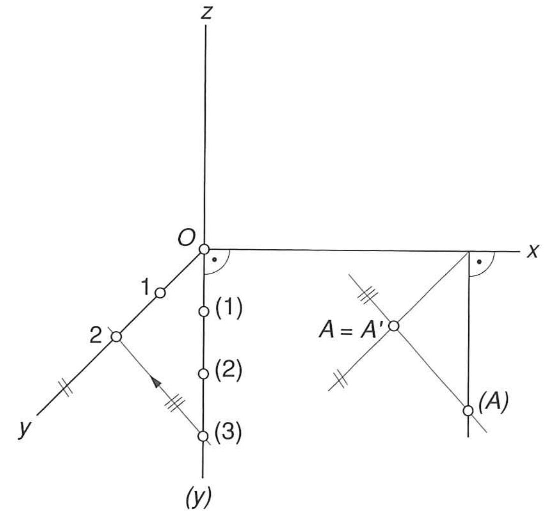


Fig. 9.79. *Aplicación del coeficiente de reducción a la representación de un punto.*

9.12. Representación del punto

Existe en este apartado, y en otros que forman el desarrollo teórico de la perspectiva caballera, una total similitud en cuanto a los trazados con el sistema axonométrico ortogonal; no por ello se ha de pensar que son lo mismo.

Las representaciones de un punto se definen por cuatro proyecciones: una directa sobre el plano del cuadro *A*, y otras tres A_1, A_2 y A_3, sobre los planos del triedro. En este tipo de perspectiva, un punto también se puede definir gráficamente con sólo dos de sus proyecciones, y todas ellas se consiguen situando las coordenadas del punto sobre los ejes y trazando paralelas a los mismos.

Veamos un ejemplo de representación de un punto dadas sus coordenadas, por ejemplo *A* (3, 4, 6):

1. Los datos de los que se parten son: el ángulo $XOY = \varphi$ vale 135°, y $\mu = 2/3$.

   Para situar la proyección horizontal A_1 del punto, se actúa utilizando el mismo procedimiento que en la Figura 9.79.

2. Una vez determinada la proyección A_1 , a partir de ella, se traza una paralela al eje *Z* y se lleva la cota que tenga el punto, obteniendo así la proyección directa *A*; de este modo, queda definido el punto

3. No obstante, si se necesitan las proyecciones A_2 y A_3, se trazan paralelas a los ejes, como se muestra en la Figura 9.80, y donde se cortan quedan determinadas las citadas proyecciones.

Es el estudio pormenorizado de las posiciones del punto, la recta y el plano, junto con los contenidos referidos a intersecciones en perspectiva caballera, se aconseja sean de nuevo revisados en el sistema axonométrico ortogonal, siempre teniendo presente las características propias del sistema de perspectiva caballera y, sobre todo, las diferencias existentes entre uno y otro sistema en cuanto a la aplicación de los coeficientes de reducción que tiene cada tipo de perspectiva.

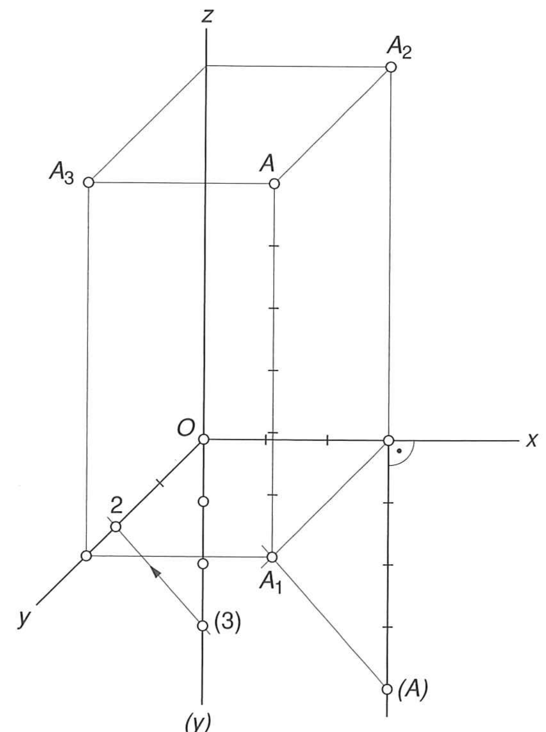


Fig. 9.80. *Representación de un punto.*

9.13. Representación de formas planas contenidas en los planos axonométricos

La representación de formas planas en perspectiva caballera se lleva a cabo de igual modo que en el caso del sistema isométrico, es decir, inscribiéndolas en figuras geométricas sencillas, como el cuadrado o el rectángulo. Estas figuras se dibujan en perspectiva y sobre ellas se sitúan los puntos más notables, que suelen ser los vértices, de la forma plana primitiva.

A. Figuras planas contenidas en el plano *XOZ*

Al estar este plano coincidiendo con el plano del cuadro, o paralelo a él, todas las figuras planas contenidas en él, o paralelas al mismo, se representan en verdadera magnitud.

Si la figura está formando parte del plano *XOZ*, la proyección directa de ésta y la proyección sobre el citado plano coinciden. Las proyecciones sobre el plano *XOY* e *YOZ* coinciden con los ejes *X* e *Y*, respectivamente (Figs. 9.81 y 9.82).

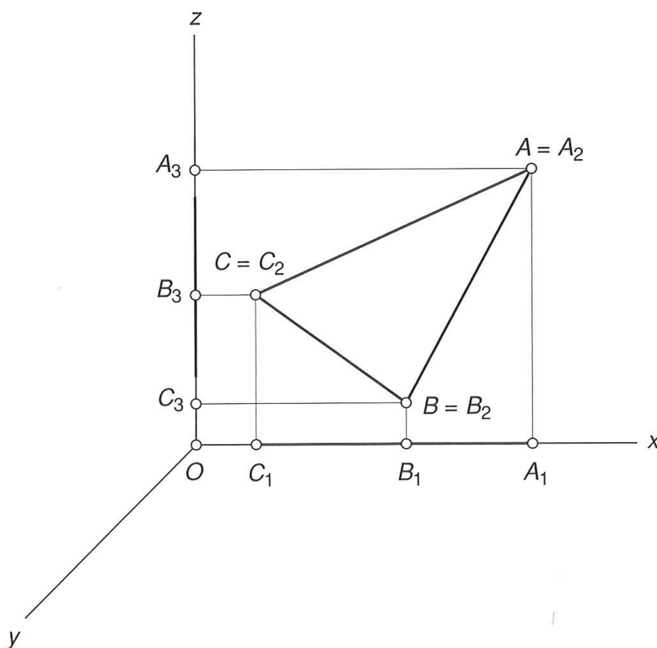


Fig. 9.81. *Triángulo contenido en el plano* XOZ.

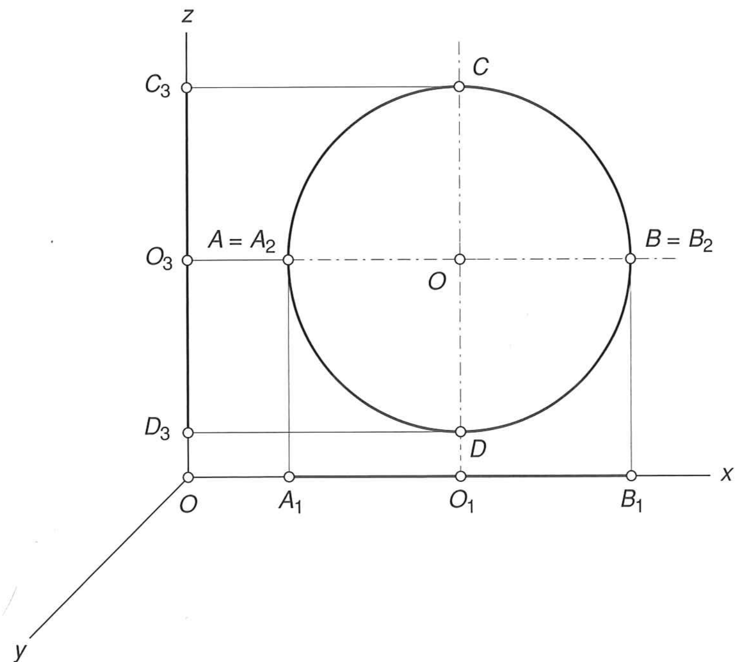
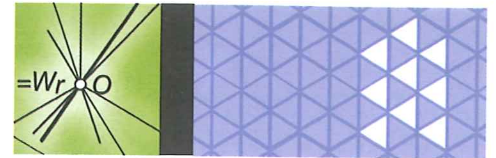


Fig. 9.82. *Circunferencia contenida en el plano* XOZ.



B. Figuras planas contenidas en el plano *XOY*

Para el trazado de figuras, sean paralelas al plano *XOY* o estén éstas contenidas en dicho plano, se aplica el coeficiente de reducción sobre el eje *Y*.

En la Figura 9.83 se representa una circunferencia contenida en el plano *XOY*. Como se apuntó anteriormente, cuando las figuras son complejas se inscriben en figuras más sencillas de representar; en este caso se ha utilizado el cuadrado para circunscribir a la circunferencia.

Para su trazado, se han tomado ocho puntos de la misma, como ya se hizo en el sistema isométrico.

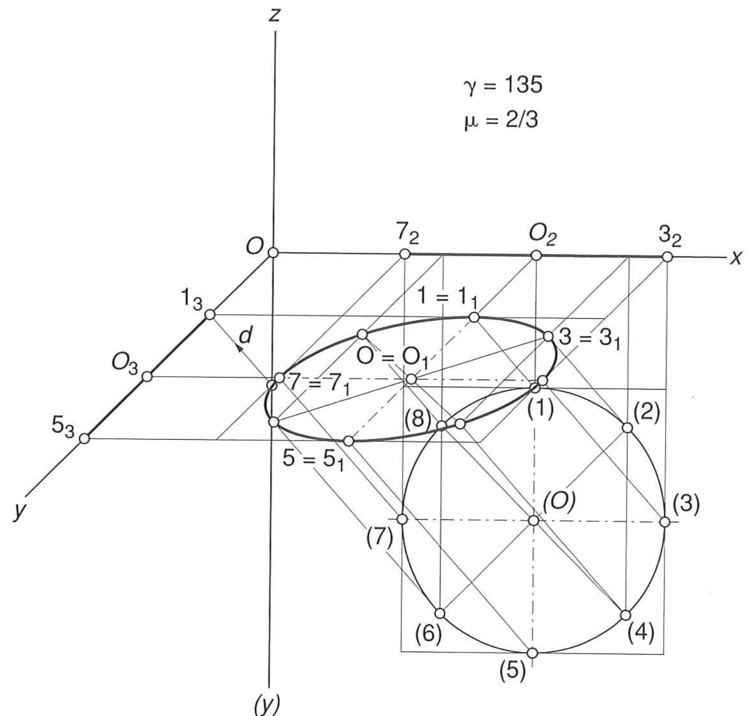


Fig. 9.83. *Circunferencia contenida en el plano* XOY.

C. Figuras planas contenidas en el plano *YOZ*

En la representación de formas planas paralelas o contenidas en el plano *YOZ* se actúa de manera similar, abatiendo el eje *Y* sobre el plano del cuadro; en esta ocasión (*Y*) abatido es perpendicular al eje *Z*.

En la Figura 9.84 se pueden observar los pasos dados para representar una circunferencia contenida en dicho plano.

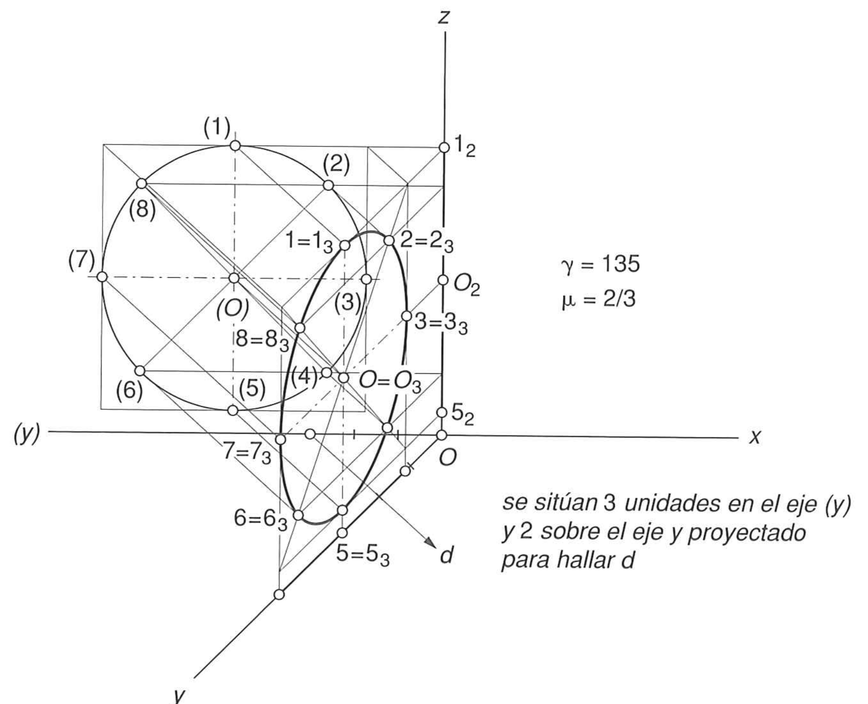


Fig. 9.84. *Circunferencia contenida en el plano* YOZ.

9.14. Representación de sólidos en perspectiva caballera

Como ya se ha visto, una perspectiva caballera queda definida cuando fijamos la posición del eje *Y*, es decir, el ángulo comprendido entre los ejes *X* e *Y*, y el coeficiente de reducción para el mismo eje.

A continuación se pueden observar los resultados de algunos ejemplos en perspectiva caballera partiendo de las proyecciones en el sistema diédrico (Figs. 9.85, 9.86 y 9.87).

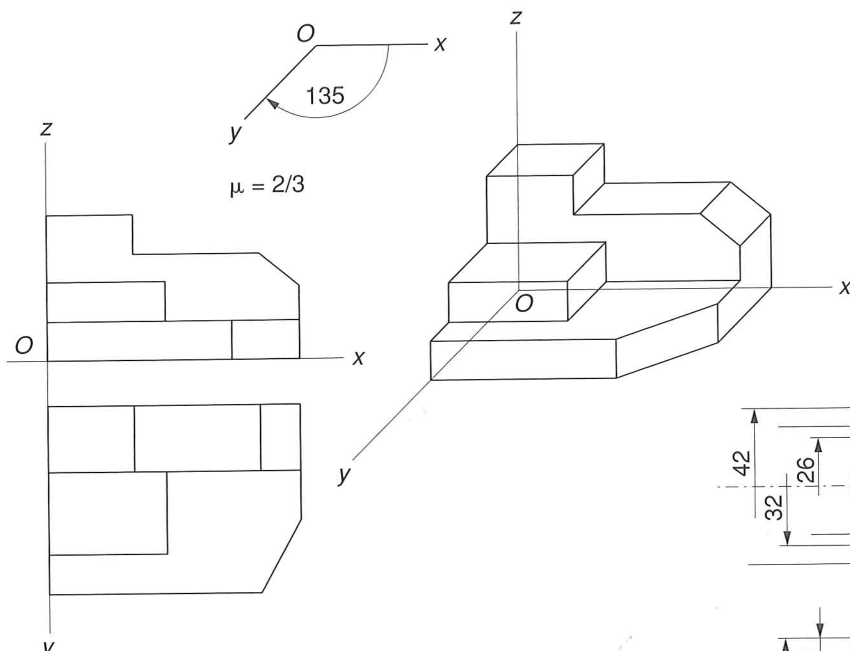
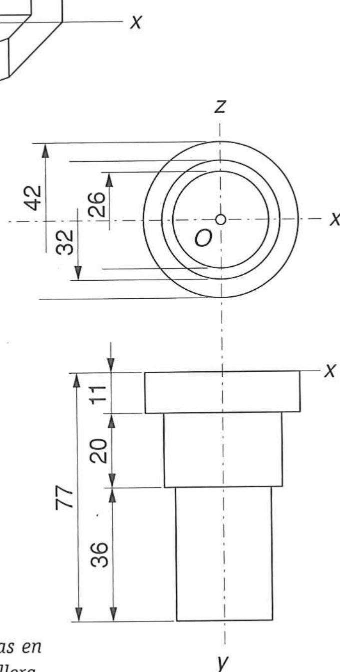


Fig. 9.85. *Representación de un sólido en perspectiva caballera.*



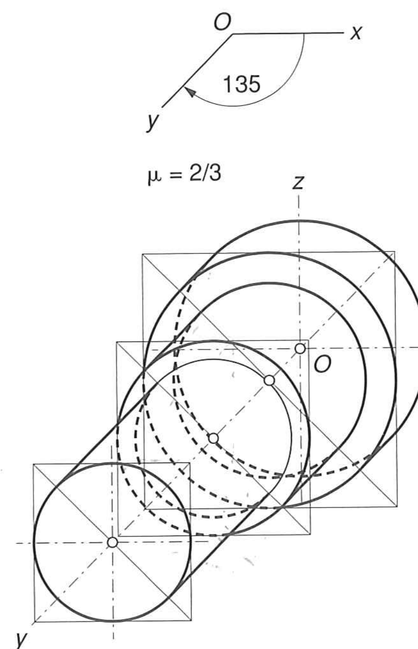


Fig. 9.86. *Pieza de formas cilíndricas en perspectiva caballera.*

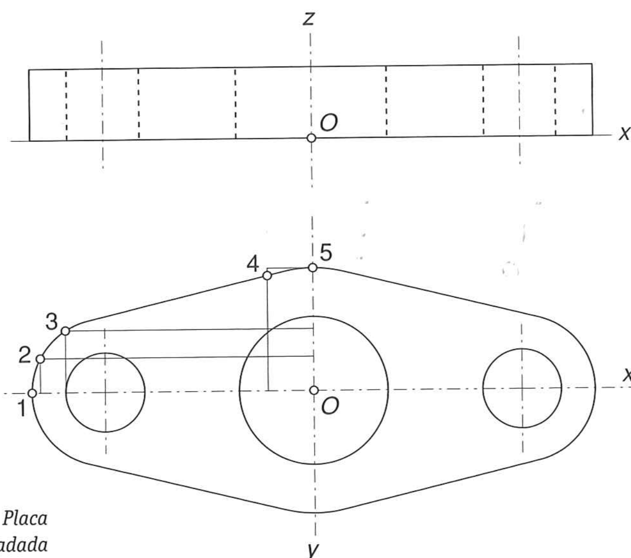


Fig. 9.87. *Placa horadada en perspectiva caballera.*



A continuación se muestran tres figuras para ejemplificar cómo partiendo de perspectivas caballeras se han hallado sus proyecciones diédricas más significativas (Fig. 9.88).

Fig. 9.88. *Tres ejemplos de determinación de proyecciones diédricas a partir de representaciones en perspectiva caballera.*

9. Sistema de representación axonométrico

Actividades sobre sistema axonométrico ortogonal y oblícuo. Perpectiva caballera

Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿En qué se basa el sistema axonométrico?
2. ¿Qué son las proyecciones cilíndricas?
3. ¿A qué se le denomina «triángulo de trazas» en el sistema axonométrico ortogonal?
4. ¿Cuántos tipos de axonometría ortogonal existen?
5. Explica cómo se puede construir una escala axonométrica con la escuadra y el cartabón.
6. ¿Qué denominaciones toman los puntos en el sistema axonométrico?
7. En el sistema axonométrico, ¿con cuántas representaciones queda determinada una recta?
8. Describe las relaciones de pertenencia entre punto, recta y plano.
9. ¿Cómo se actúa para hallar la intersección de una recta con un plano en el sistema axonométrico?
10. ¿En que se transforma una circunferencia en el denominado dibujo isométrico o perspectiva isométrica normalizada?
11. ¿Por qué se caracteriza la perspectiva caballera?
12. ¿Dónde se aplica el coeficiente de reducción en la perspectiva caballera?

Ejercicios

1. Halla las proyecciones en el sistema isométrico de los siguientes puntos:

   a) Un punto situado en el tercer triedro.

   b) Un punto con más cota que alejamiento en el quinto triedro.

   c) Un punto con igual cota que alejamiento en el sexto triedro.

2. Halla en perspectiva caballera, sabiendo que el ángulo $\varphi = 135°$ y $\mu = 2/3$, la representación de los siguientes puntos:

   a) Un punto situado en el segundo triedro.

   b) Un punto con más alejamiento que cota en el cuarto triedro.

   c) Un punto contenido en el plano *ZOX* con cota negativa.

3. Las siguientes propuestas se han de realizar a escala 3:1.

   a) Halla todas las representaciones y las trazas de las rectas dadas (Fig. 9.89).

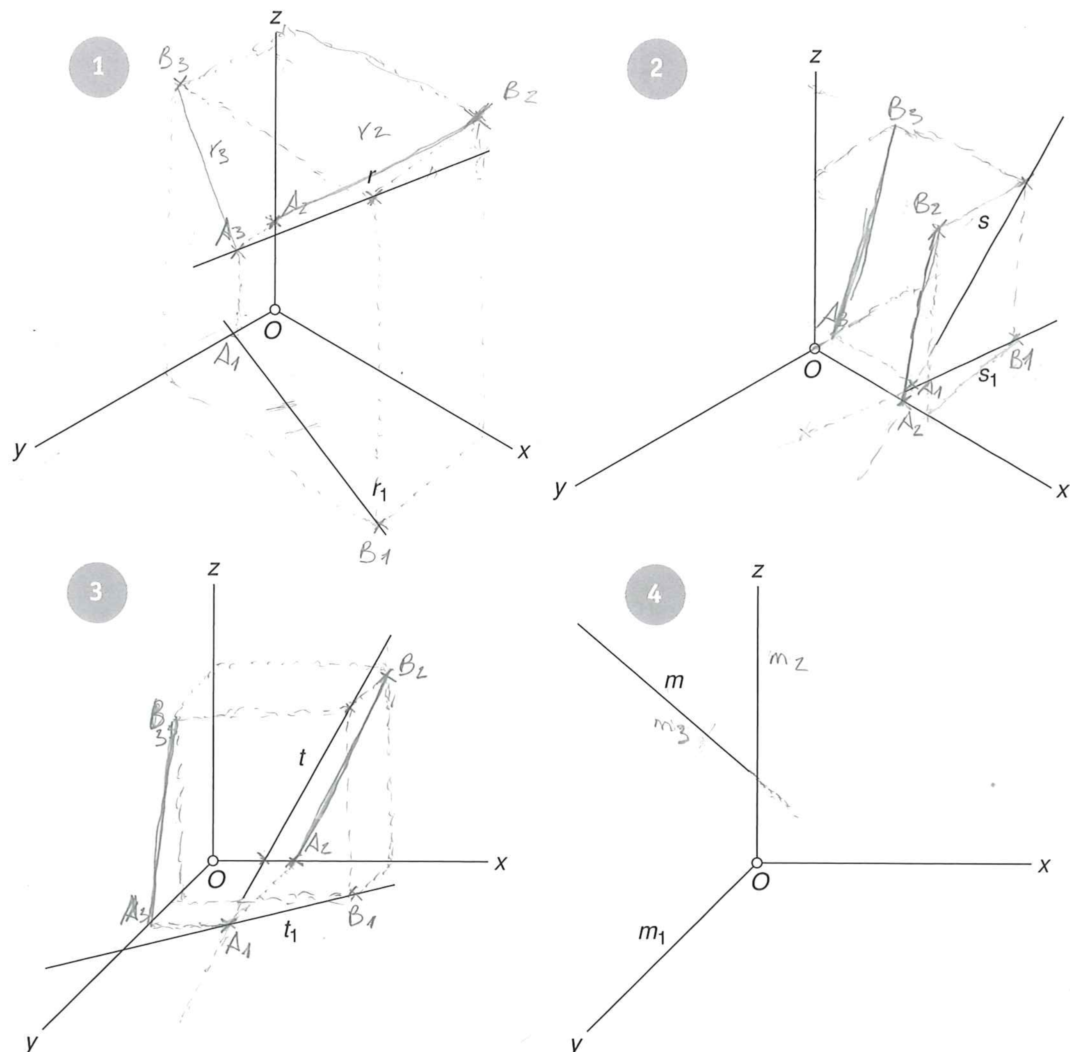


Fig. 9.89. *Ejercicio 3a, enunciado.*



Ejercicios

b) Halla la intersección entre los planos α y β en los dos casos siguientes (Fig. 9.90).

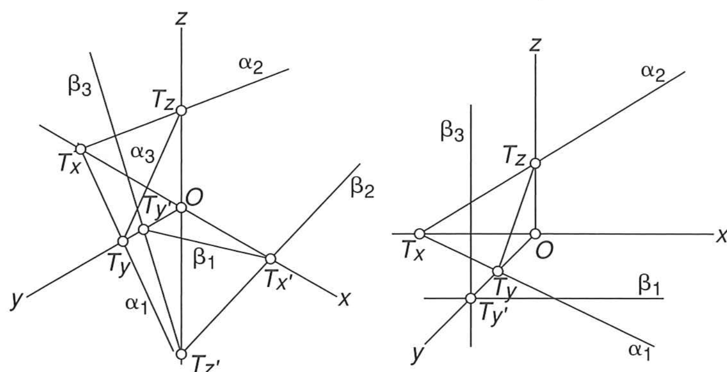


Fig. 9.90. *Ejercicio 3b, enunciado.*

c) Halla la intersección de las rectas *r* y *s* con los planos α y β, respectivamente (Fig. 9.91).

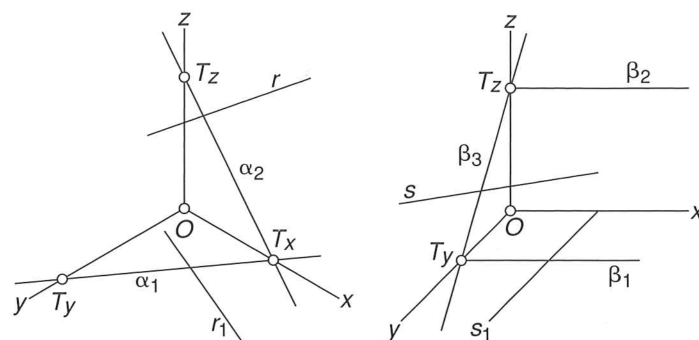
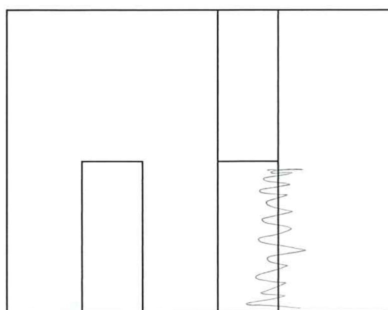
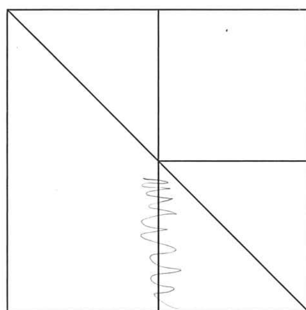
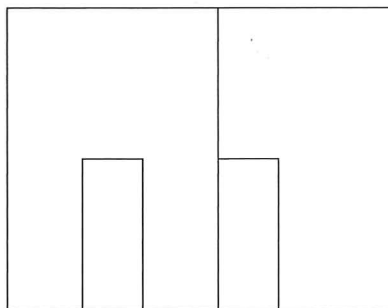


Fig. 9.91. *Ejercicio 3c, enunciado.*

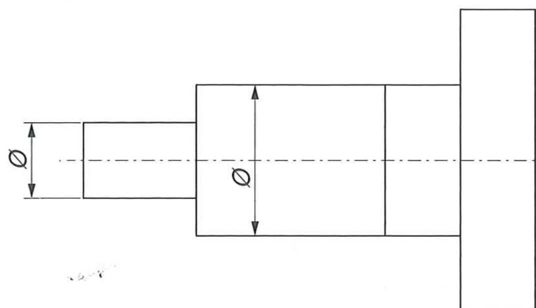
4. Dibuja en perspectiva isométrica normalizada las siguientes piezas dadas sus vistas (Fig. 9.92).







E = 2/1



E = 2/1

Fig. 9.92. *Ejercicio 4, enunciado.*



Ejercicios

5. Dibujar en perspectiva caballera las siguientes piezas dadas sus vistas (Fig. 9.93).

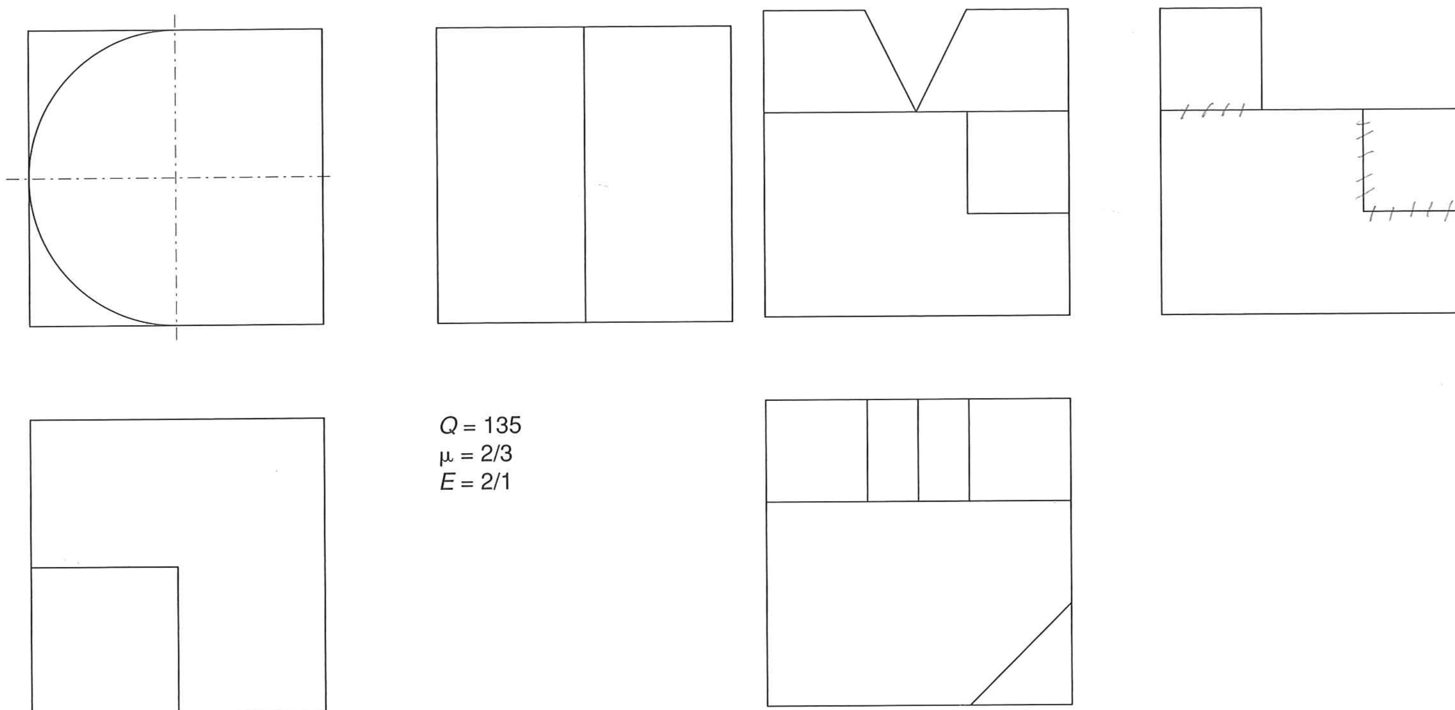


Fig. 9.93. *Ejercicio 5, enunciado.*

6. Dibuja las vistas de las siguientes piezas (Fig. 9.94).

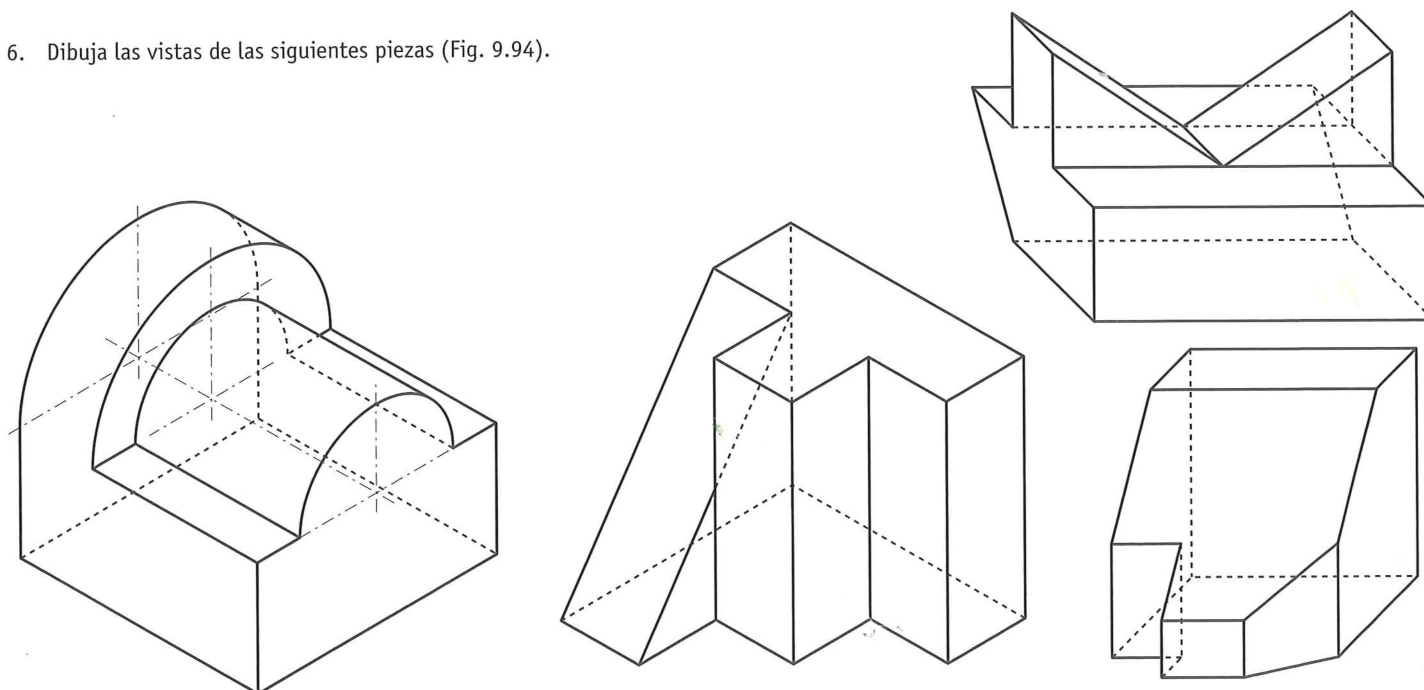
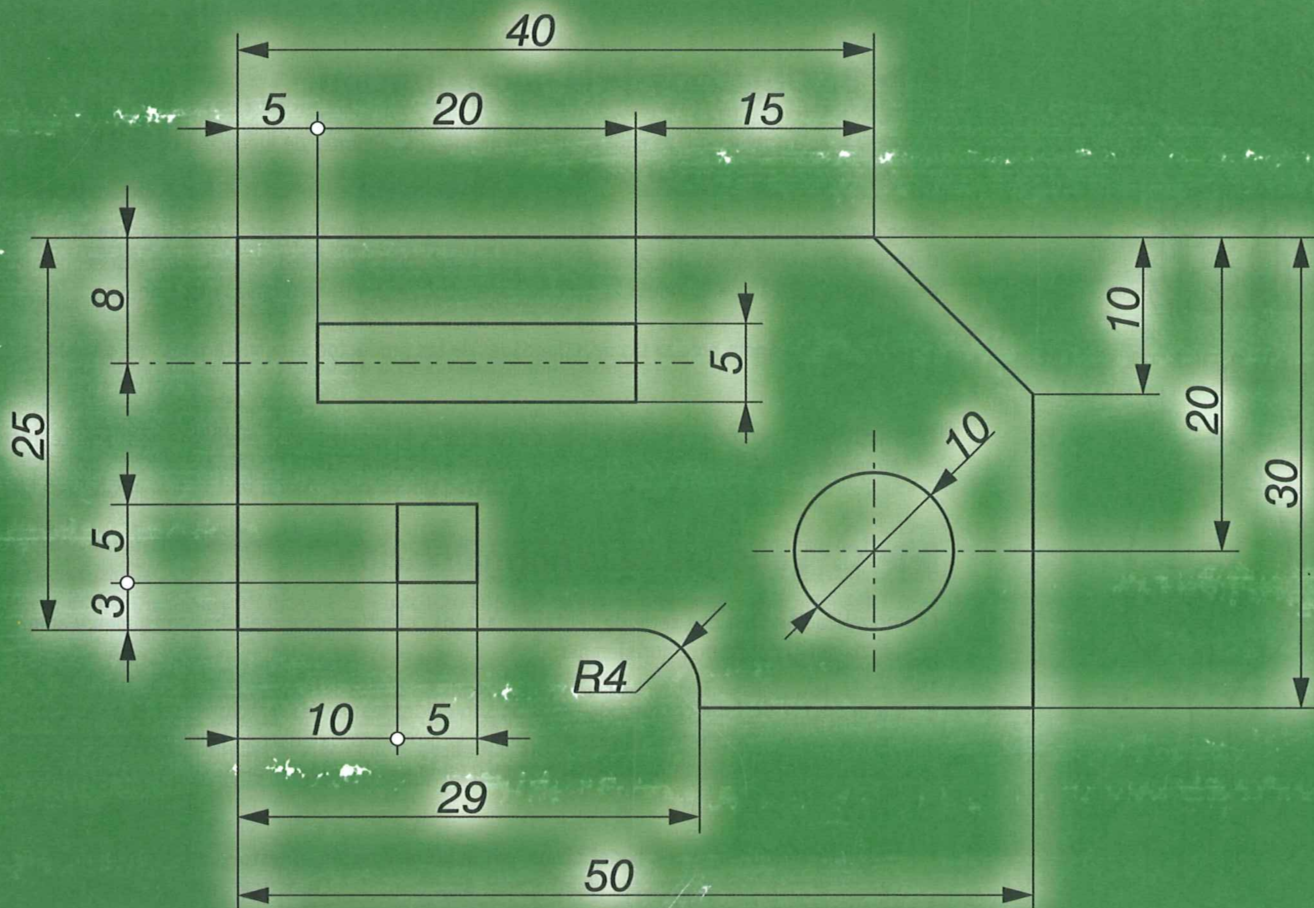


Fig. 9.94. *Ejercicio 6, enunciado.*

10

Normalización y croquización



Los objetos que la industria genera, antes de que sean productos elaborados, están en fase de proyecto, materializado por medio de bocetos y dibujos. El dibujo técnico es el instrumento más eficaz que tienen los ingenieros, arquitectos y diseñadores para expresar y facilitar la comunicación de ideas. Por tanto, es necesario utilizar unos códigos dentro del lenguaje de expresión, es decir, el dibujo, que sean precisos, rigurosos, sucintos y no produzcan confusión o error.

El conjunto de estos códigos es lo que se denomina normalización.

10.1. Normalización

A. Introducción a la normalización

Los objetos que la industria genera, antes de que sean productos elaborados, están en fase de proyecto, materializado por medio de bocetos y dibujos. El dibujo técnico es el instrumento más eficaz que tienen ingenieros, arquitectos y diseñadores para expresar y facilitar la comunicación de ideas.

Por tanto, es necesario utilizar unos códigos dentro del lenguaje de expresión, es decir, el dibujo, que sean precisos, rigurosos, sucintos y que no produzcan confusión o error. El conjunto de estos códigos es lo que se denomina **normalización.**

Los primeros intentos en este sentido se llevaron a cabo en Alemania a finales de la segunda década del siglo XX. Según Frontard, la **norma** es como un dibujo de referencia resultante de un acuerdo colectivo y razonado, con vistas a servir de base de entendimiento para la resolución de problemas repetitivos.

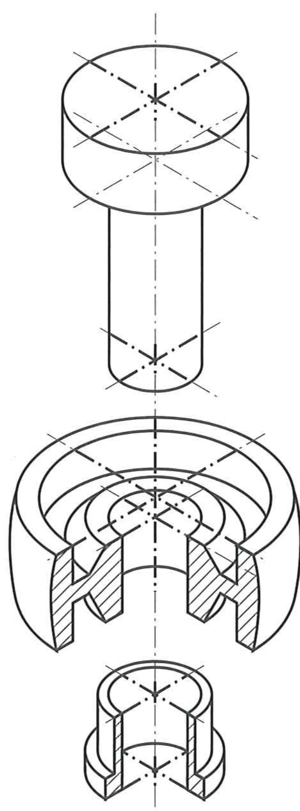


Fig. 10.1. *Pieza industrial.*

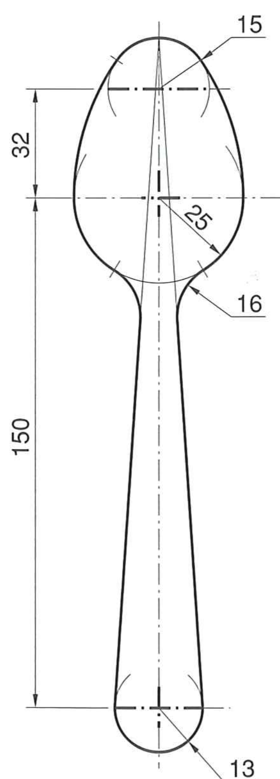


Fig. 10.2. *Objeto acotado.*

B. Objetivos de la normalización

Normalizar es establecer unas pautas que regulen las condiciones de ejecución de un proyecto científico o técnico y su posterior fabricación.

Tiene como objetivo principal organizar los procesos de producción para rentabilizar rendimientos y reducir sus costes, de modo que contribuye a investigar sobre la calidad, la seguridad y la economía de los diversos productos que la industria genera. La normalización tiene además otros fines:

1. **Definir** de manera precisa las peculiaridades de los productos y los materiales con los que están hechos.

2. **Facilitar** la lectura y la comprensión de los objetos representados mediante el dibujo técnico, eliminando así las fronteras que pudieran crear los distintos idiomas.

C. Ventajas de la normalización

La normalización crea una serie de ventajas para los colectivos que realizan, consumen y administran productos muy importante, por ejemplo:

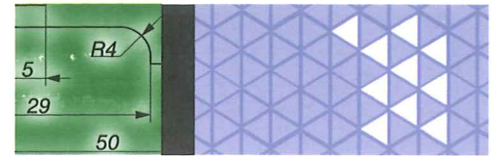
- **En el sector de fabricación,** las ventajas son evidentes: ayuda a racionalizar la diversidad y tipos de productos; contribuye a mejorar el diseño y, por tanto, facilitar su comercialización, además de posibilitar la disminución de tramites, tanto en la gestión de compras, como en los costes de producción.

- **Los consumidores** se ven beneficiados por la normalización, puesto que los productos que aparecen en el mercado pueden ser identificados según sus características, niveles de calidad y seguridad, junto con el de servicios.

- **La Administración,** puede establecer fácilmente políticas de seguridad, medioambiente y calidad, además de ayudar al desarrollo económico y agilizar el comercio.

D. Clases de normas

Las normas están clasificadas según dos ámbitos: uno atendiendo a su contenido, y el otro contemplando el organismo que las ha elaborado.



Por el **contenido,** las normas pueden ser científicas o industriales.

1. Las normas **científicas** son aquellas que están basadas en acuerdos los cuales estipulan las normas para la ciencia y la técnica, por ejemplo, la simbología y el sistema de unidades, entre otras.

2. Las normas **industriales** son las que exponen las características de los productos, y acotan las especificaciones de precisión y calidad.

En función del **organismo de elaboración,** las normas pueden ser nacionales, regionales o internacionales.

- Las **normas nacionales** están realizadas por instituciones específicas de ámbito nacional para desarrollar actividades de normalización bajo su competencia.

  La normalización en España depende de AENOR (Asociación Española de Normalización y Certificación), que estudia y, posteriormente, edita las normas UNE (Una Norma Española). Dentro de esta institución hay diferentes comisiones técnicas que investigan las necesidades y los problemas de los distintos sectores de la industria. Las normas UNE son de obligado cumplimiento por parte de todas las empresas estatales.

  Al igual que España aplica las normas UNE, dependiendo de AENOR, otros países aplican las suyas propias, bajo el asesoramiento de sus organismos de normalización, por ejemplo:

  - En Alemania, las DIN (Comité de Normas Alemán).
  - En Francia, las NF (Asociación Francesa de Normalización).
  - En Italia las, UNI (Ente nacional Italiano de Unificación).
  - En Gran Bretaña, las BSI (Instituto de estandarización Británico).

- Las **normas regionales:** son las elaboradas dentro de un marco regional, es decir, que suelen tener competencias dentro de un ámbito continental, dado que agrupa un número importante de organismos nacionales que se han puesto de acuerdo para unificar criterios.

  En este sentido, una de las más importantes son las europeas realizadas por los Organismos Europeos de Normalización, como por ejemplo CEN (Comité Europeo De Normalización), CENELEC (Comité Europeo de Normalización Electrónica), ETSI (Instituto Europeo de Normas de Telecomunicaciones).

- Las **normas internacionales:** son las realizadas por organismos de este nivel donde están representados todos los países industrializados. Su implantación es de ámbito internacional. El organismo más destacado es la ISO (Organización Internacional de Normalización); esta organización se fundó en 1947 con el fin de promocionar el desarrollo de la normalización, y así, conseguir facilitar el intercambio internacional de productos para desarrollar, entre otros aspectos, la cooperación científica y tecnológica.

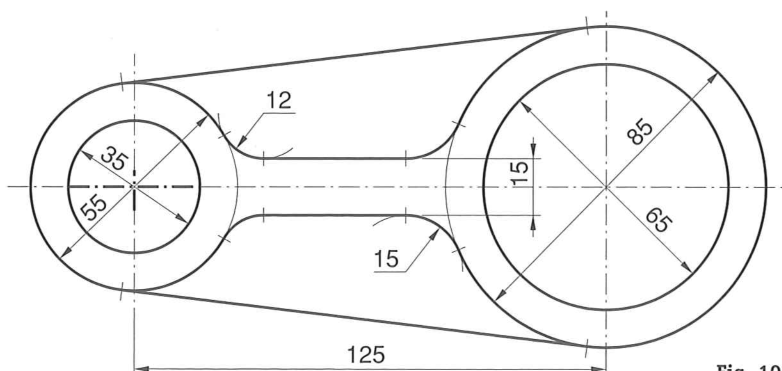


Fig. 10.3. *Elemento industrial.*



E. Formatos de papel normalizado (normas UNE 1026, ISO 5457)

Se denomina formato a los pliegos de papel cortados con una medidas normalizadas para dibujar. La norma UNE 1026 y la ISO 5457 son iguales, y son las encargadas de normalizar las dimensiones de los diferentes tamaños de papel.

Existen tres series de formatos de papel diferentes que son utilizados según el fin que de ellos se vaya hacer. La serie que se emplea en dibujo técnico está referenciada y regulada por la denominada **serie A**.

Todos los formato de papel pueden ser utilizados en posición vertical u horizontal, dependiendo de las necesidades del dibujo; no obstante, se debe elegir el formato más pequeño en el que se pueda representar el motivo del dibujo, sin que esto perjudique la resolución y claridad de lo representado.

Reglas para la determinación de los formatos

Los formatos del papel están normalizados por tres reglas, cuya aplicación sucesiva determina los distintos tamaños:

- **Regla de referencia:** la superficie inicial de referencia es de 1 m^{2,} es decir, $x \cdot y = 1$ m^2 (Fig. 10.4).

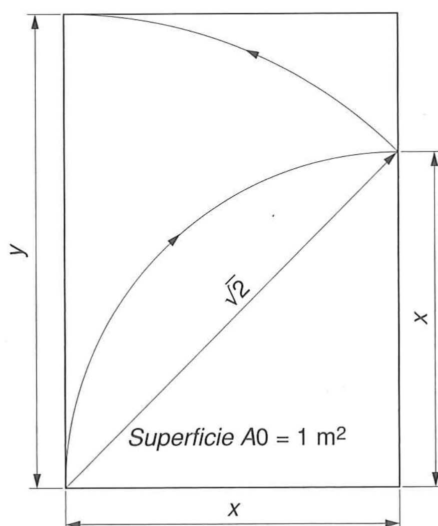


Fig. 10.4. *Regla de referrencia.*

- **Regla de la semejanza:** todos los formatos son semejantes, y tienen entre los lados la relación $\sqrt{2}$ (Figs. 10.4 y 10.5).

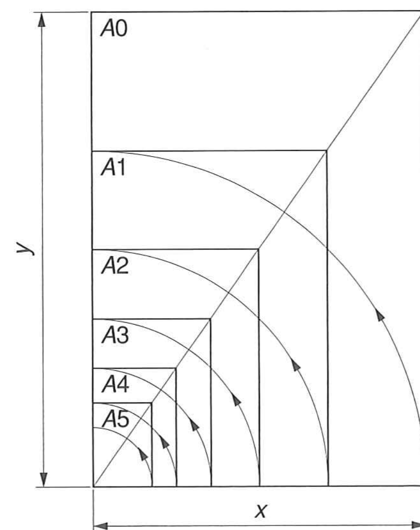


Fig. 10.5. *Regla de semejanza.*

Del análisis de estas reglas se deduce que los formatos de la serie A, denominando x al ancho e y al largo del papel, se tiene por un lado que $y = x \cdot \sqrt{2}$; y por otro, que la superficie del formato A0 = = 1 m^2 = $x \cdot y$. Dando solución al sistema de ecuaciones:

$$y = x \cdot \sqrt{2}$$

$$1 \text{ m}^2 = x \cdot y$$

se determina que el formato origen A0 es:

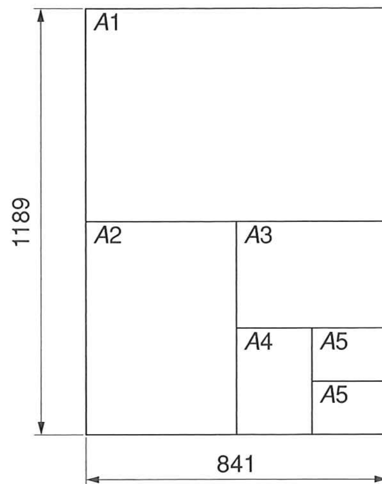
$$x = 0,841 \text{ m}$$

$$y = 1{,}189 \text{ m}$$

Es decir, 841 · 1189 mm.



- **Regla de doblado:** todos los formatos se obtienen al dividir en dos el inmediatamente superior por la mitad del lado mayor. Es decir, si un formato A3 tiene de dimensiones 420 x 297 mm, el formato A4 tendrá 297 x 210 mm (Fig. 10.6).



Por tanto, las medidas más utilizadas en dibujo técnico son las que aparecen en la Figura 10.7. La letra A designa la serie principal, el número que la sigue equivale al número de plegados hechos a partir del formato A0, que como ya se ha expuesto, es el que se toma de origen.

Fig. 10.6. *Regla de doblado.*

Formatos	Dimensiones (mm)
4A0	1 628 × 2 378
2A0	1 189 × 1 682
A0	841 × 1 189
A1	594 × 841
A2	420 × 595
A3	297 × 420
A4	210 × 297
A5	148 × 210
A6	105 × 148
A7	74 × 105
A8	52 × 74
A9	37 × 52
A10	26 × 37

Fig. 10.7. *Medidas más utilizadas.*

F. Márgenes y cajetín

En todos los formatos se ha de dejar unos **márgenes** entre los bordes del papel y la superficie dedicada a la realización del dibujo. La figura que determina la citada separación se la denomina recuadro.

La norma recomienda que los márgenes tengan una anchura de 20 mm como mínimo para los formatos A0 y A1, y de 10 mm, también como mínimo, para los formatos A2, A3 y A4. No obstante, pueden reducirse sus valores a 10 mm para los formatos A0 y A1, y a 7 mm para el formato A4 (véase la Figura 10.8).

Cuando es necesario archivar o encuadernar con perforaciones en el papel, se ha de realizar un margen con una anchura mínima de 20 mm en el borde del recuadro opuesto al cajetín.

El cajetín se dibuja en la parte inferior derecha de la hoja de trabajo y tendrá unas dimensiones máximas de 170 mm de largo, y 277 mm de alto. Lógicamente, estas dimensiones van en función del formato y de los márgenes del papel, sin olvidar las necesidades de doblado del mismo. Aun así, el cajetín debe quedar totalmente visible en la primera página.

La norma **UNE 1035,** igual a la **ISO 7200,** estipula los datos que se han de contemplar en este apartado, y que giran en torno a los siguientes aspectos: número de registro, título del dibujo, nombre del propietario, fecha de realización, materiales empleados, número de piezas... entre otros datos. A continuación, se reproduce un modelo de cajetín para desarrollar un curso de dibujo técnico (Fig. 10.9).

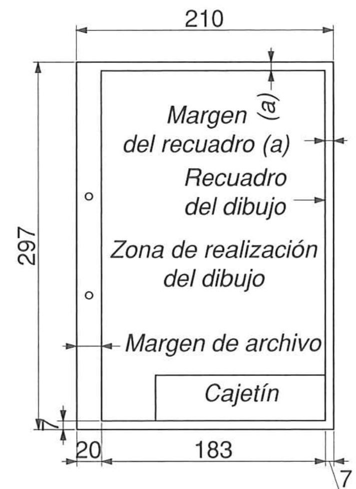


Fig. 10.8. *Márgenes del papel.*

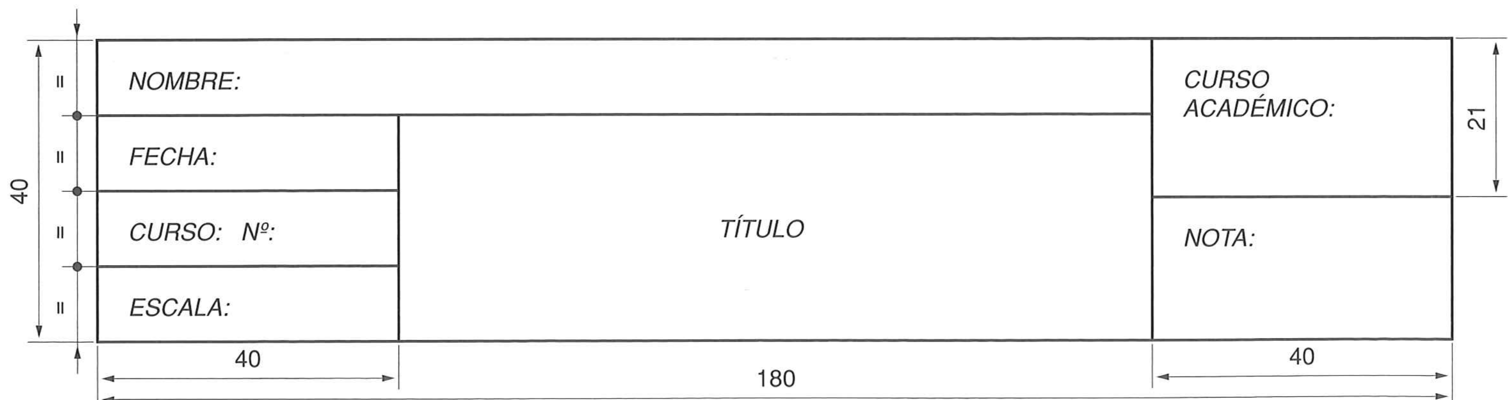


Fig. 10.9. *Cajetín.*



G. Plegado de planos

En dibujo técnico es fácil que por motivos de los objetos que se están representando se necesite un papel de grandes dimensiones, por lo que su almacenaje debe regirse por normas de doblado de éste hasta conseguir las medidas del formato A4 según indica la norma **UNE 1027**.

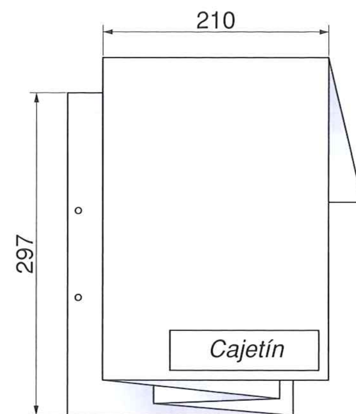


Fig. 10.10. *Plegado de un plano.*

Los planos pueden plegarse del las siguientes maneras:

- **Plegado tipo A:** se utiliza para archivado con una fijación en el margen derecho de dos o cuatro perforaciones (Fig. 10.11).

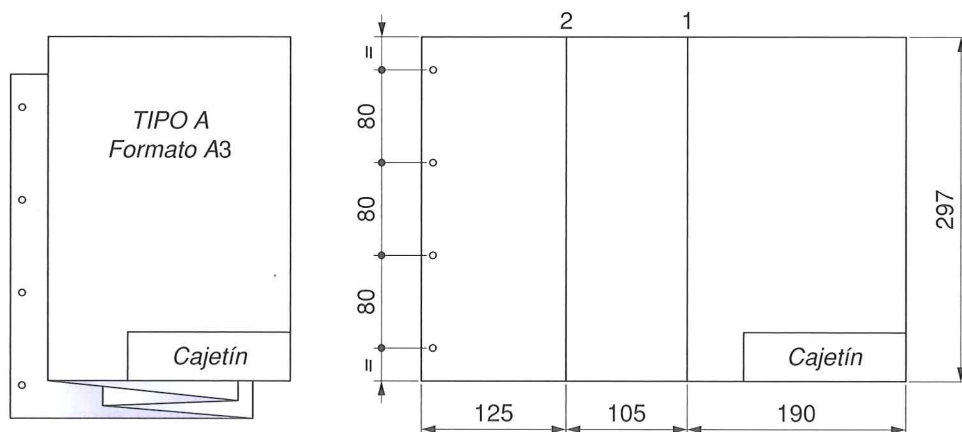


Fig. 10.11. *Plegado tipo A.*

- **Plegado tipo B:** se utiliza para archivado mediante una banda que se adhiere al plano (Fig. 10.12).

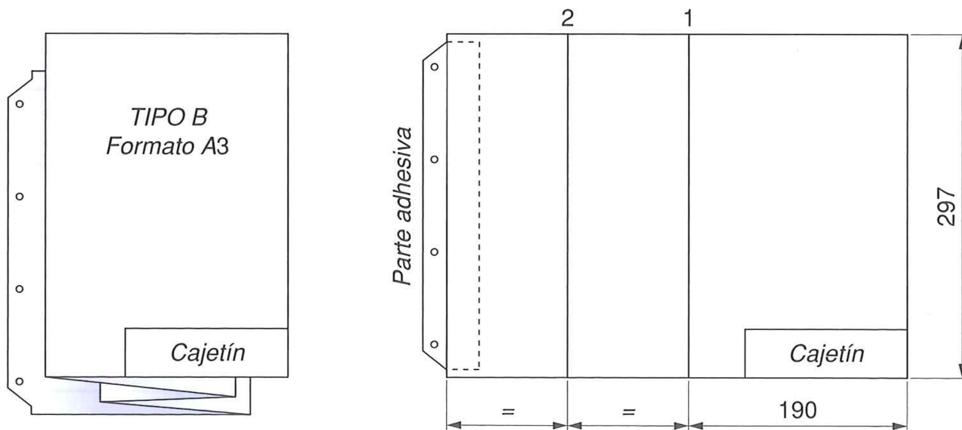
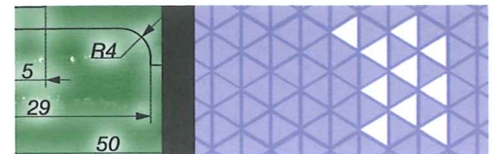


Fig. 10.12. *Plegado tipo B.*



- **Plegado tipo C:** se utiliza para archivado sin ningún tipo de fijación. Este tipo de planos suele almacenarse plegado en fundas transparentes de plástico (Fig. 10.13).

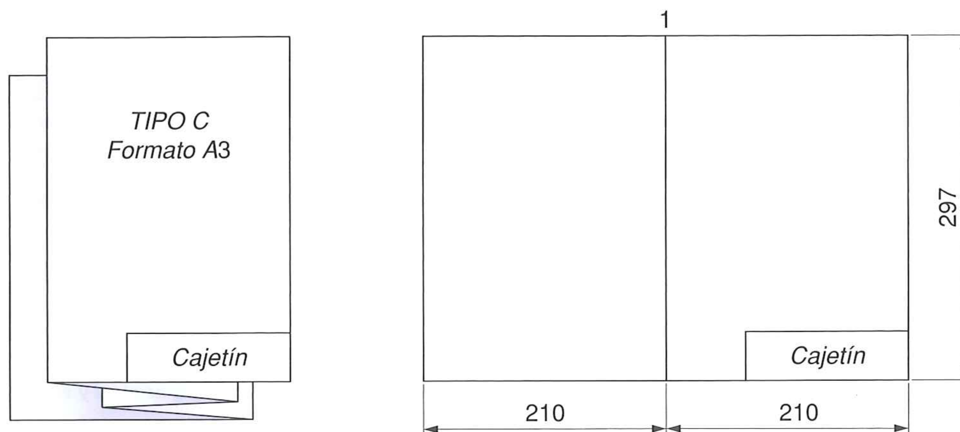


Fig. 10.13. *Plegado tipo C.*

H. Rotulación técnica (normas UNE 1034 e ISO 3098)

La escritura en el dibujo técnico viene dada por la norma UNE 1034 que se adecua a las ISO 3098. Una de las características que tiene la escritura técnica es que permite realizarse en los planos a mano alzada, con plantillas o con la ayuda del ordenador. La escritura puede ser trazada con letras **verticales** o bien inclinadas 15° hacia la derecha, denominada **cursiva.**

Se ha de buscar, en cualquiera de los casos, que la escritura sea **legible, homogénea** y **apta para poder ser microfilmada.**

Medidas normalizadas

Para dibujar letras y números es importante tener en cuenta los siguientes aspectos (Fig. 10.14):

- **Altura nominal (*h*):** es la altura que tienen las letras mayúsculas, y se toma como medida de referencia. Las alturas, tanto de las letras mayúsculas como de las minúsculas, no han de ser menores de 2,5 mm.
- *c*: Altura de la letra minúscula
- *a*: Espacio entre caracteres
- *b*: Espacio mínimo entre líneas de apoyo
- *e*: Espacio mínimo entre palabras
- *d*: Anchura de trazo

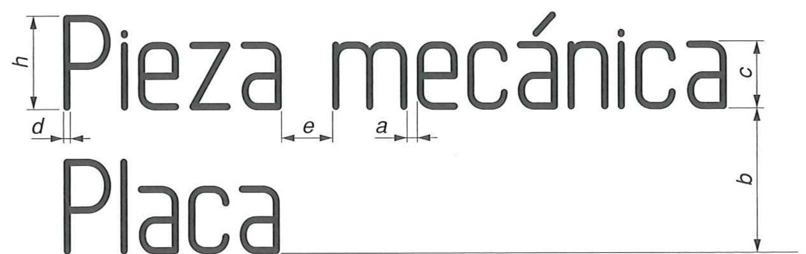
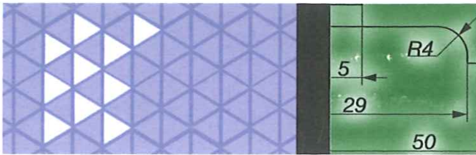


Fig. 10.14. *Medidas normalizadas de la rotulación.*

Las **medidas normalizadas** vienen dadas en milímetros, y entre ellas tienen una razón de $\sqrt{2}$. La gama de alturas es de: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20 mm.

La gama de anchuras de los trazos es de: 0,18; 0,25; 0,35; 0,5; 0,7; 1; 1,4; 2 mm.



En la **relación *d/h*,** la letra *d* es la anchura del trazo, y *h*, como ya se ha expuesto, es la altura de la letra mayúscula. Existen dos tipos de escritura normalizada para la relación d/h: la denominada de tipo "A" ($d = h/14$), y la de tipo "B" ($d = h/10$). La correspondencia entre anchuras de trazo y alturas queda reflejada en la Tabla 10.1.

Todas las medidas normalizadas de la rotulación están relacionados con la altura nominal (*h*). Obsérvense en la Tabla 10.2.

	h = 2,5	*h* = 3,5	*h* = 5	*h* = 7	*h* = 10	*h* = 14	*h* = 20
d=*h*/14	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1	1,4
d=*h*/10	0,25	0,35	0,5	0,7	1	1,4	2

Tabla 10.1. *Correspondencia entre la anchura del trazo y la altura nominal.*

Características	Tipo de letra A $d = h/10$	Tipo de letra B $d = h/14$
***h*:** Altura de las mayúsculas	(14/14)*h*	(10/10)*h*
***c*:** Altura de letra minúscula	(10/14)*h*	(7/10)*h*
***a*:** Espacio entre caracteres	(2/14)*h*	(2/10)*h*
***b*:** Espacio mínimo entre líneas de apoyo	(20/14)*h*	(14/10)*h*
***e*:** Espacio mínimo entre palabras	(6/14)*h*	(6/10)*h*
***d*:** Anchura de trazo	(1/14)*h*	(1/10)*h*

Tabla 10.2. *Correspondencia entre la altura nominal y el resto de medidas de rotulación.*

I. Líneas normalizadas (normas UNE 1032 e ISO 128)

Las líneas empleadas en la representación del dibujo técnico están tipificadas para ganar claridad, tanto de interpretación como de exactitud. Así se normalizan sus grosores y sus formas, y se concretan para ello varios grupos de líneas.

El grueso de la línea se debe elegir en función de las dimensiones del formato de papel y de las características del dibujo, de manera que ha de permitir la correcta observación del mismo y de una posible reproducción reprográfica (fotocopia). Estos son: 0,18; 0,25; 0,35; 0,5; 0,7; 1,4 y 2 mm.

En la representación de un dibujo habrá siempre dos grosores de líneas entre los que no existirá nunca una relación inferior al doble; es decir, que si se utiliza una línea fina de 0,18 mm, la gruesa deberá de ser, como mínimo, de 0,36 mm.

En la figura 10.15 se muestran los diferentes tipos de líneas con sus aplicaciones.

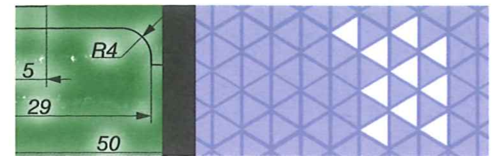
Los grosores de líneas aconsejables para los formatos más utilizados son los siguientes:

- **Formato A4:** espesor mínimo 0,18, y máximo 0,5 ó 0,7 mm.
- **Formato A3:** grosor mínimo 0,18, y máximo 0,7 ó 1,4 mm.

J. Orden de prioridad de las líneas coincidentes

Si dos líneas coinciden, el orden jerárquico que se establece es el siguiente:

1. Contornos y aristas vistas (Tipo A).
2. Contornos ocultos y aristas ocultas (Tipo E, F).
3. Trazas del plano de corte (Tipo H).
4. Ejes de revolución y ejes de simetría (Tipo G).
5. Líneas de centro de gravedad (Tipo K).
6. Líneas de cota, de referencia, etc. (Tipo B).



Línea	Designación		Aplicaciones generales
A	Línea gruesa	A1	Contornos vistosos
		A2	Aristas vistas
B	Línea fina	B1	Líneas ficticias vistas
		B2	Líneas de cota
		B3	Líneas de proyección
		B4	Líneas de referencias
		B5	Rayados
		B6	Contornos de secciones abatidas sobre las superficies del dibujo
		B7	Ejes cortos
C	Línea fina a mano alzada	C1, D1	Límites de vistas o cortes parciales, o interrumpidos, si estos límites no son líneas finas a trazos y puntos
D	Línea fina recta con zig-zag		
E	Gruesa de trazos	E1	Contornos ocultos
		E2	Aristas ocultas
F	Fina de trazos	F1	Contornos ocultos
		F2	Aristas ocultas
G	Fina de trazos y puntos	G1	Ejes de revolución
		G2	Trazas de plano de simetría
		G3	Trayectorias
H	Fina de trazos y puntos gruesa en los extremos y en los cambios de dirección	H1	Trazas de plano de corte
J	Gruesa de trazos y puntos	J1	Indicación de líneas o superficies que son objeto de especificaciones particulares
K	Fina de trazos y doble punto	K1	Contornos de piezas adyacentes
		K2	Posiciones intermedias y extremos de piezas móviles
		K3	Líneas de centros de gravedad
		K4	Contornos iniciales antes de conformado
		K5	Partes situadas delante de un plano de corte

Fig. 10.15. *Tipos de líneas normalizadas.*



Tipo de escala	Recomendaciones
Natural	1:1
Reducción	1:2; 1:5; 1:10; 1:20; 1:50; 1:100; 1:200; 1:500; 1:1000; 1:2000; 1:5000; 1:10000
Ampliación	2:1; 5:1; 10:1; 20:1; 50:1

Tabla 10.3. *Escalas normalizadas.*

K. Escalas normalizadas (norma UNE en ISO 5455)

Como se expuso anteriormente, escala es una relación entre las dimensiones de un dibujo y sus correspondientes dimensiones en la realidad.El manejo de las escalas gráficas posibilita tomar cualquier medida sin que esto suponga que sea necesario realizar una ampliación o una reducción anterior. Las escalas que se presentan a continuación son las más utilizadas, dentro de las que la norma UNE establece para construir objetos de pequeño formato, como martillos, cucharas, etc., con las que se suele utilizar la **escala natural** (E = 1:1).

En objetos de tamaño superior, como sillas, campanas y otros del mismo tamaño, la escala es de 1:5 o 1:10. Para alzados y plantas de viviendas o maquinaria pesada se emplean las escalas 1:25 y 1:50. En planos de grandes edificios las escalas son de 1:100 y 1:200. No obstante, en la Tabla 10.3 se muestran todas las escalas normalizadas según la norma UNE en ISO 5455, y en la Figura 10.16 se representan gráficamente algunas de ellas.

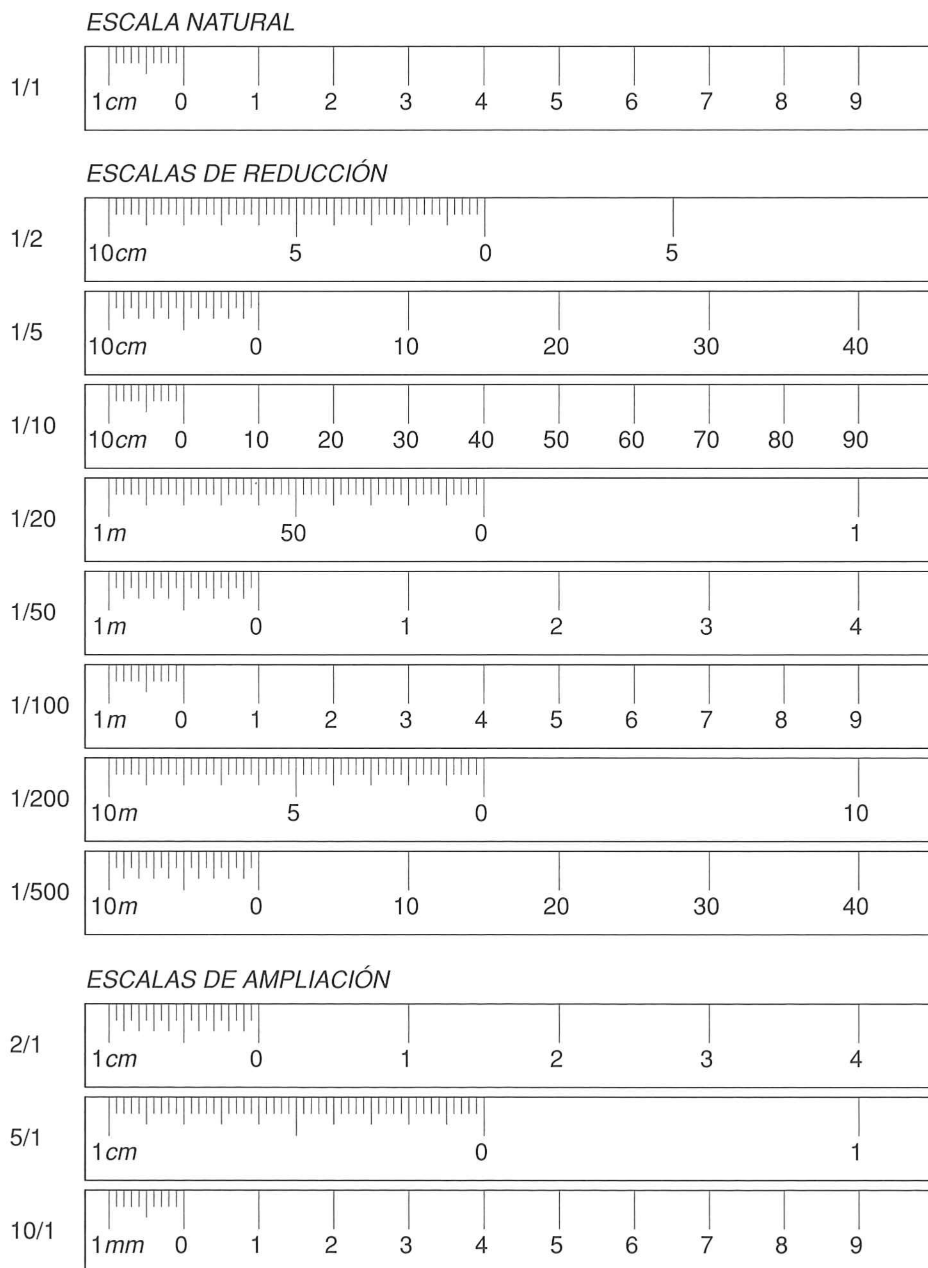
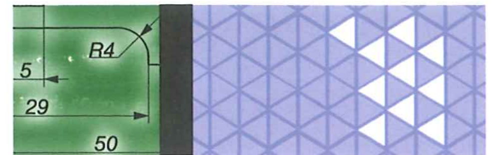


Fig. 10.16. *Representación gráfica de escalas.*



L. Representaciones normalizadas de objetos (normas UNE 1032 e ISO 128)

Las representaciones normalizadas de los objetos en dibujo técnico se fundamentan en el sistema diédrico ortogonal. De acuerdo con él, las proyecciones de un sólido, según las distintas direcciones de observación, se llaman **vistas.**

En el caso de que el objeto sea complejo, se pueden llegar a representar hasta seis vistas, que se obtienen al proyectar ortogonalmente sobre cada una de las caras del cubo en cuyo interior está situado (Fig. 10.17):

Vista 1: Alzado o vista principal.

Vista 2: Planta superior.

Vista 3: Perfil izquierdo o vista lateral izquierda.

Vista 4: Perfil derecho o vista lateral derecha.

Vista 5: Planta inferior.

Vista 6: Alzado posterior.

Existen dos sistemas generalizados en el dibujo técnico:

1. **Sistema europeo,** o el método del primer cuadrante.
2. **Sistema americano,** también denominado el método del tercer cuadrante.

Estos sistemas se usan principalmente en las industrias ubicadas en las respectivas zonas geográficas.

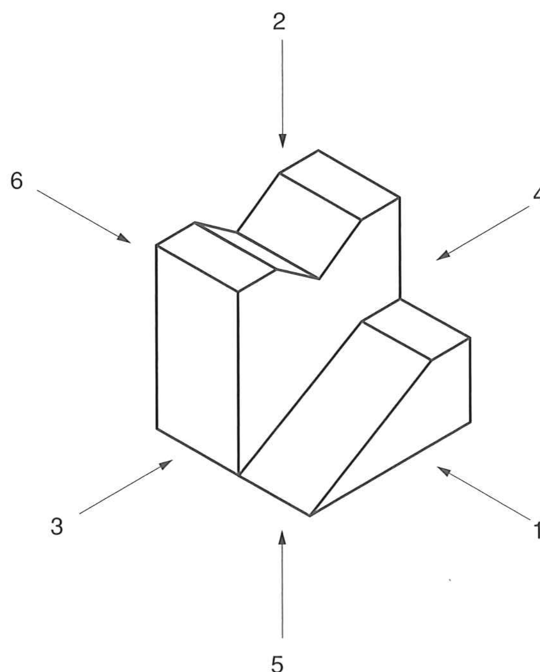
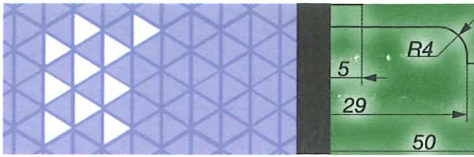


Fig. 10.17. *Obtención de las seis vistas de un objeto.*



▶▶▶ Sistema europeo (método del primer cuadrante)

Para contemplar las seis vistas en un único plano abatimos las caras sobre las que la figura contiene el alzado. El resultado final se aprecia en la Figura 10.18. En ella queda de manifiesto la correspondencia entre las diferentes vistas. Es conveniente dejar un espacio amplio entre ellas para su mejor percepción y estudio.

Fig. 10.18. *Sistema europeo.*



▶▶▶ Sistema americano (método del tercer cuadrante)

El sistema americano se sirve del tercer diedro como base para hacer las proyecciones de los objetos. En él, al desplegar los planos de proyección, la posición de las vistas es diferente. En los dos sistemas se parte de una vista principal, el alzado, pero en el europeo la imagen del objeto que se ve se dibuja sobre el plano, mientras que en el americano se proyecta, como si las caras del sólido fueran sellos de caucho que se estampan sobre los planos de proyección, consiguiendo así las vistas del objeto (Fig. 10.19).

Al fijarse en las vistas de un mismo cuerpo proyectado en el sistema europeo y en el sistema americano, se observa que el alzado y la planta es lo único que no ha variado. Para saber identificar con rapidez el método que se ha empleado para dibujar los planos del cuerpo, se usa el símbolo *(a)* para el sistema europeo y el *(b)* para el americano.

Fig. 10.19. *Sistema americano.*



▶▶▶ Elección de vistas

La elección de vistas suele ser, al principio, algo complicado. Se ha de dar el menor número posible de vistas, dejando definido el objeto sin generar ninguna confusión sobre su forma o dimensiones. Por eso, se sugiere aplicar algunos criterios para elegir correctamente las vistas de un sólido. Por ejemplo los siguientes:

1. El primer paso que se ha de dar consiste en seleccionar la vista más significativa del objeto, el alzado, pues suele ser la que más aristas tiene.

2. Posteriormente, se observa el número de vistas necesarias para determinar correctamente el objeto, eligiendo, siempre que se deba dibujar un perfil, aquel que tenga más aristas y vistas.

3. Por último, la pieza quedará determinada, habitualmente, con tres vistas: el alzado, un perfil y la planta superior. En los sólidos de revolución (cilindro, cono, etc.) será suficiente con el alzado y la planta.

En la Figura 10.20 puede observarse un ejemplo de lo explicado.

b)

a)

Vista alzado

Fig. 10.20. *Proceso de elección de vistas: a) figura a representar; b) vistas elegidas para la representación.*



M. Acotación (normas UNE 1039 e ISO 129)

Se denomina **acotación** al conjunto de medidas, líneas y símbolos que aparecen en un dibujo, y que determinan con precisión y rigor la forma y las dimensiones de un objeto.

Clasificación de las cotas

En función a su importancia las cotas se clasifican en **funcionales, no funcionales** y **auxiliares** (Fig. 10.21).

- **Cotas funcionales (*F*):** son las que desempeñan un papel fundamental en el funcionamiento o utilización de la pieza.
- **Cotas no funcionales (*NF*):** es el resto de cotas que definen las magnitudes de una pieza.
- **Cotas auxiliares (*Aux*):** son las que informan de las medidas totales exteriores o interiores de una pieza. No son importantes para la fabricación de la pieza y se indican entre paréntesis.

Existe otra clasificación de las cotas que tiene en cuenta las dimensiones que son necesarias para realizar la pieza. Son las siguientes (Fig. 12.22):

- **Cotas de dimensión (*D*):** estas cotas indican el tamaño de las formas.
- **Cotas de situación (*S*):** éstas otras se refieren a la posición que tiene un elemento respecto de otro.

Es importante en el proceso de acotación empezar situando las cotas de dimensión, y posteriormente colocar las de situación.

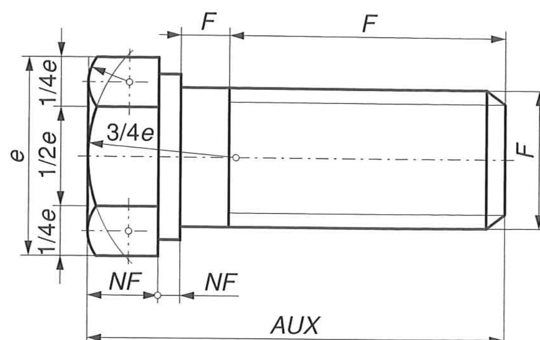


Fig. 10.21. *Diferentes cotas de un objeto.*

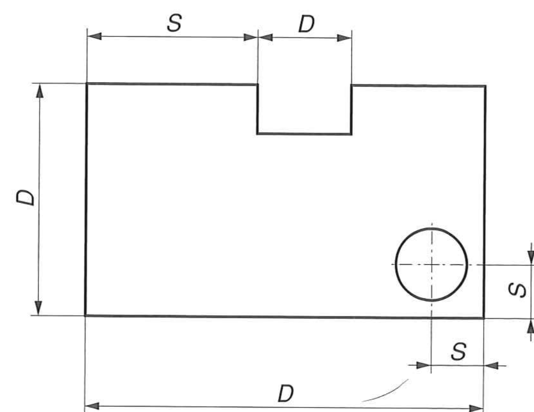


Fig. 10.22. *Cotas de dimensión y cotas de situación.*

Principios generales de acotación

Un dibujo está bien acotado cuando las cotas dadas son las mínimas necesarias para definir la pieza representada sin que éstas se presten a generar ambigüedades. Para ello, es conveniente aplicar las siguientes pautas generales:

1. El dibujo siempre se ha de acotar según su función o fabricación.
2. Las cotas han de distribuirse, a poder ser, de manera paritaria entre las vistas de la pieza, con el fin de dar la mayor claridad posible.
3. No se puede acotar sobre aristas ocultas.
4. Siempre que se pueda, y como norma general, las cotas se indicarán en el exterior de la pieza.
5. Una cota sólo ha de figurar en un único lugar del dibujo.
6. Las cotas funcionales se han de indicar directamente, no se obtienen por deducción de otras.
7. Las cotas se sitúan sobre las vistas que con mayor claridad definen el elemento en cuestión.
8. Todas las cotas se han de expresar en la misma unidad.
9. En el proceso de acotación se ha de evitar que las líneas de cota se corten entre sí, y con líneas del dibujo.
10. No es conveniente, en aras de la claridad y del rigor, que una cota sea obtenida mediante suma o diferencia de otras.



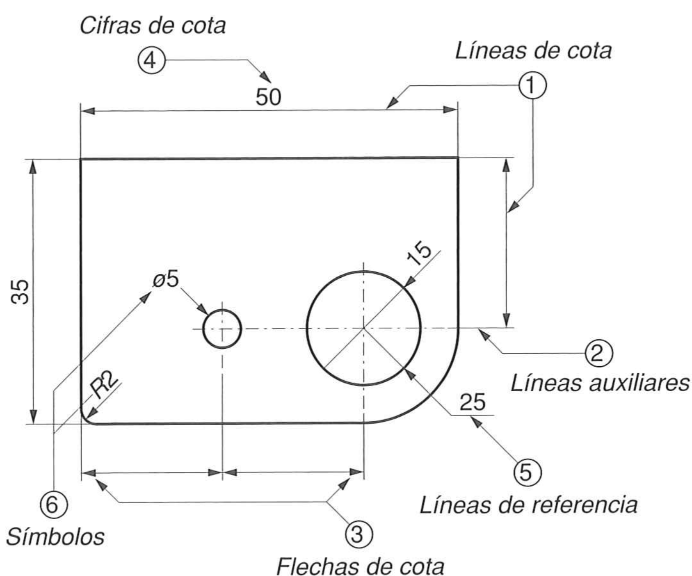


Fig. 10.23. *Elementos de acotación.*

N. Elementos de acotación

En la Figura 10.23 se muestran los elementos más significativos que se emplean en la acotación. Posteriormente se presentara de manera individualizada cada uno de ellos.

- Líneas de cota.
- Líneas auxiliares de cota.
- Flechas de cota.
- Cifras de cota
- Líneas de referencia.
- Símbolos: *R* = radio, ø = diámetro y □ = cuadrado.

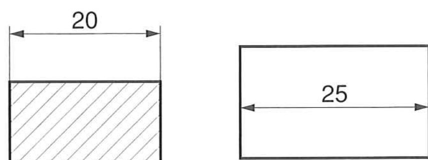


Fig. 10.24. *Situación de las líneas de cota.*

Líneas de cota

Son líneas de trazo continuo de trazo fino rematadas con dos flechas en los extremos.

- Normalmente su situación es paralela a la dimensión acotada y, en algunos casos, perpendicular a la superficie a acotar (Fig. 10.24).

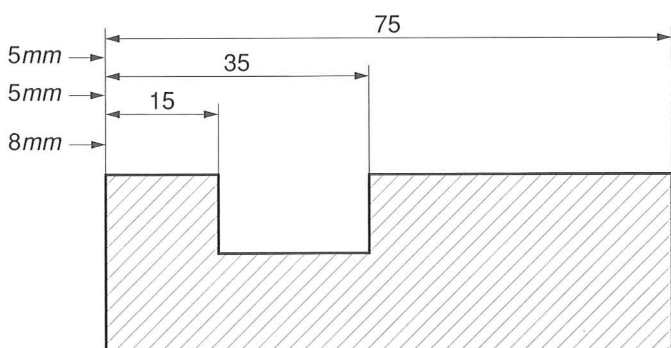


Fig. 10.25. *Separación entre líneas de cota.*

- La separación de la arista a la línea de cota ha de ser de 8 mm aproximadamente, y 5 mm entre sí cuando exista más de una línea (Fig. 10.25). Como ya se apuntó, no deben cortarse entre ellas, salvo que sea inevitable.

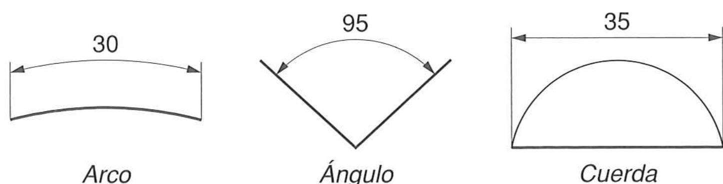
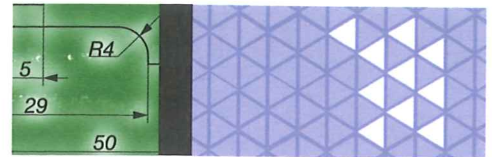


Fig. 10.26. *Acotación de arcos, ángulos y cuerdas.*

- Para acotar arcos y ángulos se utilizan como líneas de cota arcos de circunferencia. Sin embargo, en el caso de cuerdas se utilizan segmentos paralelos a la magnitud que se va acotar (Fig. 10.26).



- Nunca se usarán como líneas de cota las aristas ni sus prolongaciones; tampoco los ejes de los cuerpos (Fig. 10.27).

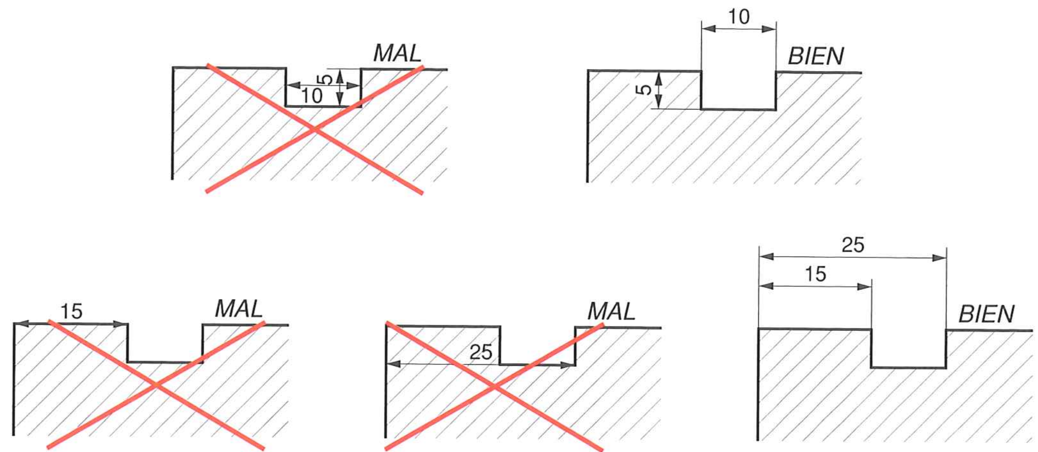


Fig. 10.27. *Errores frecuentes en la acotación.*

▶▶▶ Líneas auxiliares

Son líneas perpendiculares a la línea de cota, y su grosor es el mismo que el de las anteriores (Fig. 10.28).

- De manera excepcional, se pueden dibujar a 60°; es recomendable que sobrepasen la línea de cota en 2 mm aproximadamente.
- Las aristas de los cuerpos, junto con sus ejes, se pueden tomar como líneas de cota; en ciertos casos se constituyen como apoyo en la prolongación de las aristas concurrentes de construcción, achaflanados y redondeamientos.
- Por último, este tipo de líneas no se puede utilizar para vistas distintas del mismo objeto. Se ha de evitar que estas líneas corten a otras de cualquier tipo o que lo hagan entre sí.

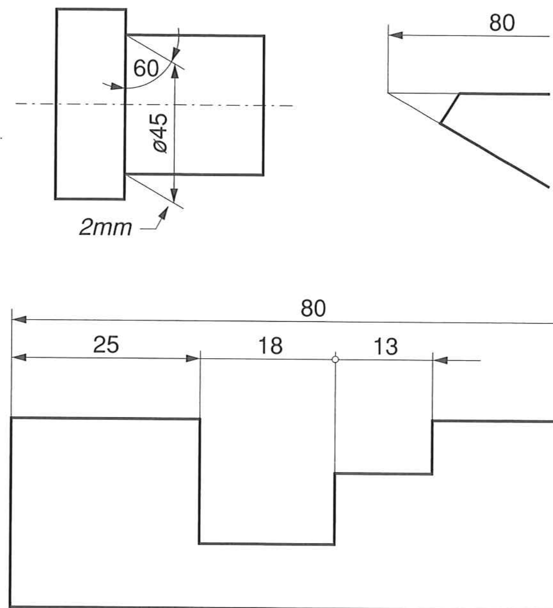
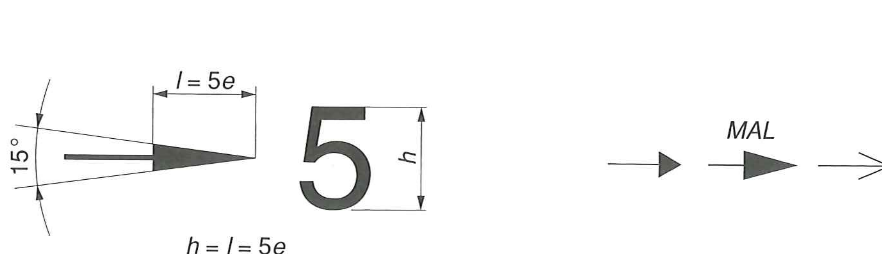


Fig. 10.28. *Líneas auxiliares*

▶▶▶ Flechas de cota

- Las flechas de cota han de tener forma de triángulo isósceles, y su ángulo más agudo, un mínimo de 15° para indicar el extremo de la línea de cota.
- Su longitud ha de ser igual a la altura de la cifra de cota y, aproximadamente, cinco veces el espesor de las líneas gruesas del dibujo (Fig. 10.29).



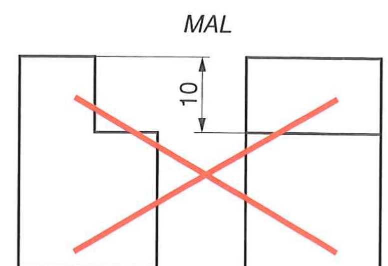


Fig. 10.29. *Flechas de cota: parámetros correctos y errores frecuentes.*



- Las flechas de un mismo dibujo han de ser todas iguales y, dependiendo de la complejidad del mismo, se podrán situar según los ejemplos que aparecen en la Figura 10.30.

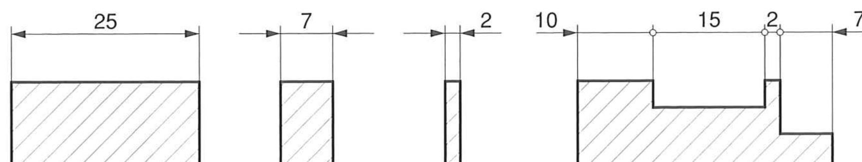


Fig. 10.30. *Ejemplos de utilización de las flechas de cota.*

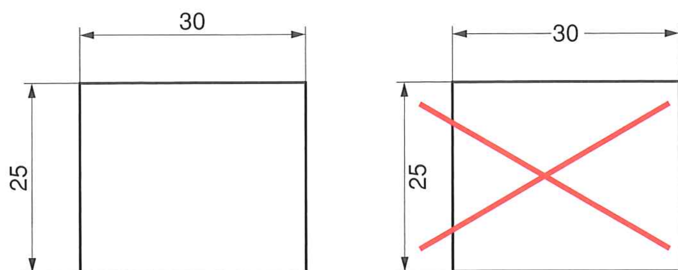


Fig. 10.31. *Ubicación correcta de las cifras de cota.*

▶▶▶ Cifras de cota

- La cifra de cota refleja la longitud acotada. Se sitúa de manera que su lectura se realice en la posición normal del dibujo en todas las acotaciones horizontales, y desde la derecha en las acotaciones verticales (Fig. 10.31).
- Se expresa en milímetros y se coloca en el centro, encima y separada de la línea de cota.

Pintado
Pulido
19
21
2

Fig. 10.32. *Línea de referencia.*

▶▶▶ Líneas de referencia

Este tipo de líneas sólo se ha de usar en caso de necesidad. Son unas líneas finas que sirven para sacar una cifra de cota de un lugar donde su visión es difícil. También se utilizan para indicar el número de pieza en un dibujo de conjunto, tipos de acabados, etcétera (Fig. 10.32).

- Pueden terminar en una flecha si va a parar a una arista, o en un punto si finaliza sobre una superficie, y sin punto ni flecha si acaba en una línea de cota.

▶▶▶ Símbolos

Son abreviaturas convencionales que se establecen para dar una explicación sobre la magnitud acotada:

- **Diámetro:** el símbolo del diámetro es ø y se sitúa, al igual que el radio, por delante de la cifra de cota cuando no se ve claramente la forma circular en la vista del objeto (Fig. 10.33).

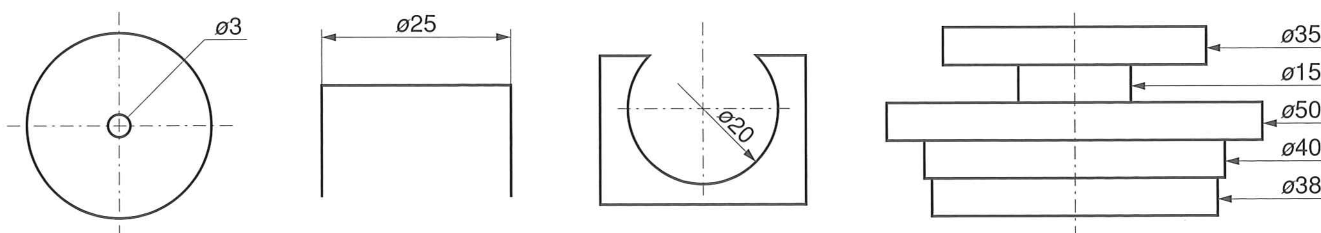


Fig. 10.33. *Diámetro.*



- **Radio:** se indica el radio de un arco con la letra *R* cuando éste es muy pequeño y no existe espacio para la acotación apropiada a tal efecto, o, por el contrario, si el arco es muy grande y el radio se sale fuera de los límites del dibujo (Fig. 10.34).

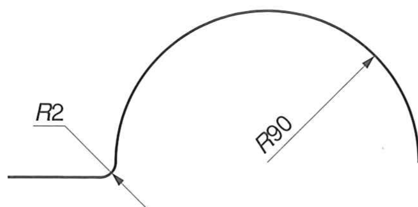


Fig. 10.34. *Radio.*

- **Cuadrado:** el símbolo es un cuadrado □, y se sitúa delante de la cifra de cota para indicar que la arista representa una cara cuadrada. Las aristas que forman el aspa en la figura se denomina Cruz de San Andrés e indican que la cara es plana; de esta manera se evita dar otra vista del objeto para poder apreciar este hecho (Fig. 10.35).

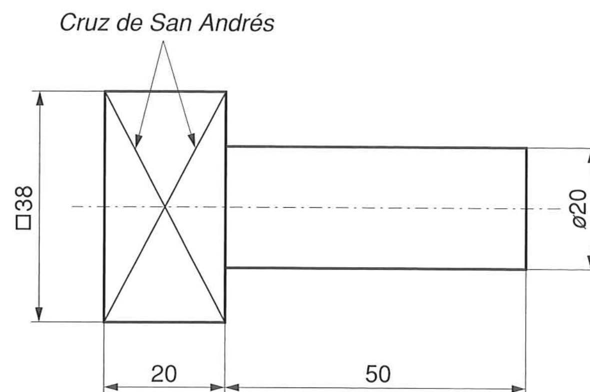
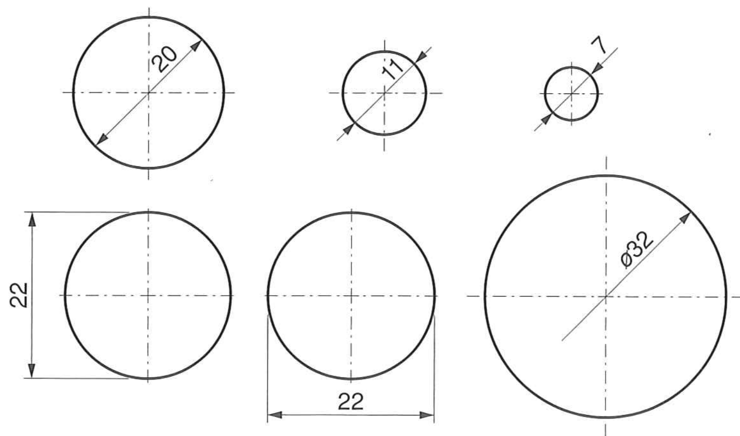


Fig. 10.35. *Cuadrado y Cruz de San Andrés.*

▶▶▶ Acotación de circunferencias y de arcos

1. La circunferencia se acota mediante su diámetro. La línea de cota puede pasar por el centro de la curva, o, también puede acotarse paralelamente a los ejes vertical y horizontal (Fig. 10.36).



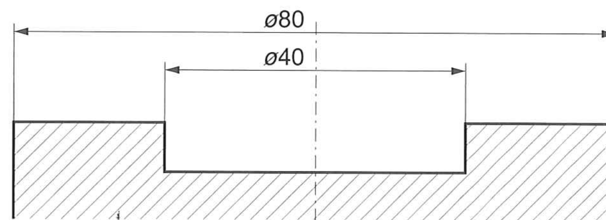


Fig. 10.36. *Acotación del diámetro de la circunferencia.*

Se han de evitar, tanto para diámetros como para ángulos, las líneas de cota en las zonas de 30°, de la manera que indica la Figura 10.37.

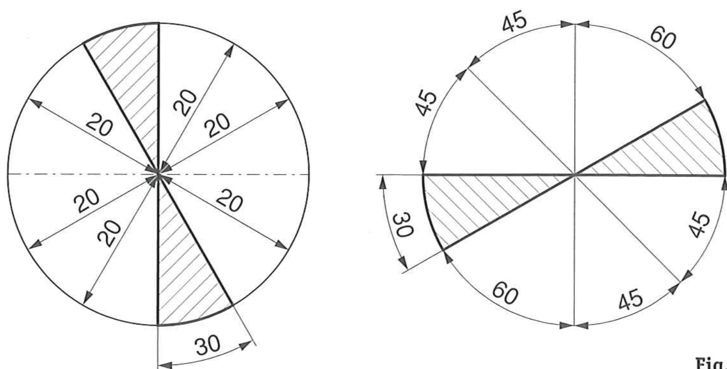
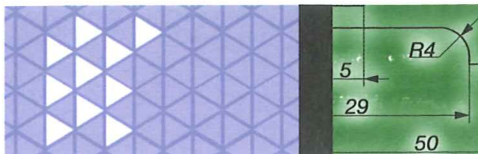


Fig. 10.37. *Acotación de radios y ángulos.*



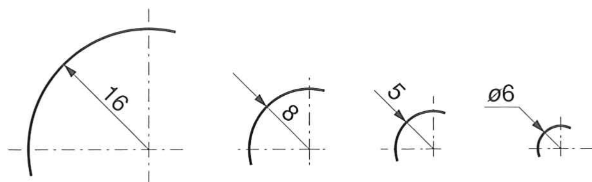


Fig. 10.38. *Acotación de arcos menores de 180°.*

2. Los arcos, si son mayores de 180°, se acotan como si fuesen una circunferencia. Los arcos menores de 180° se acotan por medio de su radio. Véase en la Figura 10.38 cómo se acotan arcos con diferente valor de radio.

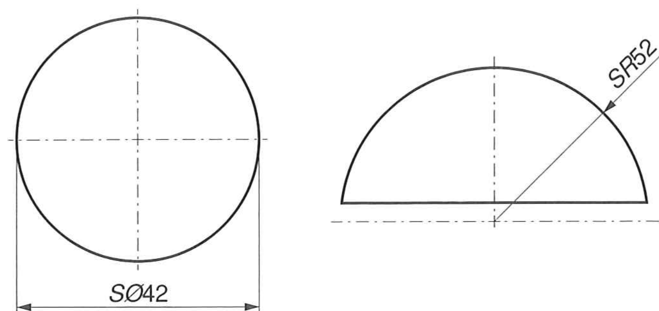


Fig. 10.39. *Acotación de esferas.*

▶▶▶ Acotación de esferas

Como se puede apreciar en la Figura 10.39, el símbolo que identifica a una esfera, o a un casquete esférico, es la letra *S* seguida del símbolo del diámetro o el radio.

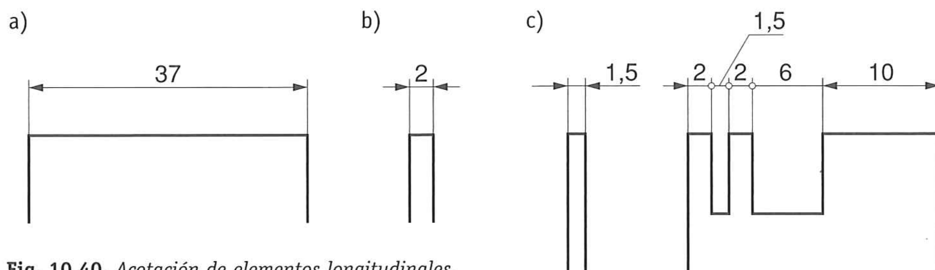


Fig. 10.40. *Acotación de elementos longitudinales.*

▶▶▶ Acotación de elementos longitudinales

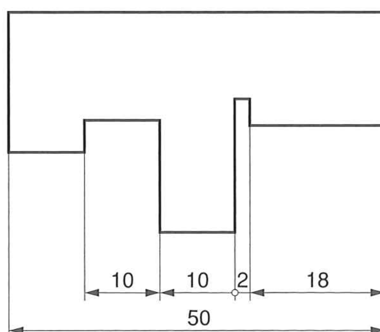
1. La longitud de la línea de cota permite colocar flechas de cota y cifra de cota entre las dos líneas auxiliares (Fig. 10.40a).

2. Si las líneas auxiliares están muy juntas, se sitúa la cifra de cota entre ellas y las flechas por el exterior (Fig. 10.40b).

3. Si la cifra de cota y las flechas no cupiesen entre las líneas auxiliares, se actuaría como se muestra en la Figura 10.40c.

▶▶▶ Sistema de acotación en serie

Se habla de la acotación en serie cuando todas las líneas de cota se sitúan sobre una misma recta. Con frecuencia, la medida total se halla sumando todas las parciales. Sin embargo, en ocasiones también se indica la longitud total y se deja sin acotar una medida, que se deduce del total.



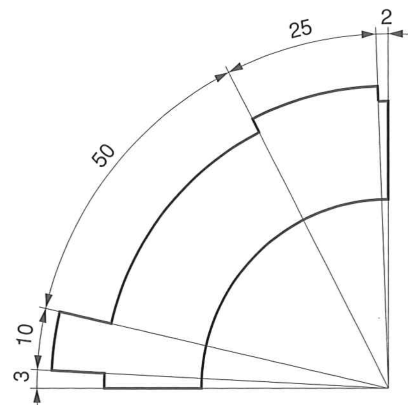


Fig. 10.41. *Acotación en serie.*



▶▶▶ Sistema de acotación en paralelo

En este sistema, las acotaciones se realizan tomando siempre como referencia una de las aristas, y las diversas cotas del objeto se sitúan de forma paralela (Fig. 10.42).

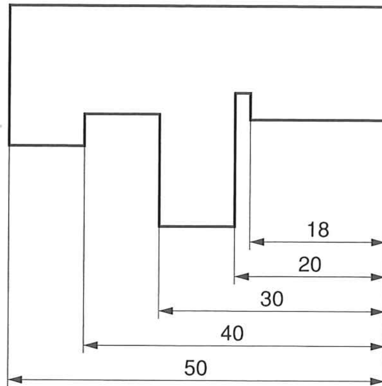


Fig. 10.42. *Acotación en paralelo.*

En la practica, se utilizan de manera combinada los dos tipos de acotación, dejando al dibujante la libertad para la aplicación de uno u otro sistemas con el fin de que el resultado sea lo más claro posible (Fig. 10.43).

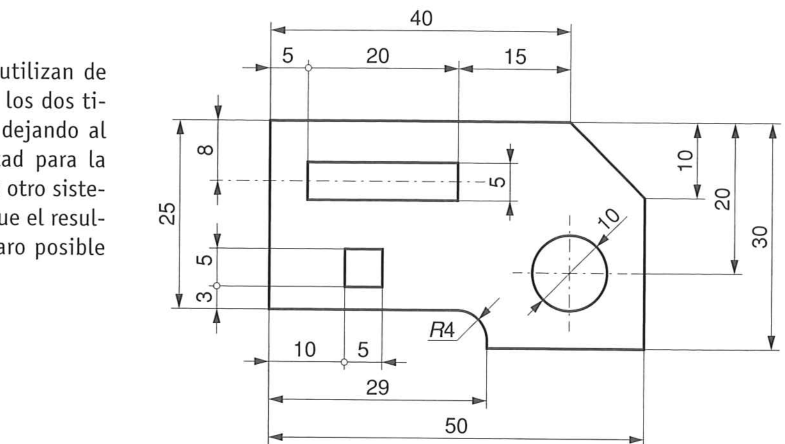


Fig. 10.43. *Uso combinado de la acotación en serie y en paralelo.*

▶▶▶ Acotación por coordenadas

Esta manera de acotar es muy eficaz cuando existe una acumulación de cotas. Consiste en tomar como referencia dos ejes coordenados, *X* e *Y*, y numerar cada elemento acotado exponiéndolos en una tabla con sus correspondientes valores (Fig. 10.44).

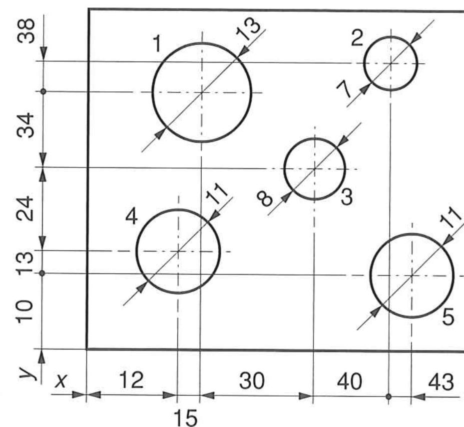


Fig. 10.44. *Acotación por coordenadas.*

	x	x	x
1	15	34	13
2	40	38	7
3	30	24	8
4	12	13	11
5	43	10	11

10.2. Croquización

Se denomina croquis a la representación en proyecciones diédricas o en perspectiva de un objeto realizado a mano alzada y a lápiz, sin utilizar los instrumentos de dibujo (regla, compás escuadra, etc.), en el que se han expresado todas sus formas y medidas.

Obviamente, no es un dibujo a escala, pero sí se ha de trazar con unas magnitudes que guarden cierta proporcionalidad con las reales; se trata de realizar una representación aproximada a la realidad del objeto (Fig. 10.45).

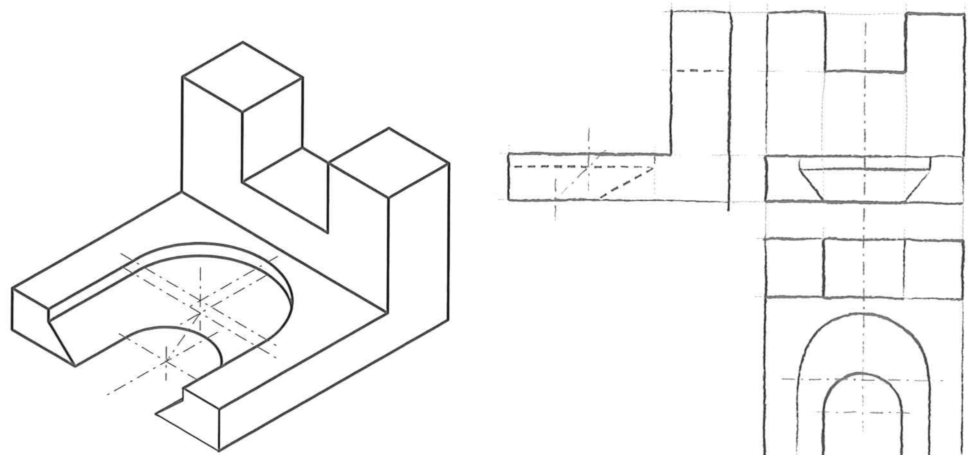
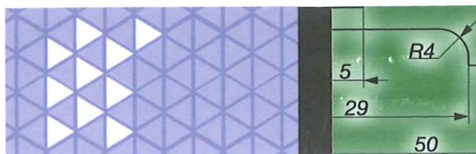


Fig. 10.45. *Croquis*



▶▶▶ Proceso de croquización

El croquis debe ser claro en su lectura y limpio en su representación, debiéndose hacer con rapidez. Para que estos objetivos se puedan conseguir, es conveniente aplicar los siguientes procedimientos en su desarrollo gráfico (Fig. 10.46):

1. Se ha de comenzar realizando un análisis visual meticuloso del objeto que se va a dibujar para determinar la elección de sus vistas más importantes.

2. Se distribuyen sobre el papel los elementos que se van a representar: ubicación de los ejes de simetría, encaje de vistas, uso del sistema diédrico o situación de la perspectiva que se va a utilizar.

3. Trazado con diferentes gruesos de líneas para identificar aristas, ejes, etcétera.

4. Análisis de las acotaciones necesarias para determinar correctamente el objeto.

5. Toma de magnitudes del cuerpo y anotación numérica de las cotas.

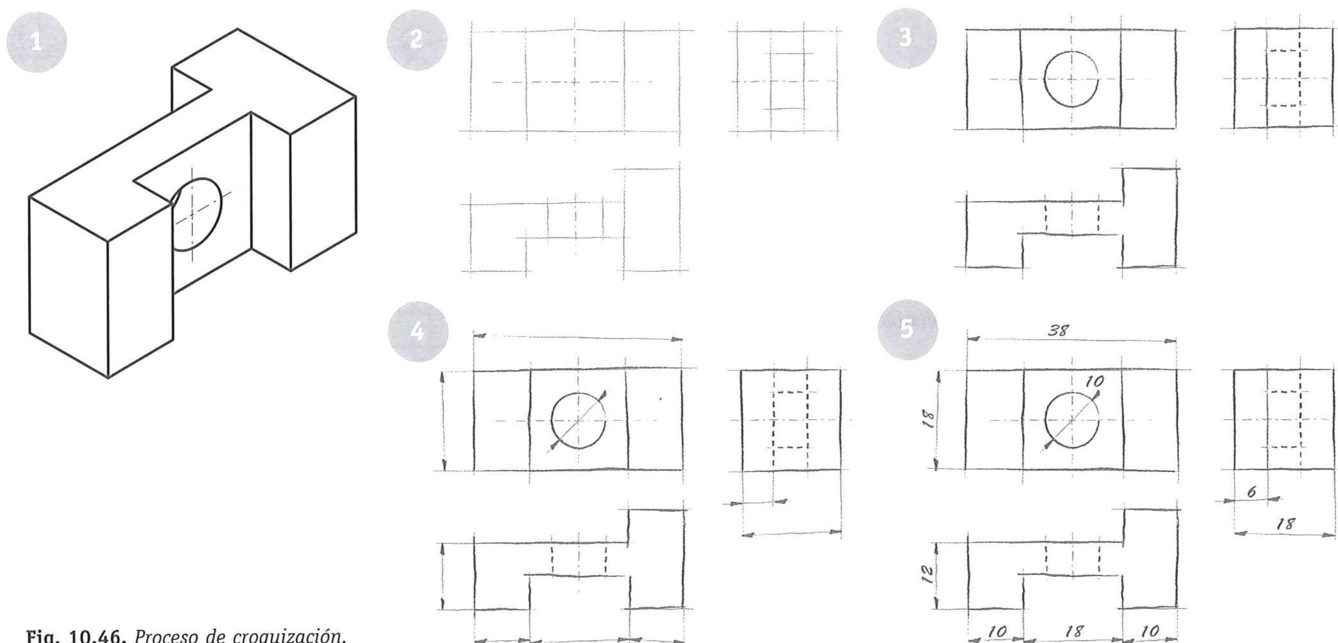


Fig. 10.46. *Proceso de croquización.*

Una vez terminado el croquis, se pasan todas las formas, mediciones, construcciones, etc., a limpio sobre un papel adecuado y con tinta, trazándose todo ello a una escala determinada. El dibujo así obtenido se conoce con el nombre de **plano de taller** (Fig. 10.47).

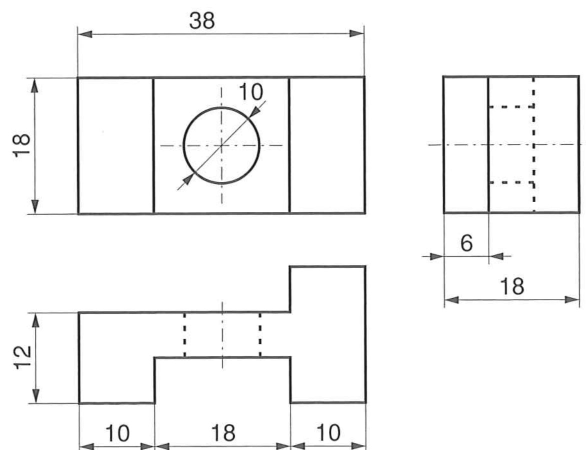


Fig. 10.47. *Plano de taller.*



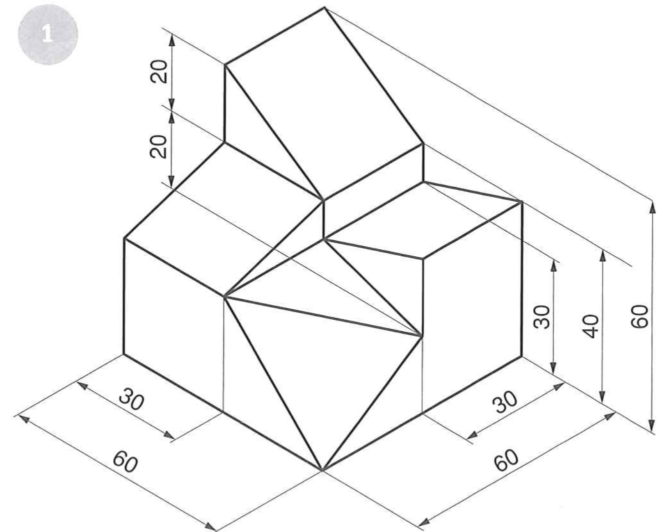
Cuestiones

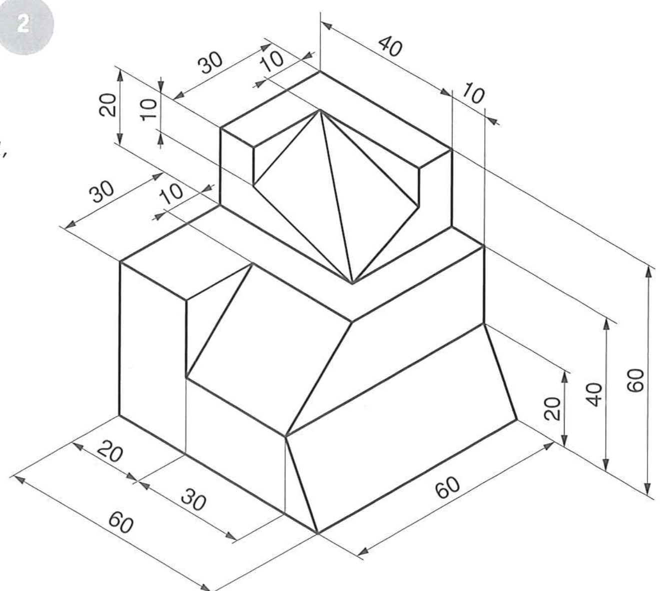
Responde de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se entiende en dibujo técnico por normalización?
2. En España, ¿qué organismo regula la normalización?
3. ¿Qué reglas se utilizan en España para determinar los formatos de papel?
4. ¿Cuáles son las medidas normalizadas de la altura de las letras?
5. Enuncia cuáles son las escalas normalizadas de reducción.
6. ¿Qué diferencias tiene el sistema europeo respecto al americano?
7. ¿Qué criterios se siguen para la elección de vistas de un objeto?
8. ¿Cuáles son los principios generales de acotación?
9. ¿Cuáles son los elementos de la acotación?
10. ¿Qué se entiende por croquizar?

Ejercicios

1. En sistema diédrico, realiza los croquis acotados de los sólidos cuyas perspectivas se indican en la figuras adjuntas. Toma como alzado la vista que sea más apropiada para ello, teniendo en cuenta que se han de realizar las vistas mínimas necesarias que determinen con precisión al sólido. Representa los correspondientes a los números 1 y 2 en el sistema europeo, y el que tiene el número 3 en el sistema americano (Fig. 10.48).





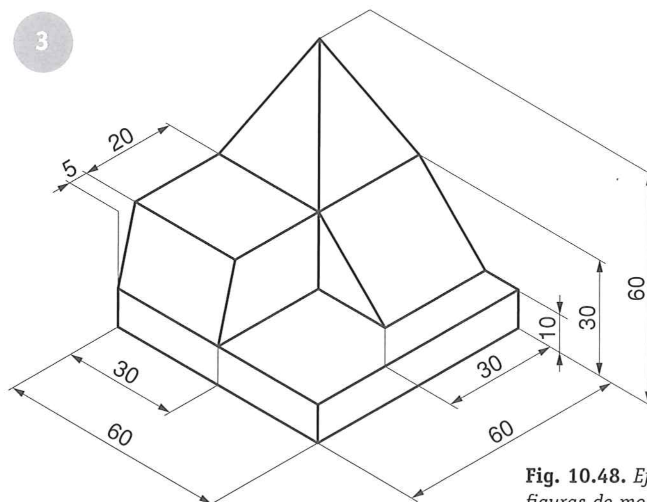


Fig. 10.48. *Ejercicio 1, figuras de modelo.*

2. La Figura 10.49 es un soporte, que está a escala 1:2. Reproduce las proyecciones a escala 8:5 y acótalas.

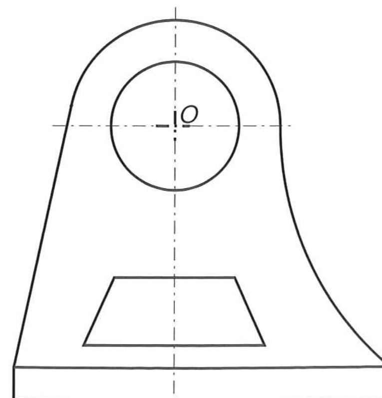


Fig. 10.49. *Ejercicio 2, figura de modelo.*

dibujo técnico 1

Este libro que ahora tienes en tus manos corresponde a la materia de Dibujo técnico, incluida en el primer curso del Bachillerato de Artes y del Tecnológico.

En él se ha tratado de conseguir un objetivo general: proporcionar un contenido riguroso y normalizado, cuidadosamente analizado para que enlace con el libro de Dibujo Técnico para 2° de Bachillerato.

Sin embargo, no nos hemos olvidado de la claridad a la hora de exponer los contenidos teóricos, apoyados en gráficos y dibujos de gran limpieza visual, de forma que es sencillo seguir la explicación del libro.

El texto se complementa con un cuaderno de trabajo complementario al libro Dibujo técnico 1° Bachillerato. Dicho cuaderno contiene una colección de láminas de trabajo, a tamaño normalizado: DIN A4 que servirán para realizar los ejercicios tan necesarios en esta materia.

Como complemento a este libro, el profesor tiene a su disposición una Guía didáctica en la que encontrará el siguiente material:

- Programación de la materia.
- Programación del aula.
- Orientaciones didácticas y metodológicas.
- Soluciones a las Actividades que aparecen en este libro.

Adicionalmente hay disponible un CD-ROM que completa el material didáctico con:

- Programación de la materia.
- Programación del aula.
- Actividades adicionales.
- Evaluaciones acompañadas de su solución.
- Recursos generales.
- Documentación de interés.

Para más información, consulta nuestra web: http:// www.mcgraw-hill.es.

Con la colaboración de:

FABER-CASTELL
since 1761

IMASOTO



ISBN: 84-481-4892-4

The McGraw-Hill Companies